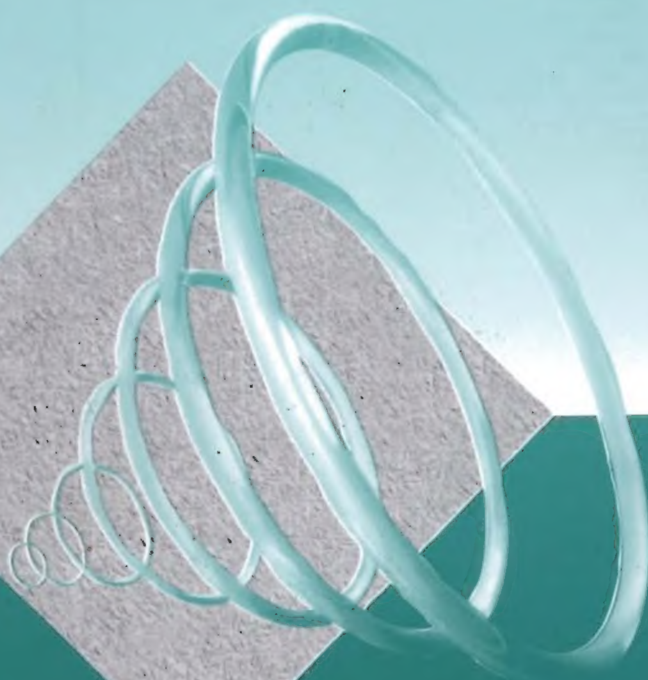


Sóng





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



HACHETTE
Supérieur

"Cuốn sách này được xuất bản trong khuôn khổ Chương trình Đào tạo Kĩ sư Chất lượng cao tại Việt Nam, với sự trợ giúp của Bộ phận Văn hóa và Hợp tác của Đại Sứ quán Pháp tại nước Cộng hòa Xã hội Chủ nghĩa Việt Nam".

"Cet ouvrage, publié dans le cadre du Programme de Formation d'Ingénieurs d'Excellence au Vietnam bénéficie du soutien du Service Culturel et de Coopération de l'Ambassade de France en République socialiste du Vietnam".

194 – 2006/CXB/14 – 323/GD Mã số: 7K480T6 – DAI

Sóng

(Tái bản lần thứ nhất)

Chủ biên :

JEAN - MARIE BRÉBEC
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Saint - Louis ở Paris

JEAN - NOËL BRIFFAUT
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Descartes ở Tours

PHILIPPE DENÈVE
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Henri - Wallon ở Valenciennes

THIERRY DESMARAIS
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Vaugelas ở Chambéry

ALAIN FAVIER
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Champollion ở Grenoble

MARC MÉNÉTRIER
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Thiers ở Marseilles

BRUNO NOËL
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Champollion ở Grenoble

CLAUDE ORSINI
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Dumont - d'Urville ở Toulon

Người dịch : ĐÀO VĂN PHÚC

Năm thứ hai

PC - PC*

PSI-PSI*

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Ondes

sous la direction de

JEAN - MARIE BRÉBEC
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Saint - Louis à Paris

JEAN - NOËL BRIFFAUT
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Descartes à Tours

PHILIPPE DENÈVE
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Henri - Wallon à Valenciennes

THIERRY DESMARAIS
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Vaugelas à Chambéry

ALAIN FAVIER
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Champollion à Grenoble

MARC MÉNÉTRIER
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Thiers à Marseilles

BRUNO NOËL
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Champollion à Grenoble

CLAUDE ORSINI
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Dumont - d'Urville à Toulon

2de année

PC - PC*

PSI-PSI*



HACHETTE
Supérieur

Lời nói đầu

Bộ sách này viết theo chương trình mới của các lớp dự bị đại học, bắt đầu áp dụng vào dịp khai trường tháng 9/1995 đối với các lớp năm thứ nhất MPSI, PCSI và PTSI, và khai trường tháng 9/1996 đối với các lớp năm thứ hai MP, PC, PSI.

Phù hợp với tinh thần của chương trình mới, bộ sách này đề xuất một sự đổi mới trong việc giảng dạy các môn vật lí và hóa học ở các lớp dự bị.

• Trái với một truyền thống đã ăn sâu bén rễ, theo nó thì vật lí học bị hạ xuống hàng một môn học phụ của toán học, các hiện tượng chỉ được khảo sát ở khía cạnh tính toán, các tác giả đã tìm cách đặt toán học vào đúng vị trí của nó, dành ưu tiên cho sự suy nghĩ và biện luận vật lí, và nhấn mạnh các tham số có ý nghĩa và các quan hệ gắn bó chúng với nhau.

• Vật lí học là một khoa học thực nghiệm và phải được giảng dạy với tư cách là như vậy. Các tác giả đã đặc biệt chăm lo việc mô tả các thiết bị thí nghiệm, mà không coi nhẹ khía cạnh thực hành. Mong rằng sự cố gắng của họ sẽ thúc đẩy các giáo sư và các học sinh nâng cao các hoạt động thực nghiệm, hoặc thúc đẩy họ thực hiện các hoạt động đó, chúng bao giờ cũng có tác dụng đào tạo rất lớn.

• Vật lí học không phải là một môn khoa học tách rời thực tế, chỉ chăm lo những tư liệu không liên quan đến thực tế công nghệ. Mỗi khi đề tài cho phép, các tác giả đã dành một vị trí rộng rãi cho các ứng dụng khoa học hoặc công nghiệp, nhằm gây hứng thú cho các nhà nghiên cứu và các kĩ sư tương lai.

• Vật lí học không phải là một môn khoa học cách li và bất biến, nó là sản phẩm của một thời đại và không tự tách khỏi phạm vi hoạt động của con người. Các tác giả đã không coi nhẹ sự viện dẫn về lịch sử các khoa học để mô tả sự tiến triển của các mô hình lí thuyết, cũng như để đặt lại các thí nghiệm vào đúng ngữ cảnh của chúng.

Nhóm tác giả do Jean-Marie BRÉBEC điều phối, bao gồm những giáo sư các lớp dự bị rất có kinh nghiệm, nắm được một thực tiễn lâu dài về các kì thi tuyển sinh vào các trường đại học, và có uy tín khoa học được mọi người công nhận. Nhóm tác giả này đã giữ quan hệ chặt chẽ với các tác giả của bộ sách của DURANDEAU và DURUPTHY viết cho các lớp cấp hai các trường trung học. Như vậy các sách cho các lớp dự bị tiếp nối một cách hoàn hảo các sách cho các lớp trung học, về hình thức cũng như về tinh thần.

Chắc chắn rằng các sách này là những công cụ hữu ích đối với sinh viên để luyện thi có hiệu quả, cũng như để thu nhận được một trình độ khoa học vững chắc.

J.P. DURANDEAU

Sau khi khảo sát đầy đủ các chuỗi dao động tử kết hợp, với sự chuyển tiếp sang một môi trường liên tục (phép tính gần đúng cho bước sóng lớn) để thu được phương trình D'ALEMBERT, sách này đề cập đến:

• sự truyền các dao động ngang trên một sợi dây, để làm rõ những nghiệm tổng quát của phương trình D'ALEMBERT, với những định nghĩa quan trọng về sóng phẳng, sóng phẳng chạy, sóng phẳng chạy đơn sắc, sóng dừng, ... ;

• sự truyền sóng điện trên một dây cáp đồng trục (phần này không có tường minh trong chương trình, nhưng là nguồn gốc của nhiều đề thi tuyển sinh hàng năm), để rút ra các khái niệm tổng quát về tổng trở của sóng đặc trưng, về sự truyền công suất, về các điều kiện biên.

Các khái niệm này (tổng trở, điều kiện biên, truyền năng lượng) được áp dụng cho sự truyền sóng âm (và siêu âm), bằng cách làm lộ rõ sự tương tự của các phương trình đã gặp (các biến và các phương trình liên kết).

Các công cụ đã triển khai sẽ cho phép khảo sát một cách tổng quát các sóng điện từ (SĐT) trong chân không. Sự tồn tại của chúng gắn liền với các tính chất của trường điện từ bức xạ bởi một lưỡng cực dao động.

Dựa trên thí dụ về sự truyền sóng điện từ trong một môi trường dẫn điện, sách này sẽ khảo sát các khái niệm tán sắc và hấp thụ, và không quên các khái niệm vận tốc pha, vận tốc nhóm (vận tốc truyền của một bó sóng).

Tất cả các công cụ kể trên cho phép đề cập sự truyền SĐT trong một điện môi và các điều kiện biên, cùng với việc khảo sát sự phản xạ va sự truyền qua của một sóng ở mặt một lưỡng chất. Trong chương trình chỉ xét trường hợp sóng tới pháp tuyến, nhưng để mở rộng thêm, sách này đề cập cả trường hợp sóng tới bất kì (các định luật DESCARTES).

Mục lục

DAO ĐỘNG TỬ LIÊN KẾT - NHẬP MÔN VỀ SỰ TRUYỀN SÓNG

1

Mở đầu

Hiện tượng truyền sóng là một hiện tượng rất tổng quát. Tầm quan trọng thực tiễn của nó là rất to lớn, vì nó là cơ sở cho nhiều trường hợp truyền thông tin.

Chúng ta hàng ngày phải đối mặt với một số hiện tượng đó : sự truyền âm, truyền ánh sáng, truyền sóng vô tuyến điện, ...

Trong sách này, chúng tôi sẽ mô tả vài trường hợp vật lí trong đó hiện tượng lan truyền được thể hiện. Trong chương này, chúng tôi đề cập hiện tượng đó bằng một mô hình sơ đẳng : chuỗi các dao động tử liên kết.

MỤC TIÊU

■ Hệ quả của một sự liên kết các dao động tử.

■ Khảo sát trong chế độ tự do và trong chế độ cưỡng bức.

■ Sự tiếp cận đầu tiên với hiện tượng lan truyền.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

■ Các dao động tử cơ học có một biến số trạng thái.

■ Các chế độ tự do và cưỡng bức.

1 Dao động tự do của các dao động tử liên kết

1.1. Dao động tự do của một hệ có một bậc tự do

1.1.1. Dao động tử điều hòa

Xét một hệ chỉ có một bậc tự do, chúng ta kí hiệu ψ là đại lượng biến thiên theo thời gian. Đại lượng ψ có thể chỉ một sự dịch chuyển, một góc, một dòng điện, một điện áp, một điện tích, v.v...

Nếu hệ này có một vị trí cân bằng bền $\psi = \psi_0$, ở lân cận vị trí đó phương trình của biến thiên có dạng :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega_0^2(\psi - \psi_0),$$

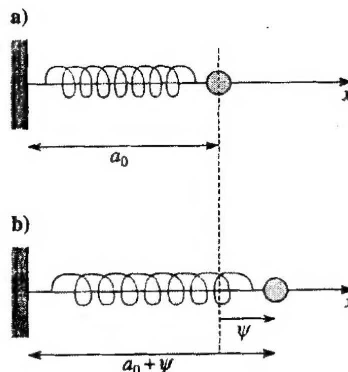
thì ta quan sát được những dao động điều hòa có mạch số ω_0, thuộc loại :

$$\psi(t) = \psi_0 + \psi_m \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Trạng thái này nói chung chỉ là một sự mô hình hóa của thực tế.

• Phương trình của biến thiên tuyến tính nhiều khi chỉ là một sự gần đúng ứng với sự tuyến tính hóa phương trình thật của sự biến thiên của ψ_1 ở lân cận vị trí cân bằng $\psi = \psi_0$. Trong một số trường hợp phương trình thật không là tuyến tính ngay cả đối với những chuyển động nhỏ.

• Nghiệm thu được ứng với một chuyển động vĩnh cửu. Trong thực tế chúng ta gặp những trường hợp có vai trò của những yếu tố phân tán, chẳng hạn như sự ma sát thủy động. Nghiệm này khi đó chỉ có thể chấp nhận được đối với những thời gian quan sát các dao động (có chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$) nhỏ so với thời gian đặc trưng của sự tắt dần. Điều này giả định một thừa số phẩm chất cao đối với dao động tử được khảo sát.



H.1. *Dao động tử cơ học.*
a. *Cân bằng.*
b. *Ngoài cân bằng.*

1.1.2. Dao động tử cơ học có hồi phục tuyến tính

Xét một động tử khối lượng *M*, gắn vào một lò xo có độ cứng *K*, bị buộc phải trượt không ma sát dọc theo một thanh ngang (*h*.1). Vị trí nghỉ tại đó chiều dài của lò xo là a_0 được lấy làm gốc của trục (Ox) ; độ dịch chuyển của động tử so với vị trí cân bằng đó là $\psi(t)$.

Trong hệ quy chiếu giả định là hệ Galilée, phương trình chuyển động là :

$$M\frac{d^2\psi}{dt^2} = -K\psi$$

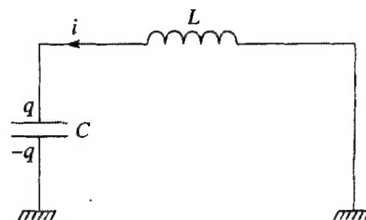
nó dẫn đến những dao động điều hòa có mạch số $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$.

1.1.3. Dao động tử điện học

Hình 2 biểu diễn cái tương đương điện học của dao động tử cơ học ở *hình* 1. Khối lượng *M* và độ cứng *K* được thay thế lần lượt bởi độ tự cảm *L* và nghịch đảo của điện dung *C*.

Áp dụng định luật các mạng cho mạch điện, ta được :

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \text{ với } i = +\frac{dq}{dt}$$



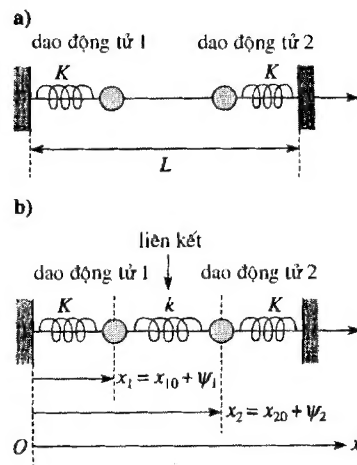
H.2. *Dao động tử điện học.*

Sự biến thiên điện tích q tuân theo phương trình vi phân :

$$\ddot{q} + \Omega_0^2 q = 0,$$

trong đó $\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ là cái tương tự của mạch số của dao động tử cơ học :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}.$$



H.3. *Thí dụ về sự liên kết giữa hai dao động tử như nhau.*
a. *độc lập.*
b. *liên kết.*

1.2. Dao động tự do của một hệ có hai bậc tự do

Bây giờ ta khảo sát những hệ quả của việc đưa một liên kết vào giữa hai dao động tử giống như dao động tử nói trên.

1.2.1. Sự liên kết của hai dao động tử

Xét hệ biểu diễn trên *hình* 3 : hai động tử như nhau có khối lượng M trượt không ma sát dọc theo trục (Ox).

Khi không có lò xo ở giữa, hai động tử gắn với các thành cố định bằng các lò xo có độ cứng K và độ dài không tải a_0, tạo thành hai dao động tử độc lập có cùng tần số $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$.

Chúng ta viết các lực mà các động tử phải chịu từ phía các lò xo, chú ý đến lò xo ở giữa có độ cứng k và độ dài không tải b_0, và chọn gốc O trên thành bên trái. ·

Động tử thứ nhất chịu tác dụng của các lực :

$$\vec{F}_1 = -K(x_1 - a_0)\vec{e}_x \qquad \text{và} \qquad \vec{f}_1 = K((x_2 - x_1) - b_0)\vec{e}_x,$$

Động tử thứ hai chịu tác dụng của :

$$\vec{f}_2 = -\vec{f}_1 \qquad \text{và} \qquad \vec{F}_2 = K((L - x_2) - a_0)\vec{e}_x.$$

Vậy các phương trình biến thiên là :

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 = -K(x_1 - a_0) + k(x_2 - x_1 - b_0) \\ M\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - b_0) + K(L - x_2 - a_0). \end{cases}$$

Chúng ta kí hiệu $\psi_1 = x_1 - x_{10}$ và $\psi_2 = x_2 - x_{20}$ là những độ dịch chuyển của hai động tử so với *vị trí của chúng khi cân bằng*, có hoành độ tương ứng là x_{10} và x_{20}.

Các phương trình biến thiên trở thành :

$$\begin{cases} M\ddot{\psi}_1 = -K\psi_1 - k(\psi_1 - \psi_2) \\ M\ddot{\psi}_2 = k(\psi_1 - \psi_2) - K\psi_2 \end{cases}$$

Lò xo ở giữa lập ra một sự liên kết giữa hai động tử : chuyển động của hai khối lượng không còn là độc lập nữa.

1.2.2. Nghiệm của các phương trình chuyển động

Đối với hệ vi phân "đối xứng" này, sự thay đổi biến số : $u = \psi_1 + \psi_2$ và $v = \psi_1 - \psi_2$, gọi là các tọa độ chuẩn, cho phép viết các phương trình tách riêng :

$$\begin{cases} M\ddot{u} = -Ku \\ M\ddot{v} = -(K + 2k)v \end{cases}$$

mà các nghiệm $u(t)$ và $v(t)$ là dao động và có dạng :

$$\begin{cases} u(t) = u_m \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ v(t) = v_m \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} u(t) = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t \\ v(t) = C\cos\omega_2 t + D\sin\omega_2 t \end{cases}$$

Các tần số ω_1 và ω_2 là $\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{K}{M}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{K+2k}{M}} \end{cases}$.

Biết các vị trí và vận tốc ban đầu của hai động tử : $\psi_{1(0)}$, $\psi_{2(0)}$, $\left(\dfrac{d\psi_1}{dt}\right)_{(0)}$, $\left(\dfrac{d\psi_2}{dt}\right)_{(0)}$, chúng ta xác định hoàn toàn được $\psi_1(t)$ và $\psi_2(t)$. Chúng được viết thành :

$$\begin{cases} \psi_1(t) = \dfrac{u_m}{2}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \dfrac{v_m}{2}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ \psi_2(t) = \dfrac{u_m}{2}\cos(\omega_1 t + \phi_1) - \dfrac{v_m}{2}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

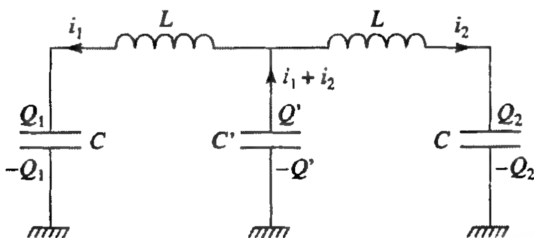
Áp dụng 1

Sự tương tự điện - cơ

1) *Chứng minh rằng sơ đồ điện (h.4) mô hình hóa một hệ thống điện liên kết tương tự như hệ của hai dao động tử cơ học ở trên.*

2) *Tóm tắt bằng một bảng những sự tương ứng giữa các đại lượng liên quan đến các dao động tử điện và cơ học.*

1) Giống như ở §**1.1.3**, chúng ta đã xây dựng (h.4) một sự tương tự của hệ [*K*–*M*–*k*–*M*–*K*] dưới dạng [*C*–*L*–*C*'–*L*–*C*].



H.4. *Các dao động tử điện liên kết.*

Các phương trình biến thiên của hệ là :

$$\begin{cases} L\dfrac{di_1}{dt} = \dfrac{Q'}{C'} - \dfrac{Q_1}{C} \\ L\dfrac{di_2}{dt} = \dfrac{Q'}{C'} - \dfrac{Q_2}{C} \end{cases}$$

với : $i_1 = \dfrac{dQ_1}{dt}$, $i_2 = \dfrac{dQ_2}{dt}$

và : $i_1 + i_2 = -\dfrac{dQ'}{dt}$.

Khi cân bằng thì $i_1 = i_2 = 0$ và các điện tích của các tụ điện kí hiệu là Q_{10}, Q'_0 và Q_{20} nghiệm đúng :

$$\frac{Q_{10}}{C} = \frac{Q'_0}{C'} = \frac{Q_{20}}{C}.$$

Định luật các nút và sự bảo toàn điện tích chứng tỏ rằng điện tích tổng $Q_1 + Q' + Q_2$ là không đổi và bằng $Q_{10} + Q'_0 + Q_{20}$.

Các chênh lệch điện tích $q_1 = Q_1 - Q_{10}$ và $q_2 = Q_2 - Q_{20}$ $(q' = Q' - Q'_0 = -q_1 - q_2)$ nghiệm đúng hệ vi phân các phương trình liên kết :

$$\begin{cases} L\ddot{q}_1 = -\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right)q_1 - \left(\frac{1}{C'}\right)q_2 \\ L\ddot{q}_2 = -\left(\frac{1}{C'}\right)q_1 - \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right)q_2 \end{cases}$$

Hệ này là tương đương về mặt hình thức với hệ thu được trước đây bằng cách đồng nhất hóa sự chênh lệch điện tích q_1 với độ dịch chuyển ψ_1 của khối lượng thứ nhất so với vị trí cân bằng, và đồng nhất hóa q_2 với $-\psi_2$ (dấu trừ xuất hiện bởi vì sự dư thừa điện tích trên tụ điện cuối cùng tương ứng trong cơ học với một sự nén của lò xo thứ hai so với vị trí cân bằng của nó).

2) Không cần tính toán thêm, có thể đề xuất bảng tương ứng trên hình 5.

các dao động tử liên kết	đặc trưng	độ lệch so với cân bằng	các tần số riêng
cơ học	M, K, k	ψ_1, ψ_2	$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ $\omega_2 = \sqrt{\frac{K+2k}{M}}$
điện học	L, $\frac{1}{C}$, $\frac{1}{C'}$	q_1, $-q_2$	$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ $\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{L}\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C'}\right)}$

H.5. *Sự tương tự điện – cơ.*

1.2.3. Mạch số riêng và kiểu dao động riêng

Các mạch số ω_1 và ω_2 được gọi là các *mạch số riêng* của hệ các dao động tử liên kết.

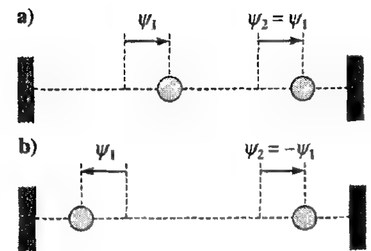
Hệ có thể dao động với mạch số ω_1 nếu $v(t) = 0$, tức là khi $\psi_1(t) = \psi_2(t)$. Trong trường hợp này ta có một *kiểu dao động* riêng với mạch số ω_1. Ứng với kiểu này là những độ dịch chuyển như nhau của cả hai động tử. Đây là một kiểu dao động đối xứng (*h*.6a).

Hệ cũng có thể dao động với mạch số ω_2 nếu $u(t) = 0$; tức là $\psi_1(t) = -\psi_2(t)$. Khi đó ta có *kiểu dao động riêng* với mạch số ω_2. Đó là một kiểu dao động phản đối xứng (*h*.6b).

Nghiệm tổng quát của *hệ tuyến tính* các phương trình chuyển động là một *tổ hợp tuyến tính* của hai kiểu dao động riêng đó :

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \frac{u_m}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{v_m}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\cos(\omega_2 t + \phi_2).$$

Muốn quan sát riêng biệt một trong các kiểu dao động đó, thí dụ kiểu dao động đối xứng, ta phải có $v(t) = 0$. Có thể bảo đảm điều đó bằng những điều kiện ban đầu có dạng $v(t) = 0$ và $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(0)} = 0$, tức là khi hệ được kích thích lúc ban đầu theo kiểu dao động đối xứng.



H.6. *Các dao động tử liên kết như nhau.*
a. *Kiểu dao động đối xứng.*
b. *Kiểu dao động phản đối xứng.*

- **Các chuyển động của một hệ (bền) mà sự diễn biến được mô tả bởi một hệ vi phân tuyến tính là kết quả sự chồng chập của các chuyển động ứng với các kiểu dao động riêng của hệ.**
- **Các kiểu dao động riêng này là những trạng thái dao động ở đó mọi yếu tố của hệ đều thực hiện một chuyển động dao động mà tần số là một tần số riêng của hệ.**
- **Nếu hệ được kích thích lúc ban đầu theo một trong các kiểu dao động riêng của nó, nó sẽ tiếp tục dao động theo kiểu đó.**

Chú ý :

• *Phương pháp chúng ta vừa sử dụng là một phương pháp tổng quát, và có thể được mở rộng ra các hệ vi phân tuyến tính khác, mô tả sự tiến triển của các hệ vật lí có nhiều bậc tự do, thí dụ như N dao động tử liên kết.*

• *Một cách tổng quát hơn, việc tìm kiếm những nghiệm tỉ lệ với e^{rt} (thay cho $e^{j\omega t}$) cho phép xác định một tập hợp các nghiệm r phức. Hệ là bền khi tất cả các giá trị riêng r có một phần thực âm.*

Áp dụng 2

Sự tìm kiếm các tần số riêng một cách có hệ thống

Hệ tuyến tính các phương trình vi phân liên kết :

$$\begin{cases} M\ddot{\psi}_1 = -K\psi_1 - k(\psi_1 - \psi_2) \\ M\ddot{\psi}_2 = k(\psi_1 - \psi_2) - K\psi_2 \end{cases}$$

xác định sự biến thiên của hai dao động tử liên kết.

Đối với hệ này, người ta chờ đợi quan sát được các dao động.

1) *Biện luận sự tồn tại và dạng của các độ dịch chuyển $\psi_1(t)$ và $\psi_2(t)$, là các nghiệm dao động có tần số ω cần xác định (dùng cách kí hiệu phức : $\underline{\psi}_1(t) = \underline{\psi}_{10}e^{i\omega t}$ và $\underline{\psi}_2(t) = \underline{\psi}_{20}e^{i\omega t}$).*

2) *Ở thời điểm ban đầu, cả hai động tử đều không có vận tốc ở các vị trí $\psi_1(0) = \psi_0$ và $\psi_2(0) = 0$. Hãy xác định $\psi_1(t)$ và $\psi_2(t)$, từ đó rút ra một cách định tính các chuyển động của hai động tử trong trường hợp liên kết yếu $k \ll K$.*

1) Các nghiệm được đề nghị tương thích với hệ vi phân trên nếu :

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \dfrac{K+k}{M}\right)\underline{\psi}_{10} - \left(\dfrac{k}{M}\right)\underline{\psi}_{20} = 0 \\ -\left(\dfrac{k}{M}\right)\underline{\psi}_{10} + \left(-\omega^2 + \dfrac{K+k}{M}\right)\underline{\psi}_{20} = 0 \end{cases}$$

Muốn có được một nghiệm khác với nghiệm tầm thường $\{\underline{\psi}_{10} = 0 ; \underline{\psi}_{20} = 0\}$, định thức của hệ thuần nhất này phải bằng không :

$$\left(-\omega^2 + \frac{K+k}{M}\right)^2 - \left(\frac{k}{M}\right)^2 = 0.$$

Các nghiệm dương của phương trình trùng phương này là các tần số ω_1 và ω_2 đã thu được trước đây.

Nếu đưa giá trị $\omega = \omega_1$ vào hệ thuần nhất, chúng ta được $\underline{\psi}_{10} = \underline{\psi}_{20}$.

Trong cách kí hiệu thực, các chuyển động tương ứng có dạng :

$$\begin{cases} \psi_1 = \dfrac{u_m}{2}\cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ \psi_2 = \dfrac{u_m}{2}\cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{cases}$$

Cũng như vậy, nếu $\omega = \omega_2$ thì $\underline{\psi}_{10} = -\underline{\psi}_{20}$ và các dao động tần số ω_2 có dạng :

$$\begin{cases} \psi_1 = \dfrac{v_m}{2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \psi_2 = -\dfrac{v_m}{2}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

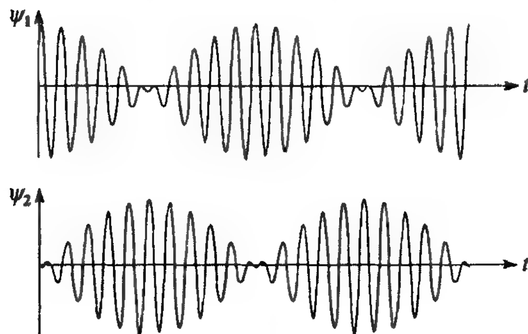
Vậy các nghiệm của hệ vi phân tuyến tính các phương trình chuyển động có thể viết thành :

$$\begin{cases} \psi_1 = \dfrac{u_m}{2}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \dfrac{v_m}{2}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ \psi_2 = \dfrac{u_m}{2}\cos(\omega_1 t + \phi_1) - \dfrac{v_m}{2}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

Chúng ta thấy lại ở đây những kết quả trước đây, bằng cách sử dụng tính đối xứng – đáng chú ý nhưng chỉ là ngẫu nhiên – của hệ phương trình vi phân quy định sự biến thiên của các động tử liên kết.

2) Với những điều kiện ban đầu đã nêu lên, chúng ta tìm thấy :

$$\begin{cases} \psi_1(t) = \dfrac{\psi_0}{2}[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \\ \qquad = \psi_0 \cos\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) \\ \psi_2(t) = \dfrac{\psi_0}{2}[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \\ \qquad = \psi_0 \sin\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right) \end{cases}$$



H.7. *Làm lộ rõ hiện tượng phách.*

Khi liên kết là yếu, các tần số :

$$\Omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

và $$\omega = \frac{\omega_2-\omega_1}{2}$$

rất khác nhau :

$$\Omega \approx \omega_1 \approx \omega_2 \gg \omega$$

Các nghiệm :

$$\psi_1(t) = \psi_0 \cos(\Omega t)\cos(\omega t)$$

và $$\psi_2(t) = \psi_0 \sin(\Omega t)\sin(\omega t)$$

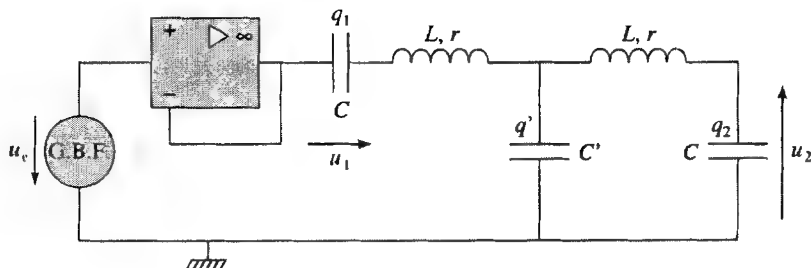
khi đó dao động "nhanh" theo tần số Ω, biên độ của chúng dao động chậm theo một chu kì bằng $\dfrac{\pi}{\omega}$.

Hình 7 biểu diễn những biến thiên đó và làm lộ rõ hiện tượng phách. Năng lượng không đổi đối với hệ lí tưởng hóa này, luân phiên được tích lũy vào cái này hoặc cái kia trong số hai dao động tử liên kết.

▶ **Để luyện tập : Các bài tập 5 và 7.**

1.2.4. Dùng thực nghiệm làm lộ rõ các kiểu dao động riêng

Để quan sát riêng rẽ hai kiểu dao động vừa mô tả, ta có thể thực hiện mạch điện của *hình 8*. Trên sơ đồ này, chúng ta nhận thấy cái tương tự điện học của hệ hai động tử liên kết đã khảo sát trong *Áp dụng 1*. Một sự liên kết yếu được thực hiện bởi một tụ điện có điện dung *C' lớn hơn C* khoảng 5 lần.



H.8. *Làm lộ rõ bằng thực nghiệm các kiểu dao động riêng :* L = 10mH ; $r = 2\Omega$; C = 220nF ; C' = 1μF.

Mạch này có những nguồn yếu gây tắt dần, chủ yếu do điện trở trong của các cuộn dây. Nó là nơi diễn ra các dao động tắt dần. Để thỉnh thoảng khôi phục lại các dao động "tự do", chúng ta dùng một máy phát tín hiệu vuông góc có tần số rất nhỏ so với tần số của hai kiểu dao động riêng (*h*.9a).

Chú ý :

Máy phát tần số thấp (G.B.F) có tổng trở trong bằng 50 Ω ; cần thực hiện sự thích ứng tổng trở nhờ một mạch theo dõi để không đưa vào hệ các dao động tử một tác nhân làm tắt dần quá lớn. Nhưng với cơ cấu đó, phải lưu ý đừng chạm tới giới hạn của biên độ dao động, cụ thể là cường độ bão hòa ở đầu ra và vận tốc quét.

Chúng ta đồng bộ hóa nền thời gian của dao động kí theo tín hiệu vuông kích thích. Biểu đồ thời gian của các điện áp quan sát được u_e, u_1, u_2 được biểu diễn trên các *hình* 9a, 9b và 9c.

Ở đây, phương trình biến thiên của các điện tích là :

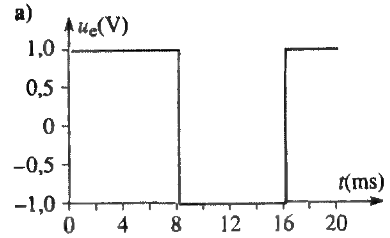
$$\begin{cases} L\ddot{q}_1 + r\dot{q}_1 + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right)q_1 + \left(\frac{1}{C'}\right)q_2 = u_e \\ L\ddot{q}_2 + r\dot{q}_2 + \left(\frac{1}{C'}\right)q_1 + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right)q_2 = 0 \end{cases}$$

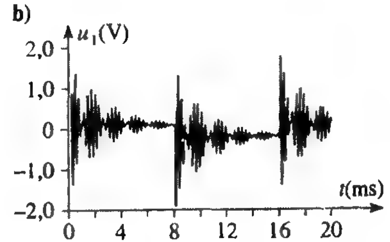
tức là :

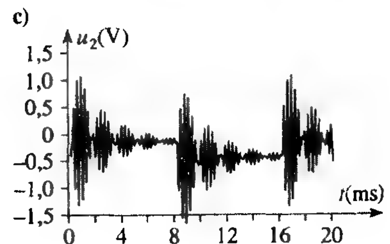
$$\begin{cases} L(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + r(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C'}\right)(q_1 + q_2) = u_e \\ L(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) + r(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \left(\frac{1}{C}\right)(q_1 - q_2) = u_e \end{cases}$$

Chúng ta quan sát được các kiểu dao động đối xứng và phản đối xứng của hệ với các biên độ tương đương. Máy phát tần số thấp, là nguồn của điện áp u_e, kích thích một hiện tượng phách tương tự như hiện tượng đã được mô tả ở *Áp dụng 2*. Chúng ta thấy thêm được sự tắt dần theo hàm mũ của các dao động, gây ra bởi các điện trở (nhỏ) của các cuộn dây.

Để quan sát riêng rẽ hai kiểu dao động, chúng ta có thể tổ hợp các điện áp $u_1 = \frac{q_1}{C}$ và $u_2 = \frac{q_2}{C}$ bằng hai mạch có khuếch đại thao tác : một mạch cộng (bộ đảo điện) và một mạch trừ (hoặc chỉ cần sử dụng các chức năng "cộng" và "trừ" của dao động kí, nếu nó có các chức năng đó). Các biểu đồ thời gian của các điện áp ra $-(u_1 + u_2)$ và $(u_1 - u_2)$ được biểu diễn trên các *hình* 10a và 10b. Chúng phù hợp tốt với các chế độ tự do của các dao động tử điều hòa tắt dần nhẹ.





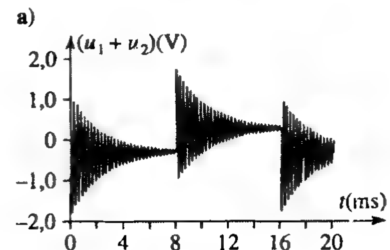


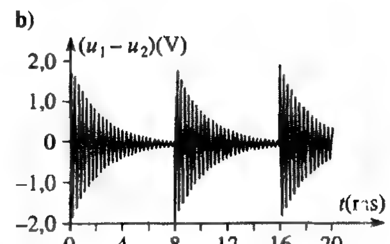
H.9. *Hiển thị các kiểu dao động riêng.*

a. *Điện áp* u_e.

b. *Điện áp* $u_1 = \frac{q_1}{c}$.

c. *Điện áp* $u_2 = \frac{q_2}{c}$.





H.10. *Hiển thị các kiểu dao động riêng :*

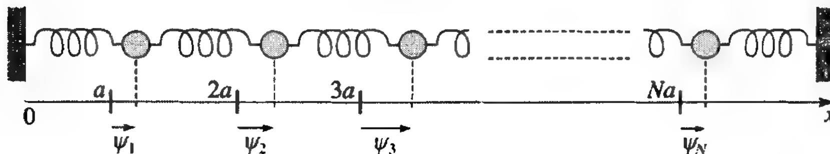
a. *"Tổng" các điện áp :* $-[u_1 + u_2]$.

b. *Hiệu các điện áp :* $u_1 - u_2$.

1.3. Chuyển động của *N* dao động tử liên kết

Sau khi đã đề cập các trường hợp một hoặc hai dao động tử, chúng ta sẽ thừa nhận sự tổng quát hóa các kết quả thu được cho trường hợp N dao động tử liên kết (chúng ta sẽ trở lại vấn đề này trong *Áp dụng 3*).

Sự khảo sát N dao động tử kết hợp *như nhau* (*h.*11) làm xuất hiện *N* kiểu dao động riêng, tất cả đều có tần số khác nhau : các chuyển động quan sát được là sự chồng chập của *N* kiểu dao động riêng đó của chuỗi các dao động tử.

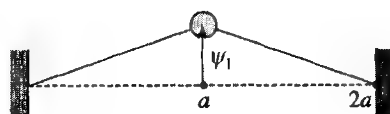


H.11. *N dao động tử liên kết.*

Chúng ta biểu diễn dao động của các hệ đó trên một đồ thị :

– vị trí cân bằng $x_{0n} = na$ của khối lượng thứ n đặt trên trục hoành ;

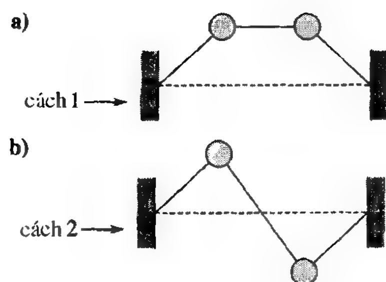
– độ dịch chuyển ψ_n của nó đặt trên trục tung (mặc dù các chuyển động được khảo sát là chuyển động dọc) (*h*.12).



TL.12. $N = 1$.

• Đối với $N = 1$ (*h*.12), động tử duy nhất thực hiện các dao động điều hòa với tần số $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{2K}{M}}$ (sự có mặt của 2 lò xo gắn với động tử giải thích sự có mặt của thừa số 2).

• Đối với $N = 2$ (*h*.13), với 3 lò xo có cùng một độ cứng, tần số của hai dao động riêng là $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{K}{M}}$ và $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{3K}{M}}$. Các kiểu dao động riêng 1 và 2 ứng với các dao động tương ứng đối xứng và phản đối xứng của hai động tử.



H.13. $N = 2$.
a. *Cách* 1. **b.** *Cách* 2.

• Trường hợp $N = 3$ sẽ được khảo sát trong *bài tập* 3.

• Việc xác định các tần số riêng đối với N bất kì sẽ là đối tượng của *Áp dụng 3*. Lúc này chúng ta hãy tạm nêu lên các kết quả. *Hình 14* tóm tắt các kết quả đối với $N = 1$ và $N = 2$, sau đó cho biết sự mở rộng các kết quả cho các trường hợp $N = 3$ và N bất kì.

	cách 1	**cách 2**	**cách 3**	**...**	**cách 4**
$N = 1$					
$N = 2$				...	
$N = 3$				...	
...	...	...	...	...	...
N				...	

H.14. *Những dịch chuyển ảo của các động tử, tùy theo số lượng các dao động tử liên kết.*

2 Dao động cưỡng bức của các dao động tử liên kết

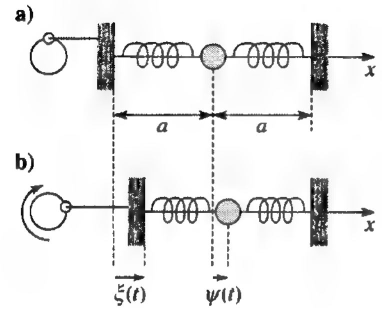
2.1. Đáp ứng của một hệ tuyến tính bền

■ Hệ tuyến tính

Chúng ta muốn khảo sát đáp ứng của một hệ có N biến số đối với một sự kích thích được áp đặt. Sự kích thích là một tín hiệu vật lí phân tích được

thành một tổng các hợp phần điều hòa có tần số ω : tổng gián đoạn (chuỗi FOURIER) trong trường hợp một kích thích tuần hoàn, hoặc liên tục (biến đổi FOURIER) trong trường hợp khác.

Đáp ứng của một hệ tuyến tính (hoặc chí ít là có thể tuyến tính hóa) đối với kích thích đó sẽ là *sự chồng chập* của các đáp ứng thu được, đối với mỗi thành phần điều hòa của kích thích, xét một cách riêng rẽ. Như vậy trong phần sau đây chúng ta chỉ biện luận về *đáp ứng của hệ đối với một kích thích thường xuyên dạng sin.*



H.15. *Dao động tử duy trì.*
a. *Nghỉ.*
b. *Chuyển động.*

■ Hệ bền

Hơn nữa, chúng ta chỉ quan tâm đến những hệ bền : hệ này phải được kích thích để bắt đầu biến thiên. Sự bền vững đó cho phép chúng ta có thể ở lại nguyên trong một miền biến thiên tuyến tính.

■ Các số hạng tiêu tán

Những hệ ta sẽ khảo sát sẽ được lí tưởng hóa trong một thời gian đầu : Chúng ta sẽ bỏ qua các hiện tượng tiêu tán.

Trong thực tiễn, các hiện tượng đó luôn luôn tồn tại, dù là rất yếu. Đặc biệt chúng nổi rõ khi hệ chịu một sự kích thích dạng sin, bởi một chế độ chuyển tiếp trong một thời gian hữu hạn. Sau đó chúng ta sẽ quan tâm đến đáp ứng của hệ theo một chế độ vĩnh cửu dạng sin *đã được thiết lập.*

2.2. Hệ dao động có một bậc tự do

2.2.1. Sự cộng hưởng của dao động tử lí tưởng

Dao động tử có một bậc tự do ở *hình* 15 được kích thích bởi một hệ thống trục biên – tay quay, tạo ra một độ dịch chuyển có dạng $\xi(t)$ của một trong các điểm nối. Kí hiệu độ dài không tải của các lò xo là a_0, phương trình biến thiên của nó là :

$$M\ddot{\psi} = -K(a+\psi-\xi-a_0)+K(a-\psi-a_0),$$

tức là : $M\ddot{\psi}+2K\psi = K\xi$.

Lực kích thích $F(t) = K\xi(t)$ là *lực phụ* tác dụng vào động tử do sự dịch chuyển của điểm nối của lò xo bên trái. Do đó, phương trình chuyển động là :

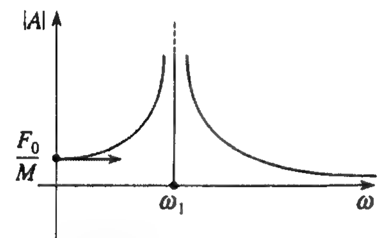
$$\ddot{\psi}+\omega_1^2\psi = \frac{F(t)}{M} \text{ với } \omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{M}}.$$

Ở chế độ vĩnh cửu dạng sin, sự đáp ứng $\psi(t)$ (đáp ứng về tần số của dao động tử điều hòa lí tưởng) có dạng :

$$\psi(t) = A(\omega)\cos[\omega t+\varphi(\omega)]$$

với $A(\omega) = \dfrac{F_0}{M}\dfrac{1}{\omega_1^2-\omega^2}$ và $\varphi = 0$.

Những biến thiên của môđun $|A|$ của biên độ tùy theo tần số ω của lực kích thích làm xuất hiện một sự cộng hưởng đối với $\omega = \omega_1$ (*h*.16).



H.16. *Biên độ (môđun) dao động của dao động tử lí tưởng.*

2.2.2. Những hạn chế của sự cộng hưởng

Sự phân kì của biên độ dao động khi có cộng hưởng thực ra bị hạn chế do phải tính đến nhiều giới hạn khác nhau của mô hình đã dùng :

• sự tồn tại những ma sát (thí dụ : ma sát thủy động) mà ta không thể bỏ qua được nữa khi biên độ (và do đó : vận tốc) trở nên rất lớn ;

• những hạn chế của mô hình tuyến tính : sự hoạt động bên ngoài các giới hạn mà lò xo có thể được coi là thuần túy đàn hồi, sự tồn tại của các thành.

Những hạn chế do ma sát thủy động dẫn đến phương trình chuyển động sau đây :

$$\ddot{\psi} + \frac{\omega_1}{Q}\dot{\psi} + \omega_1^2\psi = \frac{F(t)}{M},$$

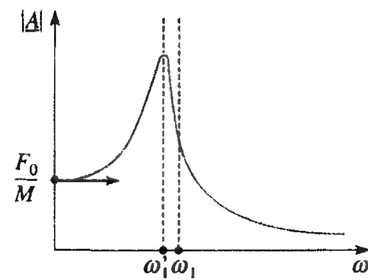
trong đó Q chỉ hệ số phẩm chất của dao động tử, được giả định là khá cao.

Ở chế độ vĩnh cửu dạng sin, chúng ta sử dụng cách kí hiệu phức để biểu diễn lực $F(t) = F_0\cos(\omega t) = \mathcal{R}e(F_0 e^{j\omega t})$. Sự đáp ứng tương ứng có dạng $\psi(t) = \mathcal{R}e(\underline{\psi}(t)) = \mathcal{R}e(\underline{A}(\omega)e^{j\omega t})$.

Môđun của biên độ phức $\underline{A}$ của sự dịch chuyển :

$$|\underline{A}| = \frac{F_0}{M}\frac{1}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2) + \left(\frac{\omega_1\omega}{Q}\right)^2}}$$

là cực đại (nhưng không vô hạn) đối với $\omega'_1 = \omega_1\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \neq \omega_1$ (*h.*17), nếu $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (điều kiện để có cộng hưởng).



H.17. *Biên độ các dao động của dao động tử thực khi có ma sát thủy động, tùy thuộc tần số kích thích ω.*

Đối với một dao động tử điều hòa thực, có một bậc tự do, có hệ số phẩm chất tốt, thì biên độ dịch chuyển của nó trở nên đáng kể khi tần số của kích thích gần bằng tần số riêng của nó.

2.3. Dao động cưỡng bức của một hệ có các bậc tự do bội

2.3.1. Hệ có hai bậc tự do

Chúng ta trở lại trường hợp hai dao động tử kết hợp như nhau, gắn với nhau bằng ba lò xo như nhau có độ cứng *K*, thành bên trái thực hiện những dao động ứng với $\xi(t) = \xi_0\cos\omega t$.

Các phương trình dao động của hai động tử là (*xem* §**1.2.1**) :

$$\begin{cases}\ddot{\psi}_1 + 2\omega_0^2\psi_1 - \omega_0^2\psi_2 = \frac{F_0}{M}\cos\omega t \\ \ddot{\psi}_2 + 2\omega_0^2\psi_2 - \omega_0^2\psi_1 = 0\end{cases} \quad \text{với } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Dùng các biến số chuẩn $u = \psi_1 + \psi_2$ và $v = \psi_1 - \psi_2$, chúng ta được :

$$\begin{cases}\ddot{u} + \omega_1^2 u = \frac{F_0}{M}\cos\omega t \\ \ddot{v} + \omega_2^2 v = \frac{F_0}{M}\cos\omega t\end{cases}$$

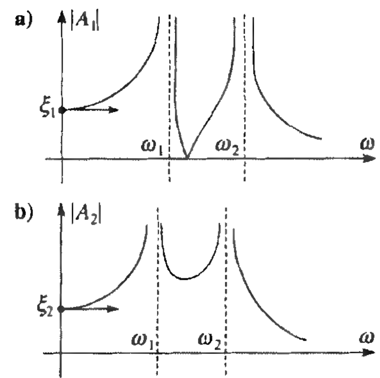
trong đó $\omega_1 = \omega_0$ và $\omega_2 = \omega_0\sqrt{3}$ là những tần số riêng của hệ.

Dạng sau cùng làm lộ rõ sự tồn tại của hai cộng hưởng đối với hệ có hai bậc tự do này. Chúng được tạo thành khi tần số kích thích trùng với một trong hai tần số riêng.

Có thể thu được biên độ dao động của các biến số u và v chỉ bằng cách đọc các phương trình chuyển động. Từ đó có thể rút ra biên độ dao động dạng $\sin\psi_1(t) = A_1(\omega)\cos\omega t$ và $\psi_2(t) = A_2(\omega)\cos\omega t$ của các động tử :

$$\begin{cases} A_1(\omega) = \dfrac{F_0}{2M}\left(\dfrac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \dfrac{1}{\omega_2^2 - \omega^2}\right) \\ A_2(\omega) = \dfrac{F_0}{2M}\left(\dfrac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \dfrac{1}{\omega_2^2 - \omega^2}\right) \end{cases}$$

Hình 18 biểu diễn biến thiên của các môđun của $A_1(\omega)$ và $A_2(\omega)$, tùy theo tần số kích thích. Trong trường hợp các dao động tử thực, nhưng có phẩm chất tốt, chúng ta thu được những giới hạn tương tự như đối với dao động tử đơn ở §**2.2** (*h.*19).



H.18. *Biên độ (môđun) dao động của hai động tử liên kết (trường hợp lí tưởng).*

a. $\xi_1 = \dfrac{F_0}{2M}\left(\dfrac{1}{\omega_1^2} + \dfrac{1}{\omega_2^2}\right)$.

b. $\xi_2 = \dfrac{F_0}{2M}\left(\dfrac{1}{\omega_1^2} - \dfrac{1}{\omega_2^2}\right)$.

▶ **Để luyện tập : Bài tập 2 và 6.**

2.3.2. Chuỗi dao động tử

Có thể mở rộng những khảo sát trên ra trường hợp một chuỗi N dao động tử liên kết như nhau.

Khi một tập hợp N dao động tử liên kết (có phẩm chất tốt) chịu một sự kích thích vĩnh cửu dạng sin có tần số ω, thì biên độ chuyển động của các dao động tử trở thành đáng kể khi tần số kích thích tiến đến gần một trong những tần số riêng của hệ.

Như trước đây, biên độ dao động giảm nhanh ngay sau khi tần số kích thích vượt quá tần số của kiểu dao động thứ N có tần số lớn nhất. Vượt ra ngoài tần số đó, sự biến dạng do kích thích gây ra hầu như không được chuỗi truyền đi. Sự khảo sát tiến hành ở §3 sẽ khẳng định sự tồn tại của một tần số cắt.

▶ **Để luyện tập : Bài tập 9.**

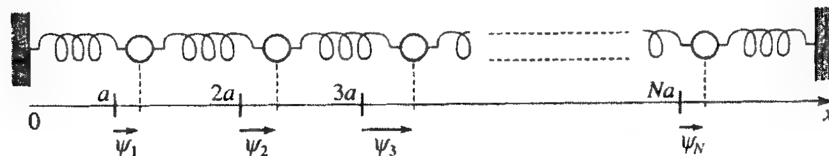
3 Tiếp cận đầu tiên với hiện tượng lan truyền

3.1. Hiện tượng lan truyền

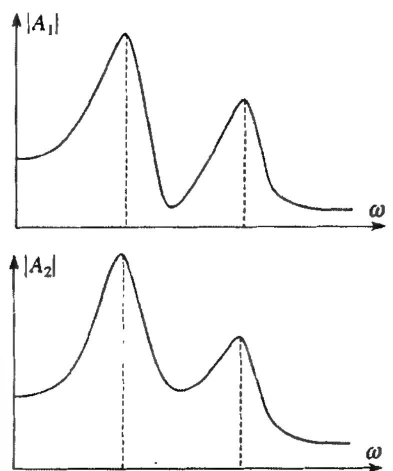
3.1.1. Sự lan truyền trong chuỗi dao động tử

Trong một chuỗi các dao động tử như nhau (*H.*20), phương trình chuyển động của động tử thứ N là :

$$M\ddot{\psi}_n = K\psi_{n-1} - 2K\psi_n + K\psi_{n-1}$$



H.20. *Chuỗi dao động tử.*



H.19. *Các biên độ (môđun) dao động của hai động tử liên kết (trường hợp thật).*

Chúng ta nhắc lại rằng ψ_n biểu diễn độ dịch chuyển của dao động tử "n", so với vị trí cân bằng của nó đánh dấu bằng chỉ số n.

Phương trình đó diễn tả sự liên kết của động tử thứ n với những động tử ở gần nó nhất.

Hãy tưởng tượng rằng động tử 1 tiến lên một chút nhờ lò xo nối kết, nó sẽ đẩy động tử 2, sau đó động tử 2 sẽ đẩy động tử 3, động tử 3 làm động tử 4 chuyển dịch v.v... Một sự biến dạng của chuỗi lò xo được chuyển tải từ động tử này sang động tử khác liền kề, dọc theo chuỗi : độ dịch chuyển của các động tử lan truyền dọc theo chuỗi các dao động tử liên kết.

Trong chuỗi các dao động tử liên kết, sự dịch chuyển của một động tử sinh ra một lực tác dụng lên những động tử ở gần nó nhất và làm chúng chuyển động. Những dịch chuyển của chúng sinh ra những lực mới, do đó lại sinh ra những dịch chuyển mới.

Sự biến dạng của các mối nối giữa hai động tử lân cận sẽ *lan truyền* từ gần ra xa trong chuỗi.

Đại lượng lan truyền đi (ở đây là độ dịch chuyển của các động tử trong chuỗi) là một *sóng*.

Sự tồn tại của hai đại lượng (độ dịch chuyển và lực) cái nọ sinh ra cái kia (các đại lượng liên kết) là cơ sở của các *hiện tượng truyền sóng*.

Chú ý :

Chuỗi các dao động tử có thể là một sự mô hình hóa sơ đẳng, một chiều, của sự lan truyền các dao động của các nguyên tử (hoặc iôn) trong một cấu trúc tinh thể.

3.1.2. Sự lan truyền trong vật lí học

Hiện tượng truyền sóng có mặt trong nhiều lĩnh vực của vật lí học : sự dịch chuyển các sóng trên mặt đại dương, sự truyền sóng âm, sóng điện từ, ...

Hiện tượng lan truyền một tín hiệu không chỉ giới hạn trong lĩnh vực ứng dụng của vật lí học "thuần túy" : động tác *hoan hô* lan truyền trên những dãy bậc ngồi của một sân vận động (*h*.21), sự lan truyền của một thông tin, là những thí dụ khác.

Chúng ta dự định khảo sát sự lan truyền của một hoặc nhiều đại lượng vật lí, chúng ta sẽ định nghĩa một vận tốc lan truyền. Muốn thế, chúng ta sẽ thành lập một phương trình đặc trưng cho sự lan truyền của đại lượng được khảo sát : *phương trình lan truyền*. Ở đây chúng ta sẽ thực hiện một sự tiếp cận các khái niệm đó bằng cách kéo dài thêm sự khảo sát chuỗi dao động tử liên kết.







H.21. *Sự diễn biến một động tác hoan hô trên sân vận động : mọi người vẫn ở tại chỗ, nhưng sóng truyền đi.*

3.2. Sóng trong chuỗi các dao động tử

3.2.1. Phương trình lan truyền

Sự lan truyền của một sóng được mô tả bởi phương trình tiến triển của nó, cũng được gọi là *phương trình lan truyền*.

Phương trình chuyển động của động tử thứ n :

$$M\ddot{\psi}_n = K\psi_{n-1} - 2K\psi_n + K\psi_{n+1}$$

có thể được gọi là *phương trình lan truyền* độ biến dạng của chuỗi dao động tử so với vị trí cân bằng.

3.2.2. Nghiệm điều hòa

Phương trình lan truyền độ biến dạng của chuỗi :

$$\ddot{\psi}_n = \omega_0^2(\psi_{n-1} - 2\psi_n + \psi_{n+1}) \text{ với } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

là một phương trình tuyến tính.

Vì chuỗi này được tạo thành bởi các dao động tử liên kết, chúng ta tìm xem có những nghiệm dao động dạng sin với tần số ω hay không. Chúng ta sử dụng cách kí hiệu phức và đặt :

$$\psi_n(t) = \mathscr{R}e(\underline{\psi}_n(t)) = \mathscr{R}e(\underline{A}_n e^{j\omega t}) \text{ với } \underline{A}_n = A_n e^{j\varphi}.$$

Vì biến số $\underline{\psi}_n(t)$ nghiệm đúng phương trình lan truyền nó dẫn tới hệ thức truy toán :

$$\omega_0^2 \underline{A}_{n+1} + (\omega^2 - 2\omega_0^2)\underline{A}_n + \omega_0^2 \underline{A}_{n-1} = 0.$$

Khi đi tìm $\underline{A}_n$ dưới dạng $\underline{A}_n = r^n$, phương trình đặc trưng gắn với hệ thức truy toán cho ta phương trình bậc hai sau đây :

$$\omega_0^2 r^2 + (\omega^2 - 2\omega_0^2)r + \omega_0^2 = 0$$

có biệt thức $\Delta = \omega^2(\omega^2 - 4\omega_0^2)$.

Các nghiệm r_1 và r_2 nghiệm đúng $r_1 r_2 = 1$.

Nếu Δ là dương (tức là $\omega > 2\omega_0$), các nghiệm là thực, một trong chúng lớn hơn 1. Khi đó ta được các nghiệm $\underline{A}_n$ là tổ hợp tuyến tính của r_1^n và r_2^n và là phân kì.

Điều này không thể chấp nhận được về mặt vật lí đối với một chuỗi vô hạn các dao động tử lí tưởng.

Biệt thức nhất thiết phải là âm, các tần số dao động tự do sẽ giới hạn trong miền : $0 < \omega < 2\omega_0$.

Đặt $\omega = 2\omega_0 \sin\frac{\phi}{2}$, với ϕ nằm trong khoảng 0 và π, phương trình đặc trưng có dạng :

$$r^2 - 2r\cos\phi + 1 = 0,$$

hai nghiệm của phương trình đặc trưng r_1 và r_2 liên hợp phức và có tích bằng 1, được viết thành :

$$r_{1,2} = e^{\pm j\phi} = e^{\pm jka},$$

bằng cách đặt $k = \frac{\phi}{a}$.

Vậy các sóng dạng sin truyền dọc theo chuỗi có dạng :

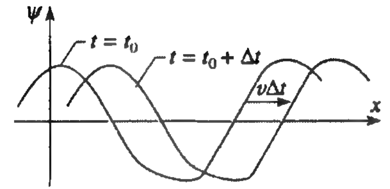
$$\underline{\psi}_n(t) = \underline{A}_+ e^{j(\omega t - nka)} + \underline{A}_- e^{j(\omega t + nka)}$$
$$= A_+ e^{j(\omega t - nka + \varphi_{0+})} + A_- e^{j(\omega t + nka + \varphi_{0-})}$$

Chuyển động dao động của các khối được viết theo cách kí hiệu thực :

$$\psi_n(t) = A_+ \cos(\omega t - nka + \varphi_{0+}) + A_- \cos(\omega t + nka + \varphi_{0-})$$

Phương trình lan truyền dẫn tới một hệ thức giữa ω và k, gọi là *hệ thức tán sắc* : $\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{4K}{M}\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$.

Các tần số dao động tự do của chuỗi vô hạn tạo thành một *dải tần số* đi từ 0 đến $\frac{2\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4K}{M}}$.



H.22. *Sóng chạy truyền đi theo vận tốc v.*

3.2.3. Các sóng chạy đơn sắc

Xét sóng $\psi_n(t) = A_+ \cos(\omega t - nka + \varphi_{0+})$. Độ dịch chuyển của khối lượng thứ n ứng với giá trị của hàm sóng $\psi(x,t)$ đó tại $x = na$, là vị trí cân bằng của động tử này : $\psi_n(t) = \psi(x,t)_{(x=na)}$.

■ **Sóng đơn sắc**

Trong quang học, các sóng điện từ tạo thành ánh sáng có một màu sắc gắn với tần số của chúng. Suy rộng ra, chúng ta nói rằng sóng điều hòa $\psi(x,t) = A_+ \cos(\omega t - kx + \varphi_{0+})$ là một *sóng đơn sắc*.

■ **Sóng chạy**

Hàm $\psi(x,t)$ có cùng một giá trị tại $x + \Delta x$ vào thời điểm $t + \Delta t$ nếu $k\Delta x = \omega\Delta t$ (*h*.22). Ta có thể nói rằng sóng đơn sắc đó (đặc trưng bằng pha của nó) dịch chuyển với vận tốc $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ gọi là vận tốc pha. Sóng $\psi(x,t)$ dịch chuyển và chạy dọc theo trục (Ox) của chuỗi với vận tốc bằng v_φ. Đó là một *sóng chạy*.

Chú ý :

Cần phân biệt rõ vận tốc dịch chuyển của các động tử :

$$\frac{\mathrm{d}\psi_n(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t}[\psi(x,t)]_{x=na}$$

với vận tốc truyền sóng $\frac{\omega}{k}$. *Dù hai đại lượng này là đồng nhất, chúng hoàn toàn vẫn không biểu diễn cùng một cái.*

Trong trường hợp lan truyền một động tác hoan hô trong sân vận động chẳng hạn, rõ ràng là vận tốc dao động của một khán giả (người này không dời khỏi chỗ) *vuông góc với bậc ngồi, hoàn toàn khác với vận tốc dịch chuyển của động tác hoan hô, song song với các bậc ngồi (hình 21).*

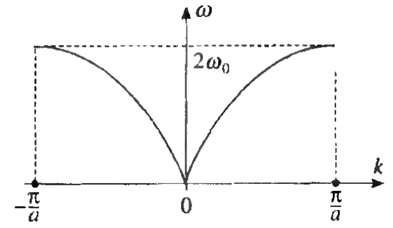
Trong các trường hợp lan truyền khác, các đại lượng lan truyền đi thậm chí có thể không đồng nhất với một độ dịch chuyển hoặc một vận tốc, nhưng chúng ta sẽ vẫn định nghĩa một vận tốc truyền của sóng ta đang xét.

Nói chung, một tín hiệu vật lí, ở đây là một sóng, có thể được khai triển thành một sự chồng chập của các thành phần điều hòa (chúng ta sẽ thấy lại điều đó ở *chương 7* dành cho sự tán sắc ; xem *H–Prépa, Điện từ học – Điện động lực học I và II, năm thứ nhất*).

Những dịch chuyển ứng với những dao động tự do của các động tử của một chuỗi vô hạn các dao động tử có thể đặt dưới dạng một sự chồng chập của các sóng chạy đơn sắc.
Tần số của các sóng này nằm trong một dải cho phép.

3.2.4. Bước sóng, vectơ sóng

Các sóng $\underline{\psi}_+(x,t) = \underline{A}_+ e^{j(\omega t - kx)}$ và $\underline{\psi}_-(x,t) = \underline{A}_- e^{j(\omega t + kx)}$ có cùng một tần số. Hai sóng chạy này truyền đi một cách như nhau dọc theo chuỗi, nhưng theo các chiều ngược nhau.



H.23. *Đường cong phân tán.*

Với một sóng chạy đơn sắc $\underline{\psi}(x,t) = \underline{A} e^{j(\omega t - kx)}$, chúng ta gắn một vectơ $\vec{k} = k\vec{e}_x$, gọi là *vectơ sóng*. Nó chỉ rõ phương truyền sóng (lấy k đại số, dương hoặc âm, để phân biệt hai chiều truyền). Tần số và vectơ sóng liên hệ với nhau bằng hệ thức tán sắc $\omega(k)$ mà đồ thị được biểu diễn trên *hình* 23. Đồ thị này giới hạn trong miền $-\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a}$ (gọi là miền BRILLOUIN thứ nhất), vì các giá trị k và $k + \frac{2\pi}{a}$ ứng với cùng một nghiệm vật lí $\psi_n(t)$.

Một sóng chạy đơn sắc có hai đặc tính tuần hoàn : chu kì thời gian $T = \frac{2\pi}{\omega}$ và chu kì không gian, hay là *bước sóng* $\lambda = \frac{2\pi}{|k|}$.

Áp dụng 3

Các kiểu dao động riêng của một chuỗi dao động tử

Ta lấy lại thí dụ về một chuỗi hữu hạn N dao động tử (n = 1, ..., N) mà hai đầu gắn với hai thành có hoành độ x = 0 và x = (N + 1)a.

1) *Chứng minh rằng sự tương thích của các nghiệm :*

$$\underline{\psi}_n(t) = \underline{A}_+ e^{j(\omega t - nka)} + \underline{A}_- e^{j(\omega t + nka)}$$

với những điều kiện biên đó đòi hỏi một sự lượng tử hóa các bước sóng. Viết độ dịch chuyển thật của các khối lượng tương ứng.

2) *Ta thu được bao nhiêu giá trị lượng tử hóa có thể chấp nhận ? Hãy bình luận. Hãy đặt chúng trên đồ thị tán sắc đối với N = 3.*

1) Phương trình biến thiên :

$$\ddot{\psi}_n = \omega_0^2[\psi_{n-1} - 2\psi_n + \psi_{n+1}]$$

đòi hỏi hệ thức tán sắc đã viết ở trên. Hơn nữa, các phương trình tiến triển của các động tử $n = 1$ và $n = N$ là :

$$\ddot{\psi}_1 = \omega_0^2[-2\psi_1 + \psi_2]$$

$$\ddot{\psi}_N = \omega_0^2[\psi_{N-1} - 2\psi_N]$$

Nghiệm lại hai hệ thức đó tức là đưa vào hai động tử ảo kí hiệu bằng $n = 0$ và $n = N + 1$, đặt ở hai đầu của chuỗi. Đối với chúng lúc nào ta cũng có :

$$\underline{\psi}_0(t) = 0 \quad \text{và} \quad \underline{\psi}_{N+1}(t) = 0,$$

tức là : $\underline{A}_+ e^{-j(N+1)ka} + \underline{A}_- e^{j(N+1)ka} = 0$

và : $\underline{A}_+ + \underline{A}_- = 0$

Muốn thu được các nghiệm khác không thì bắt buộc phải có :

$\sin([N+1]ka) = 0$ tức là $k = \frac{p\pi}{(N+1)a} = k_p$,

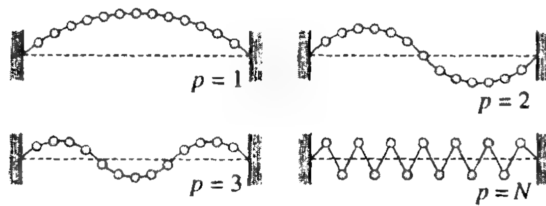
trong đó p là một số nguyên tự nhiên (k ở đây là dương, sóng "$-k$" đã bao hàm trong nghiệm được xét). Như vậy các bước sóng chỉ có thể có được một dãy các giá trị gián đoạn :

$$\lambda_p = \frac{2(N+1)a}{p}$$

Độ dịch chuyển của khối lượng thứ n được viết đối với kiểu p : $\psi_n(t) = \psi_0 \sin(nk_p a)\sin(\omega t + \varphi)$, với : $\psi_0 = |\underline{A}_+| = |\underline{A}_-|$ và $\varphi = \arg(\underline{A}_+)$.

Biểu thức này cho phép hiểu được dáng vẻ của các cách biểu diễn tượng trưng chuyển động của

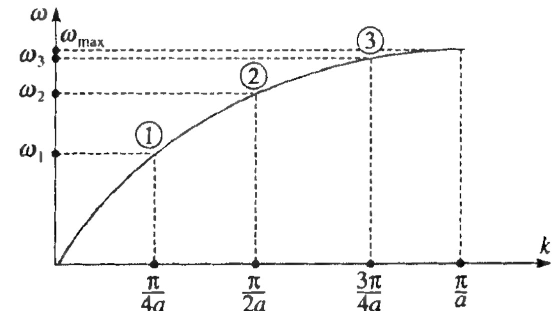
chuỗi mà chúng ta đã đưa ra trước ở §**1.3**, trên các *hình* 14 và 24 đối với $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$ và $p = N$.



H.24. *Biểu diễn các kiểu dao động riêng.*

2) Tần số các dao động tự do bị giới hạn trong dải $[0\ ;\ 2\omega_0]$, các giá trị của k giới hạn trong khoảng $\left[0; \frac{\pi}{a}\right]$, và số nguyên p giới hạn trong dãy các giá trị $p = 1$, $p = 2$, ..., $p = N$ ($p = 0$ cho một nghiệm bằng không và $p' = p + N + 1$ cho lại nghiệm của kiểu p). Như vậy ta có N kiểu dao động của chuỗi N dao động tử gắn chặt ở hai đầu.

Các điểm biểu diễn các kiểu $p = 1$, 2 và 3 của ba dao động tử liên kết như nhau được ghi trên đường cong của *hình 25.*



H.25. *Các kiểu dao động riêng ghi trên đường cong tán sắc đối với* $N = 3$.

3.2.5. Phép gần đúng cho các môi trường liên tục

Chuỗi các nguyên tử liên kết đàn hồi (hồi phục tuyến tính) bằng các lò xo là một sự mô hình hóa đơn giản để mô tả sự truyền các chuyển động dao động nhỏ trong một vật rắn, tức là *sự truyền âm trong một vật rắn.* Thực vậy, vật rắn là một sự chồng chất đều đặn của các nguyên tử (các phân tử hay các iôn). Các lực kéo một nguyên tử trở về vị trí cân bằng có thể được mô hình hóa theo cấp độ tuyến tính bằng một sự hồi phục đàn hồi, trong chừng mực mà các biên độ dao động của các nguyên tử là nhỏ (ở đây ta giả định vật rắn là đồng nhất và đẳng hướng).

Trong một vật rắn, các nguyên tử chỉ cách nhau vài phần mười của nanomet, và các bước sóng λ của các sóng âm lan truyền trong nó trong thực tế là rất lớn so với khoảng cách a giữa các nguyên tử : $a \ll \lambda$ (*h*.26).

Đối với $|k|a \ll 1$, các giá trị $\psi_n(t)$ và $\psi_{n+1}(t)$ của các dịch chuyển của hai động tử lân cận chỉ khác nhau rất ít. Tập hợp các giá trị $\psi_n(t)$ mô tả một cách hầu như liên tục các giá trị mà hàm sóng $\psi(x,t)$ có thể lấy.

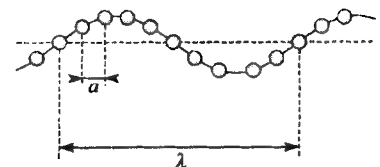
Chúng ta có thể sử dụng một phép gần đúng cho môi trường liên tục nếu kích thước đặc trưng của môi trường (độ dài a đối với chuỗi dao động tử) là nhỏ so với bước sóng λ của các sóng lan truyền : $a \ll \lambda$.

3.2.6. Phương trình d'ALEMBERT

Trong điều kiện đó, ta viết được :

$$\psi_{n+1}(t) = \psi_{(x=(n+1)a,t)} = \left[\psi + a\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \ldots\right]_{(x=na,t)}$$

$$\psi_{n-1}(t) = \psi_{(x=(n-1)a,t)} = \left[\psi - a\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \ldots\right]_{(x=na,t)}$$



H.26. *Các bước sóng lớn.*

Phương trình lan truyền :

$$\ddot{\psi}_n = \omega_0^2(\psi_{n-1} - 2\psi_n + \psi_{n+1})$$

có dạng một phương trình có đạo hàm riêng phần :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \omega_0^2 a^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

gọi là phương trình d'ALEMBERT.

Trong phép gần đúng cho môi trường liên tục, phương trình lan truyền các biến dạng của chuỗi các khối lượng liên kết là phương trình d'ALEMBERT :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$$

$c = \omega_0 a = a\sqrt{\frac{K}{M}}$ là một vận tốc, là đại lượng đặc trưng của sự lan truyền.

Trong phép gần đúng cho môi trường liên tục, hệ thức tán sắc trở thành (*h*.27) :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Vận tốc truyền của các sóng chạy đơn sắc khi đó là $v_\varphi = c$. Nó không phụ thuộc tần số các sóng này nếu $\lambda \ll a$.

Các sóng mô tả bởi phương trình d'ALEMBERT truyền đi với vận tốc *c*, vận tốc đó là đặc trưng của môi trường truyền sóng.

Vậy theo mô hình ta đã triển khai thì vận tốc truyền âm trong một chất rắn bằng :

$$c_s = \sqrt{\frac{Ka^2}{M}}.$$

Người ta cũng thường viết nó dưới dạng :

$$c_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

trong đó E là suất YOUNG, hay suất đàn hồi của vật liệu và ρ là khối lượng riêng của nó.

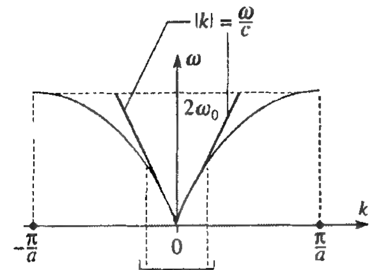
Hình 28 chỉ ra rằng âm thanh truyền trong các chất rắn "mềm" (chì) chậm hơn rõ ràng so với các chất rắn "cứng" (đá hoa cương).

So với vận tốc âm trong không khí, khoảng 340m/s thì vận tốc âm trong các chất rắn là khá lớn.

Chú ý :

Phép gần đúng cho môi trường liên tục cho phép mô hình hóa hành vi của một môi trường gián đoạn bằng một cách mô tả liên tục, như chúng ta vừa mới làm. Ngược lại, nó không đòi hỏi nhất thiết phải thu được phương trình lan truyền d'ALEMBERT. Thí dụ, trong bài tập 8, chúng ta sẽ thu được một phương trình lan truyền khác, gọi là phương trình KLEIN – GORDON.

▶ **Để luyện tập : Bài tập 4 và 8.**



H.27. *Đường cong tán sắc đối với $a \ll \lambda$.*

chất rắn	vận tốc âm ($m.s^{-1}$)
chì	1230
thủy tinh hữu cơ	1840
đồng	3750
nhôm	5100
sắt	5130
đá hoa cương	6000

H.28. *Vận tốc âm trong vài chất rắn.*

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ DAO ĐỘNG TỬ LIÊN KẾT

• Dao động tự do, các kiểu dao động riêng

Các chuyển động của một hệ (bền) mà sự diễn biến được mô tả bởi một hệ vi phân tuyến tính là kết quả sự chồng chập của các chuyển động ứng với các kiểu dao động riêng của hệ.

Các tần số của các kiểu dao động đó là các tần số riêng của hệ.

Nếu hệ được kích thích lúc ban đầu theo một trong các kiểu dao động riêng của nó, nó sẽ tiếp tục dao động theo kiểu đó.

• Dao động cưỡng bức

Đối với một dao động tử điều hòa thực, có một bậc tự do, có hệ số phẩm chất tốt, thì biên độ dịch chuyển của nó trở nên đáng kể khi tần số kích thích gần bằng tần số riêng của nó. Khi một tập hợp N dao động tử kết hợp (có phẩm chất tốt) chịu một sự kích thích vĩnh cửu dạng sin có tần số ω, thì biên độ chuyển động của các dao động tử trở thành đáng kể khi tần số kích thích tiến đến gần một trong những tần số riêng của hệ.

■ HIỆN TƯỢNG LAN TRUYỀN

• Nguồn gốc

Trong chuỗi các dao động tử liên kết, sự dịch chuyển của một động tử sinh ra một lực tác dụng lên những động tử ở gần nó nhất và làm chúng chuyển động. Những dịch chuyển của chúng sinh ra những lực mới, do đó lại sinh ra những dịch chuyển mới. Sự biến dạng của các mối nối giữa hai động tử lân cận sẽ *lan truyền* từ gần ra xa trong chuỗi. Đại lượng truyền đi (sự dịch chuyển của các động tử trong chuỗi) là một sóng.

Sự tồn tại của hai đại lượng (độ dịch chuyển và lực) cái nọ sinh ra cái kia (các đại lượng liên kết) là cơ sở của các *hiện tượng truyền sóng*.

• Phương trình lan truyền

Phương trình chuyển động của động tử thứ n :

$$M\ddot{\psi}_n = K\psi_{n-1} - 2K\psi_n + K\psi_{n+1}$$

có thể được gọi là *phương trình lan truyền* sự biến dạng của chuỗi dao động tử so với vị trí cân bằng.

Những dịch chuyển ứng với những dao động tự do của các động tử của một chuỗi vô hạn các dao động tử có thể đặt dưới dạng một sự chồng chập của các sóng chạy đơn sắc. Tần số của các sóng này nằm trong một dải cho phép.

• Phép gần đúng cho các môi trường liên tục và phương trình d'ALEMBERT

Chúng ta có thể sử dụng một phép gần đúng cho môi trường liên tục nếu kích thước đặc trưng của môi trường (độ dài a đối với chuỗi dao động tử) là nhỏ so với bước sóng λ của các sóng lan truyền : $a \ll \lambda$.

Trong phép gần đúng cho môi trường liên tục, phương trình lan truyền các biến dạng của chuỗi các khối lượng liên kết là phương trình d'ALEMBERT.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 .$$

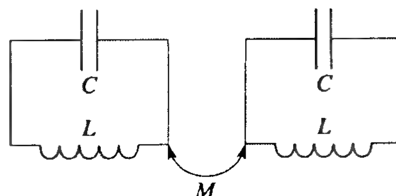
Các sóng mô tả bởi phương trình d'ALEMBERT truyền đi với vận tốc c, vận tốc đó là đặc trưng của môi trường truyền sóng.

Bài tập giải sẵn

Mạch liên kết bằng hỗ cảm

ĐỀ BÀI

Xét mạch lắp ráp bên đây, trong đó hai mạch dao động (L, C) như nhau được liên kết bằng hỗ cảm. Hệ số hỗ cảm của hai cuộn là M. Hệ số liên kết của hai mạch là $\alpha = \frac{M}{L}$ (môđun của hệ số này nhỏ hơn 1 : $|M| < L$; *xem : H–Prépa, Điện từ học, PC, PC*, PSI và PSI*, năm thứ 2*).



1) Lập các phương trình liên kết sự biến thiên điện tích của các tụ điện ở hai mạch.

2) Giải hệ phương trình đó bằng cách đi theo các bước đã áp dụng ở §**1.2.2** trong trường hợp hai dao động tử cơ học liên kết.

3) Vào lúc $t = 0$, tụ điện của một mạch đã được tích điện (trong khi tụ điện kia không tích điện), và được nối với cuộn dây tương ứng. Lập biểu thức của các điện tích trên các tụ điện vào những lúc sau đó.

4) Vẽ biểu đồ thời gian của chúng, trong trường hợp liên kết yếu.

LỜI KHUYÊN

Chúng ta có một hệ phương trình liên kết "đối xứng" giống như hệ đã thu được ở §**1.2.2**.

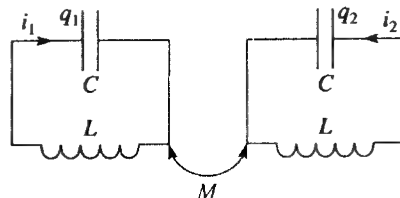
Việc sử dụng các tổ hợp đối xứng và phản đối xứng của q_1 và q_2 cho phép tách ngay các phương trình của hệ vi phân.

Chú ý rằng dấu của hệ số liên kết phụ thuộc phương của các từ thông, tức là phụ thuộc chiều quấn dây. Sự đổi dấu chỉ dẫn đến sự hoán vị các biến số u và v.

LỜI GIẢI

1) Các phương trình điện học của hai mạng liên kết là :

$$\begin{cases} L\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{q_1}{C} = 0 \\ L\dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{q_2}{C} = 0 \end{cases} \quad \text{với} \quad i_1 = \frac{dq_1}{dt} \quad \text{và} \quad i_2 = \frac{dq_2}{dt},$$



tức là $$\begin{cases} L\ddot{q}_1 + M\ddot{q}_2 + \dfrac{q_1}{C} = 0 \\ M\ddot{q}_1 + L\ddot{q}_2 + \dfrac{q_2}{C} = 0 \end{cases}$$

2) Đặt : $u = q_1 + q_2$ và $v = q_1 - q_2$.

Các biến số này thỏa mãn hệ vi phân các phương trình đã tách riêng :

$$\begin{cases} (L+M)\ddot{u} + \dfrac{u}{C} = 0 \\ (L-M)\ddot{v} + \dfrac{v}{C} = 0 \end{cases}$$

nghiệm của chúng có dạng :

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \text{ và } v(t) = V_0 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

trong đó : $\omega_1 = \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{1+\alpha}}$, $\omega_2 = \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{1-\alpha}}$ và $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$.

Lẽ tất nhiên chúng ta cũng có thể tìm một cách tiên nghiệm *những nghiệm dao động (xem : áp dụng 2). Điều đó có nghĩa là phải làm triệt tiêu định thức :*

$$\begin{vmatrix} -L\omega^2 + \dfrac{1}{C} & -M\omega^2 \\ -M\omega^2 & -L\omega^2 + \dfrac{1}{C} \end{vmatrix}$$

nó cũng dẫn đến các tần số riêng và các kiểu dao động riêng của hệ.

3) Những điều kiện ban đầu có dạng : $q_1(0) = Q$ và $q_2(0) = 0$.

Các dòng điện trong các cuộn dây là dòng một chiều và bằng không. Chuyển sang các biến số u và v, các điều kiện ban đầu đó dẫn đến :

$$\begin{cases} u(t) = Q\cos(\omega_1 t) \\ v(t) = Q\cos(\omega_2 t) \end{cases} \text{ tức là } \begin{cases} q_1(t) = Q\cos\left(\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \\ q_2(t) = Q\sin\left(\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \end{cases}.$$

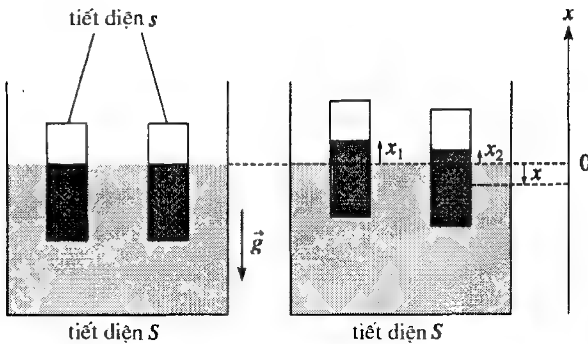
4) Trong các trường hợp liên kết yếu : $|M| \ll L$, chúng ta gặp lại một hiện tượng phách tương tự như hiện tượng mô tả ở *áp dụng 2.*

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Dao động của hai cái phao

Hai cái phao hình trụ như nhau (tiết diện s và khối lượng m) có thể dao động trong nước của một cái bình tiết diện S. Vị trí của các phao được đánh dấu bằng những dịch chuyển dọc của chúng x_1 và x_2 so với các vị trí cân bằng của chúng.

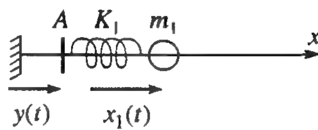


1) Tìm hệ các phương trình vi phân xác định chuyển động của hai cái phao, chấp nhận rằng mặt thoáng vẫn là mặt nằm ngang, và có thể áp dụng được định luật ARCHIMÈDE.

2) Giải hệ phương trình đó, giả định rằng vào lúc ban đầu cả hai cái phao đều nằm ở vị trí cân bằng, với vận tốc ban đầu bằng $2v_0$ đối với phao thứ nhất và v_0 đối với phao thứ hai.

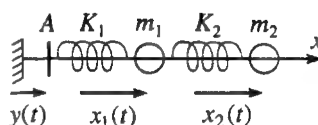
2 Cái làm tắt dao động

Cho một dao động tử như ở hình bên. Đầu A của lò xo chịu một sự dịch chuyển dạng sin $y(t) = y_0 \sin \Omega t$ (giả thiết rằng $K_1 \neq m_1\Omega^2$).



1) Xác định độ dịch chuyển $x_1(t)$ của dao động tử, theo chế độ vĩnh cửu, so với vị trí cân bằng của nó.

2) Một dao động tử thứ hai đặt nối tiếp với dao động tử trên, theo như sơ đồ ở bên.



Với sự dịch chuyển dạng sin đã xác định ở trên thì K_2 và m_2 phải thỏa mãn những điều kiện nào để trong chế độ vĩnh cửu thì x_1 luôn luôn bằng không ?

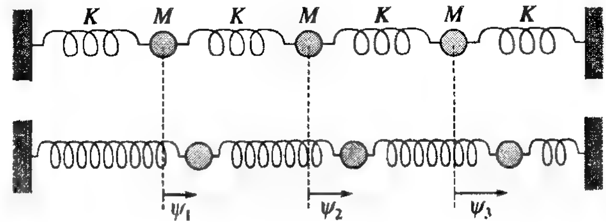
3 Các kiểu dao động riêng của một hệ ba động tử liên kết như nhau

1) Viết hệ phương trình chuyển động của một hệ ba động tử liên kết như nhau, kiểu như hệ khảo sát ở §**1.2**.

Tìm các tần số riêng của hệ đó bằng cách sử dụng phương pháp giới thiệu ở *áp dụng 2*.

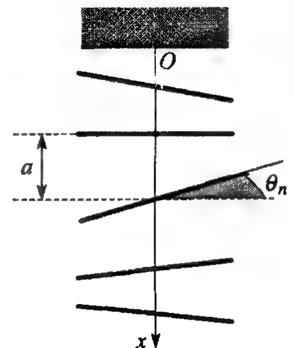
2) Giải thích ba kiểu dao động riêng đã tìm được bằng cách mô tả chuyển động của ba động tử liên kết.

3) Chứng tỏ rằng điều kiện lượng tử hóa đã thu được trong *áp dụng 3* đối chiếu vào hệ thức phân tán thu được trong §**3.2.2**, cho phép tìm lại được ba kiểu dao động riêng đó.



4 Cái thang cho vẹt

Một cái thang cho vẹt treo lên trần nhà gồm những thanh như nhau, có mômen quán tính J đối với trục quay thẳng đứng (Ox) của chúng. Các thanh được buộc từng đôi một với nhau bằng những dây xoắn có độ dài a và độ cứng C. Gọi θ_n là góc quay của thanh thứ n so với vị trí cân bằng của nó.



1) Phương trình truyền của một sóng xoắn dọc theo cái thang cho vẹt là phương trình nào ?

2) Trong phép gần đúng cho các môi trường liên tục, nó trở thành thế nào ?

3) Những đại lượng tương tự như những hằng số ω_0 và c ở §**3.2.6** là những đại lượng nào ?

5 Ma sát trong chuyển động tự do của hai động tử liên kết

Chúng ta quan tâm đến những biến đổi gây ra bởi những ma sát thủy động "yếu" trong chuyển động tự do của hai động tử liên kết có khối lượng M, giống như những chuyển động đã khảo sát ở §**1.2**. Lò xo trung tâm có độ cứng K, hai lò xo kia có độ cứng $4K$. Kí hiệu $f_i = -\lambda v_i$ là những lực do ma sát thủy động gây ra (λ là một hằng số dương và $v_1 = v_2$, trong đó v_2 là vận tốc của động tử 1 hoặc động tử 2). Đặt $\omega_0^2 = \frac{K}{M}$ và $Q = \frac{M\omega_0}{\lambda}$, với $Q > 1$.

1) Thành lập các phương trình của các chuyển động tự do.

2) Lúc ban đầu hệ được kích thích ở trạng thái $\psi_1 = \psi_0$, $\frac{d\psi_1}{dt} = 0$, $\psi_2 = 0$, $\frac{d\psi_2}{dt} = 0$, hãy diễn tả những biến thiên $\psi_1(t)$ và $\psi_2(t)$ của hai động tử.

3) Vẽ những biểu đồ thời gian tương ứng.

6 Ma sát trong chuyển động cưỡng bức dạng sin của hai động tử liên kết

Ở đây, ta tìm cách khảo sát chuyển động của hai động tử liên kết trong *Bài tập 5*, trong chế độ cưỡng bức dạng sin.

Chế độ chuyển tiếp có một thời gian hữu hạn, sự khảo sát của chúng ta chỉ giới hạn ở chế độ vĩnh cửu được thiết lập. Hệ được kích thích bằng cách áp đặt một dịch chuyển $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$ vào đầu lò xo thứ nhất.

Đặt $\omega_0^2 = \frac{K}{M}$ và $Q = \frac{M\omega_0}{\lambda}$, và kí hiệu $f_i = -\lambda v_i$ là lực do ma sát gây ra.

1) Lập các phương trình mới của chuyển động

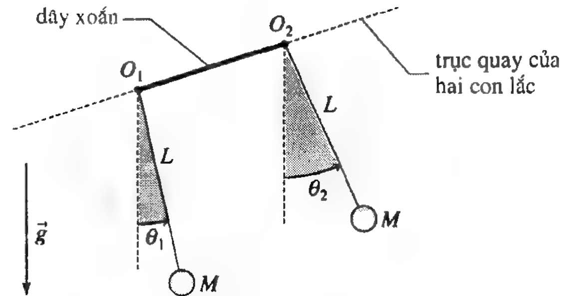
Đối với các câu hỏi tiếp theo, cần phải sử dụng một phần mềm về phép tính hình thức.

2) Diễn tả bằng cách kí hiệu phức những biên độ của các độ dịch chuyển $\underline{\psi}_{10}$ và $\underline{\psi}_{20}$.

3) Vẽ các đường biểu diễn biến thiên của các môđun các biên độ dịch chuyển của hai khối lượng, tùy theo tần số của kích thích cưỡng bức dạng sin. Hãy bình luận các đồ thị thu được đối với các giá trị khác nhau của Q.

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

7 ★Làm lộ rõ những tần số riêng của hai con lắc liên kết



Hai con lắc như nhau có khối lượng M (tâm quán tính của chúng cách trục quay một khoảng bằng L) và mômen quán tính $J = ML^2$ đối với trục quay đó, liên kết yếu với nhau bằng một sợi dây xoắn có hằng số C. Sự quay của chúng được ghi lại bằng những điện thế kế, và ta giả định rằng ảnh hưởng của các điện thế kế đối với các chuyển động (nhỏ) của các con lắc là không đáng kể.

1) Thành lập và giải các phương trình của các chuyển động "nhỏ" của hai con lắc, tùy theo những điều kiện ban đầu $\theta_1(0)$, $\frac{d\theta_1}{dt}(0)$, $\theta_2(0)$ và $\frac{d\theta_2}{dt}(0)$.

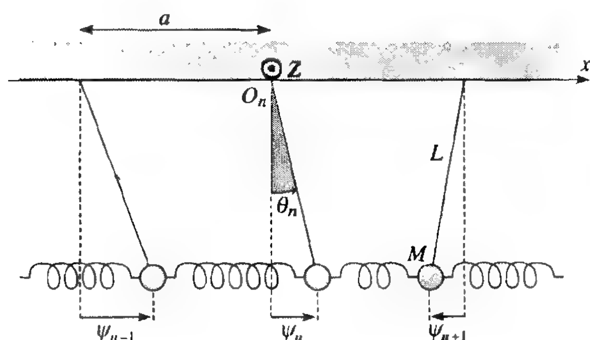
2) Nêu rõ người ta hiểu liên kết yếu là gì. Biểu diễn dáng vẻ của các dao động $\theta_1(t)$ và $\theta_2(t)$ của hai con lắc nếu chúng được thả ra không có vận tốc ban đầu, trong một cấu hình sao cho hai kiểu dao động riêng đều được kích thích như nhau (gọi θ_0 là biên độ dao động của các con lắc).

3) Chuyển động của các con lắc được ghi trong một khoảng thời gian từ $t = -\Delta t$ đến $t = \Delta t$. Để thuận tiện, gốc thời gian được lấy là khi con lắc 1 đi qua vị trí $\theta_1 = \theta_0$. Khi đó, người ta tính các tích phân :

$$F_i(\omega) = \frac{1}{2\Delta t}\int_{-\Delta t}^{\Delta t} \theta_i(t) e^{j\omega t}\, dt\,.$$

Khoảng thời gian ghi $2\Delta t$ phải thỏa mãn điều kiện gì để đồ thị của F_1 (hoặc F_2) biến thiên theo ω làm lộ rõ hai đỉnh cho phép vật chất hóa hai tần số riêng tách bạch gắn với hệ có hai bậc tự do này ?

8 Phương trình lan truyền KLEIN-GORDON



Người ta khảo sát sự truyền sóng dọc theo một chuỗi các con lắc đơn như nhau, có khối lượng M, độ dài L, liên kết bằng các lò xo có độ cứng K, như ở sơ đồ trên đây.

Ta kí hiệu $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{M}}$ và $\Omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$.

• Phương trình lan truyền liên hệ các dịch chuyển nhỏ $\psi_n \approx L\theta_n$, ψ_{n-1} và ψ_{n+1} của các đầu mút các con lắc là phương trình nào ?

Hệ thức tán sắc của các sóng chạy đơn sắc đặc trưng cho sự lan truyền này là hệ thức nào ?

• Biểu diễn hệ thức phân tán và chỉ rõ dải cho phép đối với các tần số của các dao động tự do trong chuỗi các con lắc liên kết.

• Chỉ rõ dạng của các kết quả đó trong phép gần đúng cho các môi trường liên tục.

9 ★Sự lọc bằng một chuỗi các dao động tử liên kết

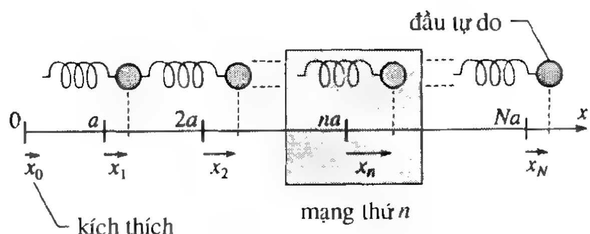
Một chuỗi các tứ cực điện biểu diễn trên hình sau đây ứng với sự liên kết của N dao động tử (L, C) lắp nối tiếp nhau.

1) Chứng minh rằng các phương trình liên kết các điện áp và các dòng điện V_n, V_{n+1}, I_n và I_{n+1}, trong chế độ dạng sin với tần số ω và trong cách kí hiệu phức, có thể viết dưới dạng một hệ thức ma trận kiểu :

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{n-1} \\ \underline{I}_{n-1} \end{bmatrix} = [C] \begin{bmatrix} \underline{V}_n \\ \underline{I}_n \end{bmatrix}$$

$[C]$ là ma trận chuỗi của tứ cực tạo bởi một trong các mạng của chuỗi (phần in xẫm).

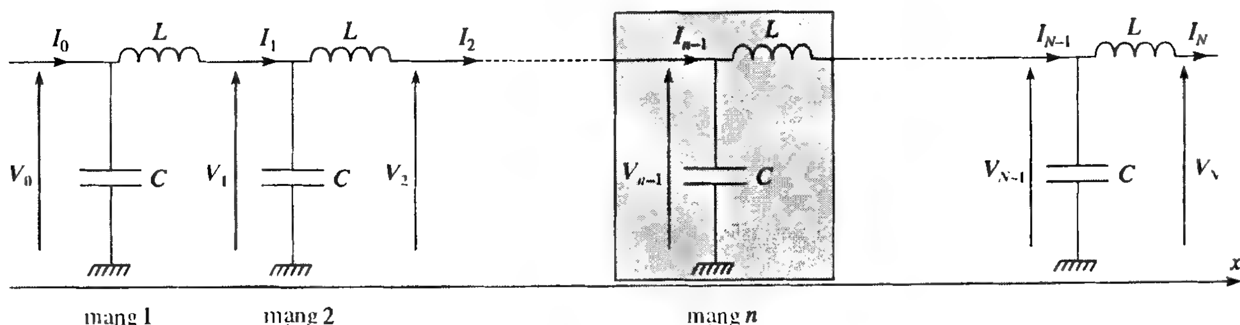
2) Chứng minh rằng có thể thành lập các hệ thức tương đương về mặt hình thức đối với chuỗi các dao động tử liên kết trong hình dưới đây, trong đó x_n chỉ độ dịch chuyển của khối lượng thứ n so với vị trí cân bằng của nó, v_n chỉ vận tốc của nó và f_n chỉ lực mà khối lượng thứ n tác dụng lên khối lượng thứ $(n+1)$ qua lò xo liên kết.



3) Chuỗi dao động tử này được kích thích bằng cách áp đặt một dịch chuyển dạng sin $x_0(t) = A\cos(\omega t)$ ở đầu lò xo thứ nhất. Đầu kia của chuỗi (động tử N) là tự do.

Cái tương tự điện học của tình huống này là gì ?

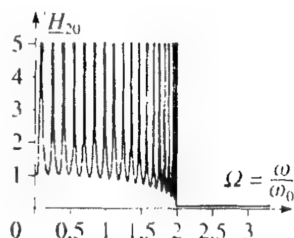
4) Trong trường hợp đó, hãy chỉ ra hệ thức liên hệ hàm truyền phức $\underline{H}_N = \dfrac{\underline{I}_N}{\underline{I}_0}$ (hoặc $\dfrac{\underline{v}_N}{\underline{v}_0}$ với $\underline{v}_N = \dfrac{dx_N}{dt}$ và $\underline{v}_0 = \dfrac{dx_0}{dt}$) với ma trận chuỗi $[C]$. Vì sao ta có thể nói đến sự lọc do chuỗi dao động tử thực hiện ? Hãy nói một cách tiên nghiệm, bậc của bộ lọc đã lập là bậc nào ?



5) Xét các trường hợp $N = 1$ và $N = 2$, và vẽ dáng vẻ của môđun của hàm truyền đó, tùy theo tần số ω của kích thích áp đặt có thể đặt :

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ với } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

6) Trong trường hợp N là "lớn" đồ thị của $|\underline{H}_N| = f(\Omega)$ được trình bày ở bên ($N = 20$) (Chú ý rằng $\Omega > 2$ thì $|\underline{H}_N| \approx 0$). Giải thích kết quả thu được.



BÀI CHỮA

1 1) *Khi các phao chuyển động dọc, mực nước trong bình bị thay đổi. Gọi x là độ dịch chuyển đại số của mực nước đó (đo trên một trục dọc hướng trở lên), ta được :*

$$(x_1 + x_2)s = -x(S - 2s)$$

vì rằng thể tích của nước dĩ nhiên là không đổi (nếu x_1 và x_2 là dương, thì x là âm).

Định lí về hợp lực động áp dụng cho mỗi cái phao, chiếu lên trục thẳng đứng hướng trở lên, cho ta :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -mg + \rho(V_{im} - (x_1 - x)s)g \\ m\ddot{x}_2 = -mg + \rho(V_{im} - (x_2 - x)s)g \end{cases}$$

Trong các phương trình này, V_{im} chỉ thể tích phần chìm của mỗi cái phao ở vị trí cân bằng : V_{im} nhất thiết phải nghiệm đúng $m = \rho V_{im}$.

Khử x trong 2 phương trình sau, ta được :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 - \omega_2^2 x_2 \\ \ddot{x}_2 = -\omega_2^2 x_1 - \omega_1^2 x_2 \end{cases}$$

trong đó $\omega_1^2 = \frac{\rho g}{m}\frac{s(S-s)}{S-2s}$ *và* $\omega_2^2 = \frac{\rho g}{m}\frac{s^2}{S-2s}$. *Chú ý rằng* $\omega_1 > \omega_2$.

2) *Tổng và tích từng vế của hai phương trình này dẫn đến :*

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\Omega_1^2(x_1 + x_2) \\ \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\Omega_2^2(x_1 - x_2) \end{cases}$$

với $\Omega_1^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$ *và* $\Omega_2^2 = \omega_1^2 - \omega_2^2$. *Chú ý đến các điều kiện ban đầu, các nghiệm được viết thành :*

$$x_1 + x_2 = \frac{3v_0}{\Omega_1}\sin\Omega_1 t \text{ và } x_1 - x_2 = \frac{v_0}{\Omega_2}\sin\Omega_2 t$$

do đó :

$$x_1 = \frac{v_0}{2}\left(\frac{3}{\Omega_1}\sin\Omega_1 t + \frac{1}{\Omega_2}\sin\Omega_2 t\right)$$

$$x_2 = \frac{v_0}{2}\left(\frac{3}{\Omega_1}\sin\Omega_1 t - \frac{1}{\Omega_2}\sin\Omega_2 t\right)$$

2 1) *Phương trình chuyển động của khối lượng m_1 :*

$$m_1\ddot{x}_1 = -K_1(x_1 - y),$$

tức là $\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \omega_1^2 y_0 \sin\Omega t$ *bằng cách đặt* $\omega_1^2 = \frac{K_1}{m_1}$.

Trong chế độ vĩnh cửu, dao động tử thực hiện các dao động cưỡng bức :

$$x_1 = y_0 \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \Omega^2}\sin\Omega t,$$

mà biên độ có thể là rất lớn nếu mạch số Ω gần với mạch số riêng ω_1.

2) *Các lực ma sát không tránh khỏi (sẽ bỏ qua chúng trong các phép tính sau đây) đã làm giảm dần những dao động có thể xảy ra trong chế độ chuyển tiếp của sự "khởi động" các dao động tử. Chúng ta chỉ khảo sát chế độ vĩnh cửu dạng sin.*

Giả định rằng $x_1 = 0$, các phương trình chuyển động của mỗi dao động tử được viết thành :

$$\begin{cases} 0 = K_1 y + K_2 x_2 \\ m_2\ddot{x}_2 = -K_2 x_2 \end{cases}$$

Trong chế độ vĩnh cửu, x_2 phải nghiệm đúng :

$$x_2 = -\frac{K_1}{K_2}y = -\frac{K_1}{K_2}y_0\sin\Omega t \quad \text{với} \quad \frac{K_2}{m_2} = \Omega^2.$$

Trong điều kiện đó, dao động tử thứ hai "làm tắt" các dao động của dao động tử thứ nhất. Hệ này được sử dụng khi thiết kế một số cái máy nhằm làm giảm những chấn động không thể tránh được.

3 1) *Kí hiệu các dịch chuyển của các khối lượng so với vị trí cân bằng của chúng là $\underline{\psi}_1$, $\underline{\psi}_2$ và $\underline{\psi}_3$, ta viết được các phương trình chuyển động :*

$$\begin{cases} M\ddot{\psi}_1 = -K\psi_1 - K(\psi_1 - \psi_2) \\ M\ddot{\psi}_2 = +K(\psi_1 - \psi_2) - K(\psi_2 - \psi_3) \\ M\ddot{\psi}_3 = +K(\psi_2 - \psi_3) - K\psi_3 \end{cases}$$

Ta tìm các nghiệm $\underline{\psi}_1$, $\underline{\psi}_2$ và $\underline{\psi}_3$, chúng có tần số ω, tức là chúng tỉ lệ với $e^{j\omega t}$ trong cách kí hiệu phức :

$$\underline{\psi}_1 = \underline{\psi}_{10}e^{j\omega t}, \ \underline{\psi}_2 = \underline{\psi}_{20}e^{j\omega t} \text{ và } \underline{\psi}_3 = \underline{\psi}_{30}e^{j\omega t}$$

Hệ tuyến tính đồng nhất là :

$$\begin{cases} (-\omega^2 + 2\omega_0^2)\underline{\psi}_{10} - (\omega_0^2)\underline{\psi}_{20} = 0 \\ -(\omega_0^2)\underline{\psi}_{10} + (-\omega^2 + 2\omega_0^2)\underline{\psi}_{20} - (\omega_0^2)\underline{\psi}_{30} = 0 \\ -(\omega_0^2)\underline{\psi}_{20} + (-\omega^2 + 2\omega_0^2)\underline{\psi}_{30} = 0 \end{cases}$$

nó chấp nhận các nghiệm $\underline{\psi}_{10}$, $\underline{\psi}_{20}$ và $\underline{\psi}_{30}$ không tầm thường nếu định thức của nó bằng không :

$$(-\omega^2+2\omega_0^2)(-\omega^2+(2+\sqrt{2})\omega_0^2)(-\omega^2+(2-\sqrt{2})\omega_0^2)=0.$$

Có 3 tần số riêng :

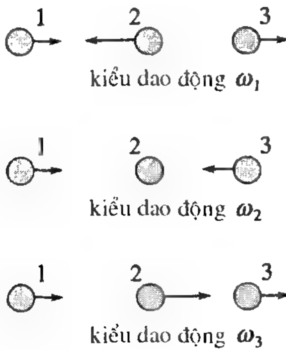
$$\omega_1=\omega_0\sqrt{2-\sqrt{2}}\ ;\ \omega_2=\omega_0\sqrt{2}\ ;\ \omega_3=\omega_0\sqrt{2+\sqrt{2}}\ .$$

2) • *Đối với kiểu 1 : $\omega=\omega_1$, do đó $\sqrt{2}\underline{\psi}_1=-\underline{\psi}_2=\sqrt{2}\underline{\psi}_3$. Các động tử 1 và 3 dao động cùng pha với cùng một biên độ, trong khi động tử 2 ở giữa lại ngược pha với các động tử lân cận (biên độ của nó lớn hơn $\sqrt{2}$ lần).*

• *Đối với kiểu 2 : $\omega=\omega_2$, do đó $\underline{\psi}_2=0$ và $\underline{\psi}_1=-\underline{\psi}_3$. Động tử ở giữa đứng yên, các động tử 1 và 3 dao động ngược pha với cùng một biên độ.*

• *Đối với kiểu 3 : $\omega=\omega_3$, do đó $\sqrt{2}\underline{\psi}_1=\underline{\psi}_2=\sqrt{2}\underline{\psi}_3$. Cả ba động tử dao động cùng pha, động tử ở giữa có biên độ lớn gấp $\sqrt{2}$ lần các động tử lân cận.*

Như vậy ta đã khẳng định lại các kết quả minh họa trên hình 14 của chương này.



kiểu dao động ω_1

kiểu dao động ω_2

kiểu dao động ω_3

3) *Ở §3.2.2 ta đã tìm được hệ thức phân tán đối với một chuỗi dao động tử : $\omega=2\omega_0\sin\dfrac{ka}{2}$ (giả định $k>0$). Ta đã thấy rằng (xem áp dụng 3) chuẩn k của vectơ sóng, nhất thiết phải liên hệ với khoảng cách (ở vị trí cân bằng) của các động tử bằng $k=\dfrac{\pi p}{(N+1)a}$.*

Biết rằng N = 3 và p = 1, 2 hoặc 3, vậy tần số có 3 giá trị :

• *với p = 1 : $\omega_1=2\omega_0\sin\dfrac{\pi}{8}=\omega_0\sqrt{2-\sqrt{2}}$*

• *với p = 2 : $\omega_2=2\omega_0\sin\dfrac{\pi}{4}=\omega_0\sqrt{2}$*

• *với p = 3 : $\omega_3=2\omega_0\sin\dfrac{3\pi}{8}=\omega_0\sqrt{2+\sqrt{2}}$*

bằng cách sử dụng : $\cos\dfrac{\pi}{4}=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{2}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{4}\right)$ và $\sin^2\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)$.

4

1) *Định lí mômen động áp dụng cho thanh thứ n chiếu lên trục quay thẳng đứng cho ta :*

$$J\ddot{\theta}_n=-C(\theta_n-\theta_{n-1})-C(\theta_n-\theta_{n+1})=C(-2\theta_n+\theta_{n-1}+\theta_{n+1})\,.$$

Như vậy ta thu được phương trình truyền chuyển động xoắn trong chuỗi các thanh liên kết từng đôi một. Nó ứng chính xác với phương trình đã tìm được cho các dao động ở §3.

2) *Trong phép gần đúng cho các môi trường liên tục, với cách thay thế tập hợp gián đoạn các giá trị $\theta_n(t)$ của các góc quay của các thanh (thanh thứ n nằm ở hoành độ $x_n=na$) bằng hàm $\theta(x,t)$, ta có :*

$\theta_{n-1}+\theta_{n+1}-2\theta_n=a^2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$, *và như vậy ta tìm lại được phương trình d'ALEMBERT :*

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\frac{J}{Ca^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0\,.$$

3) *Ứng với tần số $\omega_0=\sqrt{\dfrac{K}{M}}$ thu được cho chuỗi các động tử, ở đây là giá trị $\omega_0=\sqrt{\dfrac{C}{J}}$.*

Cũng như vậy, vận tốc sóng xoắn là $c=\omega_0 a=\sqrt{\dfrac{Ca^2}{J}}$.

5

1) *Ta thu được ngay hệ các phương trình vi phân :*

$$M\ddot{\psi}_1=-4K\psi_1-K(\psi_1-\psi_2)-\lambda\dot{\psi}_1=-5K\psi_1+K\psi_2-\lambda\dot{\psi}_1$$

$$M\ddot{\psi}_2=-4K\psi_2-K(\psi_2-\psi_1)-\lambda\dot{\psi}_2=-5K\psi_2+K\psi_1-\lambda\dot{\psi}_2$$

2) *Bằng cách cộng và trừ từng vế, hệ phương trình của câu 1) trở thành :*

$$\ddot{u}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{u}+4\omega_0^2u=0$$

$$\ddot{v}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{v}+4\omega_0^2v=0$$

bằng cách đặt $u=\psi_1+\psi_2$ và $v=\psi_1-\psi_2$.

Chú ý đến các điều kiện ban đầu u và v viết được thành :

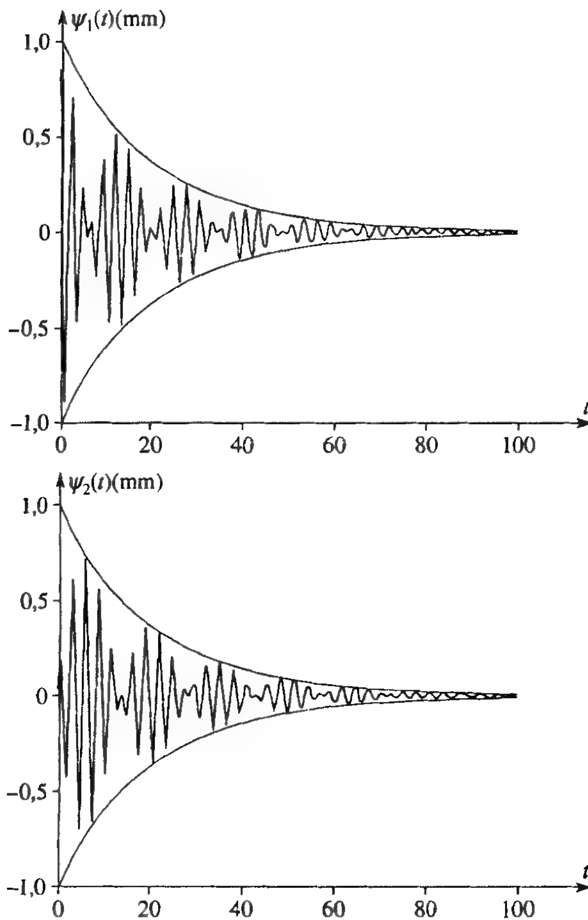
$$\begin{cases} u(t)=\psi_0\left(\cos\omega_1t+\dfrac{\omega_0}{2Q}\dfrac{\sin\omega_1t}{\omega_1}\right)e^{-\frac{\omega_0t}{2Q}} \\ v(t)=\psi_0\left(\cos\omega_2t+\dfrac{\omega_0}{2Q}\dfrac{\sin\omega_2t}{\omega_2}\right)e^{-\frac{\omega_0t}{2Q}} \end{cases}$$

với $\omega_1=\omega_0\sqrt{4-\dfrac{1}{4Q^2}}$ và $\omega_2=\omega_0\sqrt{6-\dfrac{1}{4Q^2}}$ (Q > 1)

Ta rút ra :

$$\begin{cases} \psi_1(t)=\dfrac{\psi_0}{2}\left(\cos\omega_1t+\cos\omega_2t+\dfrac{\omega_0}{2Q}\left(\dfrac{\sin\omega_1t}{\omega_1}+\dfrac{\sin\omega_2t}{\omega_2}\right)\right)e^{-\frac{\omega_0t}{2Q}} \\ \psi_2(t)=\dfrac{\psi_0}{2}\left(\cos\omega_1t-\cos\omega_2t+\dfrac{\omega_0}{2Q}\left(\dfrac{\sin\omega_1t}{\omega_1}-\dfrac{\sin\omega_2t}{\omega_2}\right)\right)e^{-\frac{\omega_0t}{2Q}} \end{cases}$$

3) *Các đồ thị sau đây biểu diễn các hàm $\psi_1(t)$ và $\psi_2(t)$ đối với $\psi_0 = 1$ mm, $\omega_0 = 1$ rad.s^{-1} và $Q = 10$. Ta thấy được sự tắt dần của các dao động qua sự giảm theo hàm mũ của biên độ của các phách (xem áp dụng 2) : cơ năng của hệ các dao động tử giảm. Nó chuyển hóa thành nhiệt năng.*



6 1) *Căn cứ vào cách kích thích, chỉ có phương trình chuyển động của động tử thứ nhất bị biến đổi. Các phương trình chuyển động là :*

$$M\ddot{\Psi}_1 = -4K(\psi_1 - \varepsilon) - K(\psi_1 - \psi_2) - \lambda\dot{\Psi}_1$$

$$M\ddot{\Psi}_2 = -4K\psi_2 \qquad - K(\psi_2 - \psi_1) - \lambda\dot{\Psi}_2$$

2) *Dùng cách kí hiệu phức và các kí hiệu Q và ω_0 của bài tập 5, các nghiệm của hệ :*

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + j\dfrac{\omega\omega_0}{Q} + 5\omega_0^2\right)\underline{\psi}_{10} - \omega_0^2\underline{\psi}_{20} = 4\omega_0^2\varepsilon_0 \\ -\omega_0^2\underline{\psi}_{10} + \left(-\omega^2 + j\dfrac{\omega\omega_0}{Q} + 5\omega_0^2\right)\underline{\psi}_{20} = 0 \end{cases}$$

viết ra thì hơi dài. Chúng ta sử dụng MAPLE để thu được các nghiệm, chẳng hạn như bằng cách sử dụng các dòng lệnh sau đây :

```
>eqns:={(-omega^2+I*omega*omega0/Q+5*omega0^2)*psi10
-(omega0^2)*psi20=4*omega0^2*epsilon0,
-(omega0^2)*psi10+(-omega^2+I*omega*omega0/Q+5*omega0^2)*psi20=0};
>solve(eqns,{psi10,psi20});
```

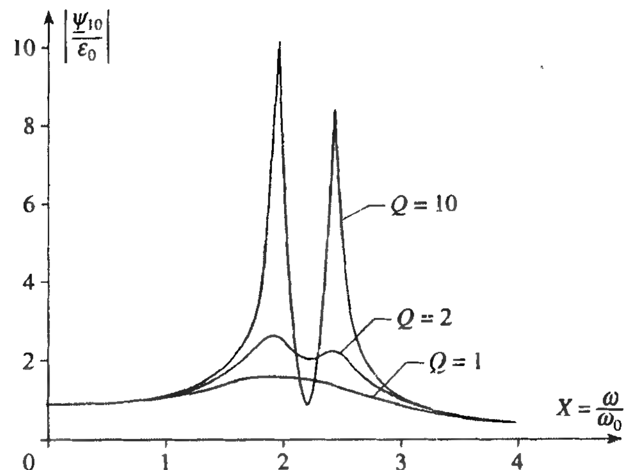
việc đó cho ta :

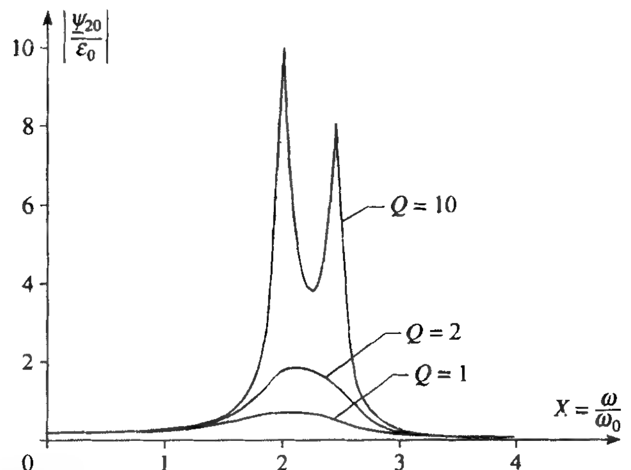
$$\begin{cases} \underline{\psi}_{10} = 4\varepsilon_0 \dfrac{\left(5 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{24 + 10j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\left(10 + \dfrac{1}{Q^2}\right) - 2j\dfrac{\omega^3}{Q\omega_0^3} + \dfrac{\omega^4}{\omega_0^4}} \\ \underline{\psi}_{20} = 4\varepsilon_0 \dfrac{1}{24 + 10j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\left(10 + \dfrac{1}{Q^2}\right) - 2j\dfrac{\omega^3}{Q\omega_0^3} + \dfrac{\omega^4}{\omega_0^4}} \end{cases}$$

3) *Ta thu được các đường cong cần vẽ bằng những lệnh sau đây :*

```
>assign(solve(eqns,{psi10,psi20}));
>x10:=simplify(subs({omega=X*omega0},psi1/epsilon0));
>x20:=simplify(subs({omega=X*omega0},psi20/epsilon0));
>plot({seq(subs(Q=p,abs(x10)),p=[1,2,10])},X=0..7,0..20,color=green);
>plot({seq(subs(Q=p,abs(x20)),p=[1,2,10])},X=0..7,0..20,color=green);
```

nhằm khảo sát những biến thiên của các biến số không thứ nguyên $\left|\dfrac{\underline{\psi}_{10}}{\varepsilon_0}\right|$ và $\left|\dfrac{\underline{\psi}_{20}}{\varepsilon_0}\right|$ là hàm của biến số rút gọn $X = \dfrac{\omega}{\omega_0}$. Các đồ thị sau đây ứng với các trường hợp $Q = 1, 2$ và 10.





• *Khi Q lớn (thí dụ Q = 10, ma sát rất không đáng kể), các dao động tử có hai đỉnh cộng hưởng nhọn thu được cho $X \approx 2$ và $X \approx 2{,}45$. Các giá trị đó phải tiến đến gần các giá trị của các tần số riêng : $\omega_{1\infty} = 2\omega_0$ và $\omega_{2\infty} = \sqrt{6}\omega_0$ thu được khi Q dần tới vô hạn. Ở lân cận các cộng hưởng đó, sự mất mát năng lượng do ma sát nhớt sẽ là quan trọng : các miền cộng hưởng là các miền hấp thụ năng lượng.*

• *Với các giá trị của Q nhỏ hơn, có thể có cộng hưởng biên độ mà không có hai đỉnh cộng hưởng tách bạch.*

• *Đối với các hệ số Q nhỏ (không vẽ trên đồ thị) thì không có cộng hưởng biên độ.*

7 1) *Áp dụng định lí mômen động vào các điểm O_1 và O_2 cho hai con lắc, cho các chuyển động nhỏ ($\sin\theta \approx \theta$) ta được :*

$$\begin{cases} ML^2\ddot{\theta}_1 = -MgL\theta_1 + C(\theta_2 - \theta_1) \\ ML^2\ddot{\theta}_2 = -MgL\theta_2 + C(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

Đặt $u = \theta_1 + \theta_2$, $v = \theta_1 - \theta_2$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ *và* $\omega_2 = \sqrt{\frac{MgL + 2C}{ML^2}}$, *ta có :*

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega_1^2 u = 0 \\ \ddot{v} + \omega_2^2 v = 0 \end{cases}$$

Chú ý đến những điều kiện ban đầu, ta được :

$$\begin{cases} u(t) = (\theta_{1(0)} + \theta_{2(0)})\cos(\omega_1 t) + \left(\dfrac{\dot{\theta}_{1(0)} + \dot{\theta}_{2(0)}}{\omega_1}\right)\sin(\omega_1 t) \\ v(t) = (\theta_{1(0)} - \theta_{2(0)})\cos(\omega_2 t) + \left(\dfrac{\dot{\theta}_{1(0)} - \dot{\theta}_{2(0)}}{\omega_2}\right)\sin(\omega_2 t) \end{cases}$$

với sự làm lộ rõ các kiểu dao động đối xứng ($v = 0$) và phản đối xứng ($u = 0$), sau đó :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \dfrac{1}{2}\Bigg((\theta_{1(0)} + \theta_{2(0)})\cos(\omega_1 t) + (\theta_{1(0)} - \theta_{2(0)})\cos(\omega_2 t) \\ \quad + \left(\dfrac{\dot{\theta}_{1(0)} + \dot{\theta}_{2(0)}}{\omega_1}\right)\sin(\omega_1 t) + \left(\dfrac{\dot{\theta}_{1(0)} - \dot{\theta}_{2(0)}}{\omega_2}\right)\sin(\omega_2 t) \Bigg) \\ \theta_2(t) = \dfrac{1}{2}\Bigg((\theta_{1(0)} + \theta_{2(0)})\cos(\omega_1 t) - (\theta_{1(0)} - \theta_{2(0)})\cos(\omega_2 t) \\ \quad + \left(\dfrac{\dot{\theta}_{1(0)} + \dot{\theta}_{2(0)}}{\omega_1}\right)\sin(\omega_1 t) - \left(\dfrac{\dot{\theta}_{1(0)} - \dot{\theta}_{2(0)}}{\omega_2}\right)\sin(\omega_2 t) \Bigg) \end{cases}$$

2) *Sự liên kết là yếu nếu $C \ll MgL$, thành thử các tần số ω_1 và ω_2 là gần nhau. Để kích thích một cách như nhau cả hai kiểu dao động bằng cách thả các con lắc không có vận tốc, ta phải chọn $\theta_{1(0)} = \theta_0$ và $\theta_{2(0)} = 0$ (tức là $u(0) = v(0)$).*

Khi đó các chuyển động thu được là ;

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \dfrac{1}{2}\theta_0(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \\ \theta_2(t) = \dfrac{1}{2}\theta_0(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) \end{cases}$$

3) *Chúng ta tính $F_i(t)$ bằng cách khai triển các sin và cosin thành tổng và hiệu các hàm mũ phức :*

$$F_1(\omega) = \frac{\theta_0}{2\Delta t}\int_{-\Delta t}^{\Delta t}\left(\frac{e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}}{2} + \frac{e^{j\omega_2 t} + e^{-j\omega_2 t}}{2}\right)e^{j\omega t}\,dt,$$

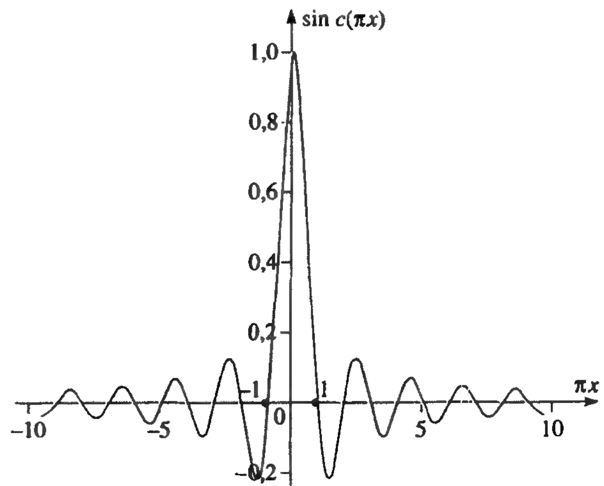
cũng làm như thế với $F_2(\omega)$:

$$F_1(\omega) = \frac{\theta_0}{2}[\sin c((\omega_1 + \omega)\Delta t) + \sin c((\omega_2 + \omega)\Delta t) + \sin c((\omega_1 - \omega)\Delta t) + \sin c((\omega_2 - \omega)\Delta t)]$$

$$F_2(\omega) = \frac{\theta_0}{2}[\sin c((\omega_1 + \omega)\Delta t) - \sin c((\omega_2 + \omega)\Delta t) + \sin c((\omega_1 - \omega)\Delta t) - \sin c((\omega_2 - \omega)\Delta t)]$$

ở đây hàm sin cơ bản được định nghĩa bởi $\sin c(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Đồ thị của hàm $f(x) = \sin c(\pi x)$ được biểu diễn dưới đây. Nó làm lộ rõ bề rộng đặc trưng $\Delta(\pi x) = 2$ ngăn cách hai số không đầu tiên của hàm, ở hai phía của $\pi x = 0$.



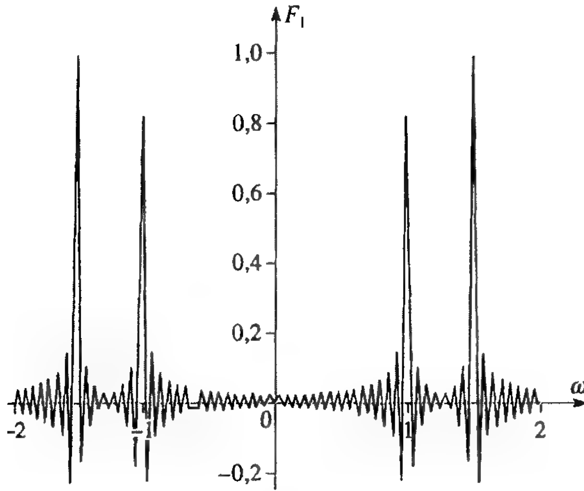
Như vậy các đồ thị của các hàm $F_1(\omega)$ và $F_2(\omega)$ sẽ làm lộ rõ bốn đỉnh (âm hoặc dương) tại $\omega = -\omega_2$, $-\omega_1$, $+\omega_1$ và $+\omega_2$.

Các đỉnh thu được đối với $\omega = \omega_1$ và ω_2 sẽ tách bạch nhau rõ rệt nếu $(\omega_2 - \omega_1)\Delta t \gg 2$. Như vậy phép ghi càng phải lâu hơn nếu các tần số riêng càng gần nhau hơn.

<u>Chú ý :</u>

Có thể thực hiện thao tác này bằng cách dùng máy vi tính để thu được các vị trí $\theta_1(t)$ và $\theta_2(t)$, và dùng các điện thế kế để ghi lại các độ lệch của các con lắc. Các hàm F_1 và F_2 phải được so với các số hạng biến đổi FOURIER của hai phép ghi mà máy vi tính có thể tính toán rồi vẽ ra.

Đồ thị của $F_1(\omega)$ đối với $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1{,}5$ và $\Delta t = 100$ được vẽ ở dưới đây.



8 Định lí mômen động áp dụng cho con lắc thứ n tại điểm cố định O_n, chiếu xuống trục (Oz), với phép gần đúng đối với các góc nhỏ, cho ta :

$$ML^2\ddot{\theta}_n = -MgL\theta_n + KL(\theta_{n-1} - 2\theta_n + \theta_{n+1})$$

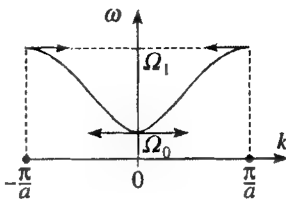
Vậy phương trình lan truyền dọc theo chuỗi các con lắc là :

$$\ddot{\theta}_n = -\Omega_0^2\theta_n + \omega_0^2(\theta_{n-1} - 2\theta_n + \theta_{n+1}) \text{ với } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \text{ và } \Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

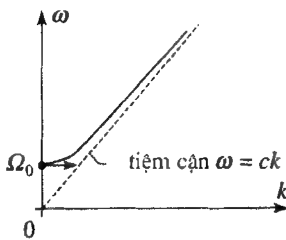
(Ω_0 là tần số riêng của con lắc đơn dao động tự do).

Hệ thức phân tán được xác định bởi phương trình lan truyền đó :

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) + \Omega_0^2 .$$



Dải các tần số cho phép là $[\Omega_0;\Omega_1]$ với $\Omega_1 = \sqrt{4\omega_0^2 + \Omega_0^2}$, hệ thức phân tán được vẽ trên đồ thị ở bên, trong miền BRILLOUIN thứ nhất.



Trong phép gần đúng cho môi trường liên tục, phương trình đó trở thành :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \Omega_0^2\psi = 0,$$

gọi là phương trình KLEIN - GORDON.

Hệ thức phân tán có dạng :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \Omega_0^2}{c^2} .$$

9 1) Các hệ thức liên hệ các dòng điện và các điện áp ở đầu vào và đầu ra của tứ cực thứ n là :

$$\begin{cases} V_{n-1} = V_n + L\dfrac{dI_n}{dt} \\ I_{n-1} = C\dfrac{dV_n}{dt} + \left(I_n + LC\dfrac{d^2I_n}{dt^2}\right) \end{cases}$$

Ma trận chuỗi cần tìm, trong cách kí hiệu phức, là :

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & jL\omega \\ jC\omega & 1 - LC\omega^2 \end{bmatrix}.$$

2) Phương trình chuyển động của khối lượng thứ n là :

$$M\frac{dv_n}{dt} = K(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n) = f_{n-1} - f_n$$

với $f_{n-1} = -K(x_n - x_{n-1})$, tức là :

$$\frac{df_{n-1}}{dt} = -K(v_n - v_{n-1})$$

Từ đó, ta rút ra một hệ phương trình tương tự như ở câu hỏi 1) :

$$\begin{cases} f_{n-1} = f_n + M\dfrac{dv_n}{dt} \\ v_{n-1} = \dfrac{1}{K}\dfrac{df_n}{dt} + \left(v_n + \dfrac{M}{K}\dfrac{d^2v_n}{dt^2}\right) \end{cases}$$

ma trận chuỗi là :

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & jM\omega \\ \dfrac{j\omega}{k} & 1 - \dfrac{M}{K}\omega^2 \end{bmatrix}.$$

3) Sự kích thích ứng với một sự dịch chuyển, tức là ứng với một vận tốc áp đặt vào đầu chuỗi. Cái tương tự điện học của tình huống đó là việc sử dụng một máy phát dòng điện dạng sin đặt ở đầu chuỗi các tứ cực.

Đầu chuỗi các động tử là tự do, vậy $f_n = 0$, cái tương tự điện học là $V_n = 0$: đầu ra của mạch điện phải được đoản mạch.

Sơ đồ sau đây tóm tắt các lập luận đó.

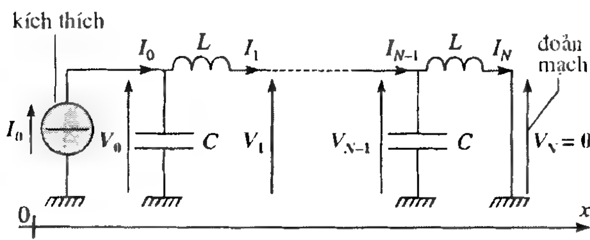
4) Sử dụng ma trận chuỗi, ta viết được :

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{I}_0 \end{bmatrix} = [C]^N \begin{bmatrix} \underline{V}_N \\ \underline{I}_N \end{bmatrix}.$$

Biết rằng đối với trường hợp khảo sát V_n bằng không, hàm truyền $\underline{H} = \dfrac{\underline{I}_N}{\underline{I}_0}$ đồng nhất với nghịch đảo của thành phần thứ hai của vectơ :

$$[C]^N \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vì ma trận chuỗi chứa các số hạng có ω^2, phải chờ đợi thu được một bộ lọc bậc 2N.



5) Sau khi tính được :

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & jL\omega \\ jC\omega & 1 - LC\omega^2 \end{bmatrix}$$

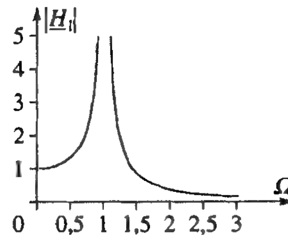
và $[C]^2 = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} & jL\omega\left(2 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \\ jC\omega\left(2 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) & 1 - 3\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + \dfrac{\omega^4}{\omega_0^4} \end{bmatrix}$ với $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ và

$\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, ta được :

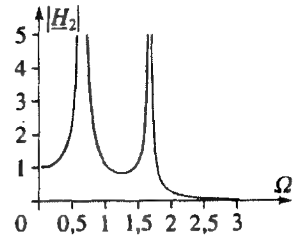
$$\begin{cases} \underline{H}_1 = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \dfrac{1}{1 - \Omega^2} \\ \underline{H}_2 = \dfrac{1}{1 - 3\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + \dfrac{\omega^4}{\omega_0^4}} = \dfrac{1}{1 - 3\Omega^2 + \Omega^4} \end{cases}$$

đó là những hàm truyền của bộ lọc lấy tần số thấp.

• Trường hợp N = 1



• Trường hợp N = 2

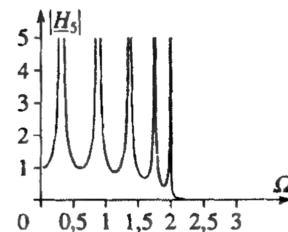


Các đường biểu diễn của $|\underline{H}_1| = f(\omega)$ và $|\underline{H}_2| = f(\omega)$ làm lộ rõ hành vi của các bộ lọc lấy tần số thấp, lần lượt với một và hai cộng hưởng (về lí thuyết là vô hạn) do ω đi qua một tần số riêng của hệ.

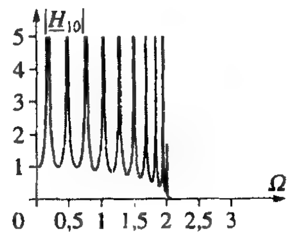
6) Khi N tăng, bộ lọc thu được càng ngày càng "trong suốt" trong miền $\omega < 2\omega_0$. Các giá trị của ω mà $|\underline{H}_N(\omega)|$ là cực đại trùng với một mạch số cộng hưởng. Nhờ những mô hình dưới đây, ta hiển thị được sự biến thiên đó. Đối với N vô hạn, tất cả các mạch số sẽ được truyền qua giữa 0 và $2\omega_0$.

Có một mạch số cắt $\omega_c = 2\omega_0$. Cần so sánh kết quả đó với những quan sát thực hiện trong sự khảo sát lí thuyết ở §3.2 : các sóng lan truyền trong một chuỗi vô hạn các dao động tử, với điều kiện là tần số góc của chúng nằm trong dải tần cho phép $[0; 2\omega_0]$.

• Trường hợp N = 5



• Trường hợp N = 10



DÂY DAO ĐỘNG : PHƯƠNG TRÌNH D'ALEMBERT

2

Mở đầu

Ở chương 1, sự khảo sát hành vi của một chuỗi dao động tử liên kết đã cho phép chúng ta đề cập hiện tượng lan truyền. Trong khuôn khổ phép gần đúng cho môi trường liên tục, sự lan truyền dọc theo chuỗi đó đã được mô tả bởi phương trình lan truyền d'ALEMBERT.

Khi khảo sát ngay từ đầu sự truyền sóng trong một môi trường liên tục – sợi dây dao động – chúng ta sẽ gặp lại phương trình đó. Nhân dịp này, chúng ta sẽ khảo sát vài sóng đặc trưng, là nghiệm của phương trình đó.

JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717 – 1783) được biết đến do sự hợp tác của ông với DIDEROT trong việc xây dựng bộ Bách khoa toàn thư. Các công trình của ông cũng nhằm vào những vấn đề về động lực học, và dẫn ông đến việc nghiên cứu các phương trình vi phân và các phương trình có đạo hàm riêng phần.

MỤC TIÊU

- Sự lan truyền một sóng ngang trên một sợi dây dao động.
- Phương trình d'ALEMBERT, sóng chạy.
- Các kiểu dao động riêng, sự phân tích sóng hài.

Điều cần biết trước

- Tiếp cận sự truyền sóng bằng chuỗi các dao động tử.

1 Phương trình d'ALEMBERT



H.1. *Jean le Rond d'ALEMBERT* (1717 - 1783)

1.1. Quan sát sự lan truyền dọc theo một sợi dây

Một sợi dây mà một đầu gắn vào tường được một người quan sát kéo căng ra (*h.*2). Khi người thực nghiệm lắc mạnh đầu dây, sự dịch chuyển đó không làm cho toàn thể sợi dây đột ngột chuyển động : một sóng đặc trưng bằng sự dịch chuyển của một điểm trên sợi dây truyền đi dọc theo sợi dây, là một môi trường lan truyền vật chất và liên tục.

1.1.1. Sóng ngang và sóng dọc

Chúng ta gặp lại một hiện tượng truyền sóng có những điểm tương tự với sự lan truyền những biến dạng dọc theo một chuỗi những động tử liên kết : sự biến dạng áp đặt cho sợi dây truyền đi dọc theo sợi dây.

Trong cả hai trường hợp, sóng truyền theo phương (Ox) của sợi dây hay của chuỗi dao động tử.

Tuy nhiên :

- chuyển động của các động tử được khảo sát là song song với (Ox) ;
- sự dịch chuyển của sợi dây là vuông góc với phương truyền đó.

Trong trường hợp chuỗi dao động tử, chúng ta nói đến các *sóng dọc*, trong khi trong trường hợp sợi dây thì lại là *sóng ngang*.

1.1.2. Chiều lan truyền - Sóng chạy

Chúng ta quan sát kĩ hơn sự lan truyền dọc theo sợi dây, bằng cách chụp ảnh sợi dây vào những lúc kế tiếp nhau : t_0, $t_1 = t_0 + \Delta t$, $t_2 = t_0 + 2\Delta t$, ... $t_n = t_0 + n\Delta t$ (*h.*2). Chúng ta nhận thấy rằng ở mỗi lần sự biến dạng của sợi dây vẫn là như cũ, nhưng trong khoảng thời gian Δt nó đã di chuyển một đoạn Δx tỉ lệ với Δt :

$$\Delta x = c\Delta t .$$

Như vậy sóng của biến dạng truyền đi với vận tốc c không đổi dọc theo sợi dây, theo chiều tăng của x : đó là một sóng chạy.

Độ dịch chuyển $\psi(x,t)$ của sợi dây nghiệm đúng :

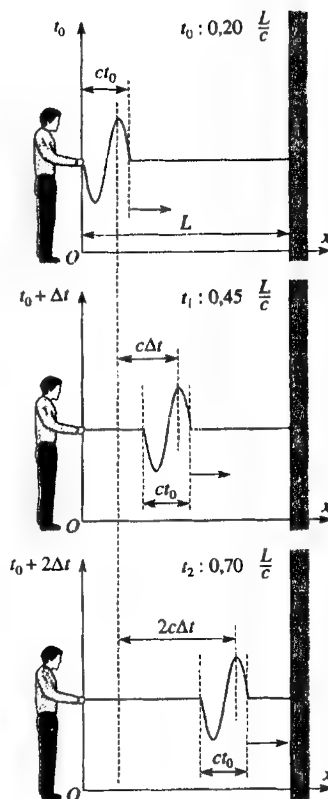
$$\psi(x + c\Delta t, t + \Delta t) = \psi(x,t)$$

Một hàm như vậy sẽ là không đổi nếu $u = t - \dfrac{x}{c}$ được cố định. Nó chỉ phụ thuộc vào biến số duy nhất u :

$$\psi(x,t) = f(u) = f\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Có thể chú ý rằng hàm sóng $\psi(x,t) = f(u(x,t))$ với $u = t - \dfrac{x}{c}$ là một nghiệm của hàm lan truyền d'ALEMBERT, vì rằng :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(u(x,t))}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} f''(u) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$



H.2. *Sự lan truyền một biến dạng đặt vào sợi dây* $\left(c\Delta t = 0,25\dfrac{L}{c}\right)$.

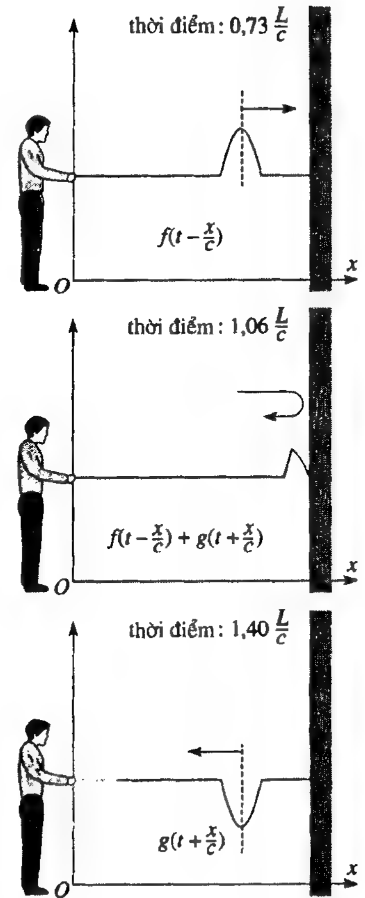
Chú ý :

- *Chúng ta bỏ qua mọi sự giảm dần của biến dạng (điều này bao giờ cũng xảy ra) đang lan truyền dọc theo sợi dây.*

• Một sự quan sát lâu dài hơn (*h*.3) cho phép nhận thấy rằng khi biến dạng truyền tới sát tường, ở điểm gần sợi dây, nó tạo ra một sóng phản xạ truyền trở lại phía người thực nghiệm. Nó ứng với sự lan truyền với vận tốc *c*, theo chiều giảm của *x*, của một sóng chạy có dạng :

$$\psi(x,t) = g(v) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Đến chương 3 chúng ta sẽ quay trở lại hiện tượng này.



H.3. *Sự phản xạ trên tường của biến dạng của sợi dây.*

1.2. Phương trình chuyển động của sợi dây

Sợi dây ta xét có mật độ khối lượng dài μ. Khi sợi dây căng, nói chung trọng lượng ảnh hưởng rất ít đến hình dạng của nó ở thế cân bằng. Sau này chúng ta sẽ bỏ qua trọng lượng đó.

1.2.1. Mô tả các chuyển động ngang nhỏ

Một dây đàn dương cầm bị gõ, một dây đàn ghita bị gẩy, sẽ bắt đầu dao động và phát ra một âm.

Chúng ta kí hiệu :

• $\psi(x,t)$ là độ dịch chuyển dọc của sợi dây ở hoành độ x và vào thời điểm t.

• $\alpha(x,t)$ là góc của đường tiếp tuyến với sợi dây và đường nằm ngang tại x vào thời điểm t (*h*.4).

<u>*Chú ý :*</u>

Để đơn giản, chúng ta chỉ xét những chuyển động của sợi dây nằm trong mặt (xOy). Như vậy chúng ta mô tả chuyển động của nó chỉ bằng một biến vô hướng : độ dịch chuyển $\psi(x,t)$ của nó theo phương (Oy). Những phương trình chúng ta sẽ viết cũng có thể được viết bằng cách xét một dịch chuyển ngang có tính vectơ :

$$\vec{\psi}(x,t) = \psi_y(x,t)\vec{e}_y + \psi_z(x,t)\vec{e}_z.$$

Đến chương 5, chúng ta sẽ lại nói đến vấn đề này, khi xét sự phân cực.

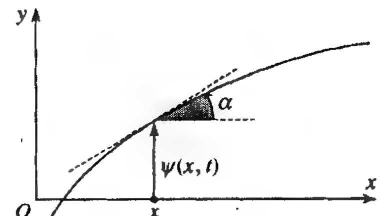
Những sợi dây này dao động mà không lệch đáng kể khỏi vị trí cân bằng của chúng : hình dạng của chúng chủ yếu vẫn là thẳng : góc $\alpha(x, t)$ chỉ độ nghiêng của sợi dây là rất nhỏ. Chúng ta coi nó là một vô cùng nhỏ bậc 1, nó có thể trùng với tang của nó :

$$\alpha(x,t) = \text{tg}\alpha(x,t) = \left(\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right)_x .$$

Hoành độ cong s đo dọc theo dây cung nghiệm đúng :

$$ds = \sqrt{dx^2 + d\psi^2} \approx dx\sqrt{1 + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2} \approx dx$$

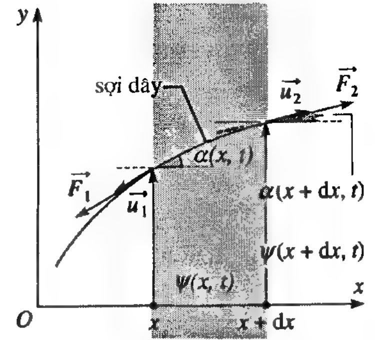
Hoành độ cong đó có thể coi như trùng với hoành độ nằm ngang x, với phép gần đúng bậc 2. Chuyển động của một điểm của sợi dây là không đáng kể theo phương (Ox) nằm ngang (bậc 2) : dao động của sợi dây là các *sóng ngang*.



H.4. *Các kí hiệu được sử dụng để khảo sát chuyển động của một sợi dây.*

1.2.2. Lực căng của sợi dây

Chúng ta kí hiệu $T(x, t)$ là lực căng của sợi dây tại x vào thời điểm t, và khảo sát hệ lực tác dụng lên một nguyên tố của sợi dây, có độ dài dx.



H.5. *Nguyên tố của sợi dây có chiều dài* dx.

■ Sợi dây không có độ cứng

Giả sử sợi dây không có độ cứng : nó hoàn toàn không cản sự xoắn. Trong điều kiện đó, mọi lực đều *tiếp tuyến với sợi dây*. Gọi $\vec{F}(x,t)$ (có các thành phần $F_x(x,t)$ và $F_y(x,t)$) là lực căng mà vào thời điểm t phần sợi dây có hoành độ lớn hơn x tác dụng vào phần sợi dây có hoành độ nhỏ hơn x. Trên nguyên tố của sợi dây ta đang xét (*h*.5), thì :

- phần sợi dây có hoành độ nhỏ hơn x tác dụng lên nguyên tố đó lực $\vec{F_1} = -\vec{F}(x,t) = T(x,t)\vec{u}_1$;
- phần sợi dây có hoành độ lớn hơn x + dx tác dụng lên nguyên tố đó lực $\vec{F_2} = +\vec{F}(x+\mathrm{d}x,t) = T(x+\mathrm{d}x,t)\vec{u}_2$;

$\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ là những vectơ đơn vị tiếp tuyến với sợi dây tại x và x + dx vào thời điểm t.

Chú ý đến các phép gần đúng ($\cos\alpha \approx 1$ và $\sin\alpha \approx \alpha$) thì $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ có các thành phần :

- trên (Ox) :

$$F_{1x} \approx -T(x,t) \text{ và } F_{2x} = -T(x+\mathrm{d}x,t) \text{ ;}$$

- trên (Oy) :

$$F_{1y} \approx -T(x,t)\alpha(x,t) = -F_y(x,t)$$
$$F_{2y} \approx T(x+\mathrm{d}x,t)\alpha(x+\mathrm{d}x,t) = F_y(x+\mathrm{d}x,t)$$

■ Lực căng của sợi dây

Chuyển động của một nguyên tố của sợi dây có độ dài dx là chuyển động ngang.

Ứng dụng hệ thức cơ bản của động lực học vào nguyên tố của sợi dây có độ dài dx, khi chiếu xuống (Ox) ta được : $T(x + \mathrm{d}x, t) - T(x, t) = 0$, tức là $T(x + \mathrm{d}x, t) = T(x, t) = T_0(t)$.

Ở một thời điểm t, lực căng của sợi dây là không đổi dọc theo sợi dây. Chiều dài của sợi dây không đổi (gần đúng bậc 1), lực không đổi đó đồng nhất với giá trị T_0 đặc trưng cho lực căng của sợi dây bất động :

$$T(x,t) = T_0 .$$

Ta rút ra :

$$F_{1y} = -F_y(x,t) = -T_0\alpha(x,t)$$

$$F_{2y} = F_y(x+\mathrm{d}x,t) = T_0\alpha(x+\mathrm{d}x,t) .$$

■ Phương trình của chuyển động ngang

Chúng ta viết hệ thức cơ bản của động lực học cho nguyên tố chiều dài dx (khối lượng μdx) chiếu xuống trục (Oy) :

$$\mu \mathrm{d}x \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = F_{2y} + F_{1y} = F_y(x+\mathrm{d}x,t) - F_y(x,t) = \frac{\partial F_y}{\partial x}\mathrm{d}x = T_0\frac{\partial \alpha}{\partial x}\mathrm{d}x ,$$

do đó :

$$\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial\alpha}{\partial x} = T_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} .$$

1.2.3. Phương trình lan truyền

Chúng ta lại tìm được một phương trình lan truyền d'ALEMBERT :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \text{ với } c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}.$$

Đại lượng $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$, đồng nhất với một vận tốc, đặc trưng cho sự lan truyền đó.

Giống như độ dịch chuyển $\psi(x, t)$, vận tốc $v(x,t) = \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$ và góc $\alpha(x, t)$ cũng nghiệm đúng phương trình lan truyền d'ALEMBERT.

1.2.4. Các phương trình liên kết

Ta đã thu được phương trình lan truyền bằng cách xuất phát từ hai phương trình liên kết gắn bó $F(x, t)$ và $\psi(x, t)$: $\begin{cases} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial F_y}{\partial x} \\ F_y = T_0\alpha = T_0\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases}$. Có thể làm cho hệ phương trình liên kết này "đối xứng hơn" bằng cách đưa vào vận tốc dịch chuyển ngang $v(x,t) = \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$. Ta rút ra :

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial(-F_y(x,t))}{\partial x} \\ \frac{\partial(-F_y(x,t))}{\partial t} = -T_0\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \end{cases}$$

Hiện tượng lan truyền được chứa đựng trong hệ phương trình *liên kết* này, hệ này thể hiện sự liên hệ những biến thiên của vận tốc ngang $v(x, t)$ và của thành phần ngang $F(x, t)$ của lực căng của sợi dây.

Một biến dạng của sợi dây kéo theo sự xuất hiện một lực $F(x, t)$, bản thân lực đó lại có thể kéo theo một vận tốc dịch chuyển v.v... Chúng ta lại tìm thấy ở đây một sự liên kết tương tự như sự liên kết đã tạo ra sự lan truyền một biến dạng trong chuỗi các khối lượng liên kết bởi các lò xo, đã khảo sát ở chương 1.

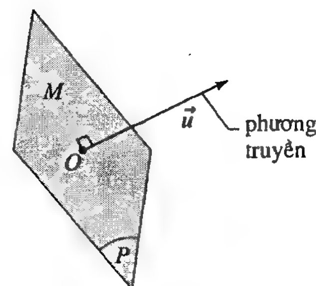
2 Sóng phẳng chạy (SPC)

2.1. Sóng phẳng

Trong chương 1, chúng ta đã nêu lên rằng sự lan truyền sóng là một hiện tượng thể hiện dưới những dạng ít hoặc nhiều phức tạp, trong nhiều hệ vật lí.

Trong nhiều trường hợp, sự lan truyền của một sóng có thể diễn ra theo cả ba phương của không gian (sóng âm, sóng điện từ, ...). Khi đó sóng được đặc trưng tại điểm M vào lúc t bởi giá trị của một trường vô hướng (hoặc trường vectơ) có dạng $\psi(M, t) = \psi(x, y, z, t)$.

Sóng được gọi là sóng phẳng nếu vào một lúc đã cho trước đại lượng đặc trưng cho sóng đang lan truyền là như nhau tại tất cả các điểm của một mặt phẳng vuông góc với phương truyền sóng (*h*.6).



H.6. *Vào một thời điểm t cho trước, tất cả các đại lượng đặc trưng cho sóng phẳng phải là như nhau trong mặt phẳng P vuông góc với phương truyền đánh dấu bởi vectơ đơn vị $\vec{u}$.*

Những thí dụ chúng ta đã xét cho tới nay ứng với những trường hợp lan truyền theo một chiều : bản chất của môi trường (sợi dây, ...) hạn chế sự truyền sóng chỉ theo một phương của không gian, và hàm sóng có dạng $\psi(x, t)$. Các sóng này là phẳng.

Tên gọi "sóng phẳng" lúc này có vẻ như thừa. Từ ngữ này sẽ mang đầy đủ ý nghĩa của nó khi chúng ta đề cập sự khảo sát các sóng có thể truyền đi theo nhiều phương của không gian : khi đó các sóng phẳng sẽ là các sóng đặc biệt, và đặc biệt đơn giản.

2.2. Sóng phẳng chạy

Ở chương 1, cũng như ở §1.1.2 của chương này, chúng ta đã rút ra khái niệm sóng chạy, nó truyền đi với vận tốc c theo một phương song song với (Ox).

Một sóng phẳng chạy là một sóng phẳng truyền theo một phương và một chiều xác định rõ ràng.

2.2.1. Sóng phẳng chạy truyền theo chiều tăng của x

Hàm sóng :

$$\psi(x, t) = f(u),$$

trong đó $u = t - \frac{x}{c}$, ứng với một sóng phẳng chạy truyền đi với vận tốc c theo chiều tăng của x, vì $\psi(x + \Delta t, t + \Delta t) = \psi(x, t)$ nếu $\Delta x = c\Delta t$ (*h*.7a).

Chúng ta cũng biết rằng đó là một nghiệm của phương trình d'ALEMBERT.

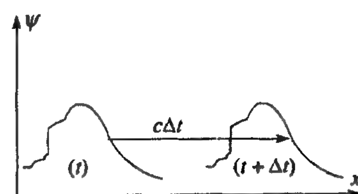
2.2.2. Sóng phẳng chạy truyền theo chiều giảm của *x*

Tương tự như vậy, hàm sóng :

$$\psi(x, t) = f(v),$$

trong đó $v = t + \frac{x}{c}$, ứng với một sóng phẳng chạy truyền đi với vận tốc c theo chiều giảm của x, vì $\psi(x + \Delta x, t + \Delta t) = \psi(x, t)$ nếu $\Delta x = -c\Delta t$ (*h*.7b).

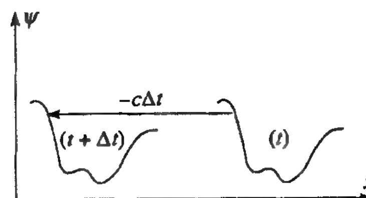
Đó cũng là một nghiệm của phương trình d'ALEMBERT.



H.7a. *Sóng phẳng chạy truyền theo chiều tăng của x.*

2.3. Nghiệm tổng quát của phương trình d'ALEMBERT

Các sóng $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ và $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ là nghiệm của phương trình d'ALEMBERT, chúng ta có thể quan sát sự lan truyền của chúng dọc theo sợi dây dao động. Sự quan sát các nghiệm đó khiến chúng ta ưng dùng những biến số độc lập (u, v) hơn là những biến số độc lập (x, t) để tìm cách giải phương trình d'ALEMBERT.



H.7b. *Sóng phẳng chạy truyền theo chiều giảm của x.*

Viết một cách tổng quát vi phân của hàm sóng :

$$d\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_t dx + \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_x dt = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_v du + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_u dv,$$

ta có :

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_t + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_t = \frac{1}{c}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\right)$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\right),$$

và sau đó :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right).$$

Viết theo các biến số(u, v), phương trình d'ALEMBERT :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

có một dạng rất đơn giản :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v} = 0.$$

Lấy tích phân phương trình vi phân đó đối với u, ta được :

$$\frac{\partial\psi}{\partial v} = G(v).$$

Một phép tính phân tích hai đối với v cho ta :

$$\psi(u, v) = f(u) + g(v).$$

Các sóng $\psi(x, t)$ là nghiệm của phương trình lan truyền d'ALEMBERT một chiều :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

có thể viết được một cách tổng quát dưới dạng sự chồng chập của hai sóng phẳng chạy :

- $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ **truyền với vận tốc c theo chiều tăng của x ;**
- $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ **truyền với vận tốc c theo chiều giảm của x :**

$$\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

2.4. Sóng phẳng chạy đơn sắc Các nghiệm của phương trình d'ALEMBERT

2.4.1. Các nghiệm dạng sin của phương trình d'ALEMBERT

Với nhận thức rằng các sóng mà chúng ta khảo sát cho tới nay ứng với những chuyển động dao động của các hệ bền, chúng ta có thể đi tìm những nghiệm của phương trình d'ALEMBERT phụ thuộc thời gian theo kiểu dạng sin.

Chúng ta hãy tìm, theo cách kí hiệu phức, một nghiệm có dạng :

$$\underline{\psi}(x,t)=\underline{\varphi}(x)e^{j\omega t}.$$

Phương trình lan truyền được nghiệm đúng cho mọi giá trị của t đòi hỏi :

$$\frac{d^2\underline{\varphi}}{dx^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\underline{\varphi}(x)=0,$$

Nghiệm tổng quát của nó có dạng :

$$\underline{\varphi}(x)=\underline{\psi}_{01}e^{-jkx}+\underline{\psi}_{02}e^{jkx}$$

với : $\underline{\psi}_{01}=\psi_{01}e^{j\phi_{01}}$ và $\underline{\psi}_{02}=\psi_{02}e^{j\phi_{02}}$,

trong đó ta đã kí hiệu $k=\frac{\omega}{c}$ (đôi khi k được gọi là số sóng). Vậy các nghiệm dạng sin ta tìm có dạng :

$$\underline{\psi}(x,t)=\underline{\psi}_{01}e^{j(\omega t-kx)}+\underline{\psi}_{02}e^{j(\omega t+kx)},$$

trong phép kí hiệu thực, chúng là :

$$\psi(x,t)=\psi_{01}\cos(\omega t-kx+\phi_{01})+\psi_{02}\cos(\omega t+kx+\phi_{02}).$$

Chúng ta nhận thấy ở đây dạng tổng quát đã thu được trước kia với :

$$f\left(t-\frac{x}{c}\right)=\psi_{01}\cos(\omega t-kx+\phi_{01})$$

và $$g\left(t+\frac{x}{c}\right)=\psi_{02}\cos(\omega t+kx+\phi_{02}).$$

Mỗi số hạng của nghiệm đặc trưng cho một sóng phẳng chạy đơn sắc (SPCĐS).

Chú ý :

Tính từ "đơn sắc" có vẻ như là tùy tiện. Tuy nhiên, chúng ta sẽ thấy rằng sự lan truyền các sóng điện từ có những sự tương tự với sự khảo sát mà ta đã tiến hành ở đây. Hơn nữa, đối với các sóng điện từ trong miền nhìn thấy, cảm giác màu sắc do mắt thụ nhận ánh sáng gắn với tần số sóng : ứng với một tần số chính xác là một màu sắc nhất định trong phổ nhìn thấy, đi từ màu đỏ đến màu tím. Mở rộng ra, người ta thường nói rằng một sóng dạng sin có tần số xác định là một sóng đơn sắc.

2.4.2. Những đặc trưng của sóng phẳng chạy đơn sắc (SPCĐS)

Dựa trên những nghiệm mà ta vừa thu được, bây giờ ta có thể đưa ra vài đặc trưng đáng chú ý của các SPCĐS, dù chúng là nghiệm của phương trình d'ALEMBERT hay của một phương trình lan truyền nào khác.

Một sóng phẳng chạy đơn sắc lan truyền theo một phương song song với trục (Ox) theo chiều tăng của x, thì có một biên độ có dạng :

$\underline{\psi}(x,t)=\underline{\psi}_0e^{j(\omega t-kx)}$ trong cách kí hiệu phức, với $\underline{\psi}_0=\psi_0e^{j\phi_0}$

hoặc $\psi(x,t)=\psi_0\cos(\omega t-kx+\phi_0)$ trong cách kí hiệu thực.

Nó được đặc trưng bằng tần số ω và vectơ sóng $\vec{k} = k\vec{e}_x$, và có hai chu kì : một chu kì thời gian $T = \frac{2\pi}{\omega}$ và một chu kì không gian $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Vận tốc lan truyền của nó bằng vận tốc lan truyền pha của nó, hay là vận tốc pha : $v_\phi = \frac{\omega}{k}$.

2.4.3. Cách kí hiệu phức

Cách kí hiệu $e^{j(\omega t - kx)}$ được vận dụng dễ dàng trong các phép tính gắn với các phương trình có đạo hàm riêng phần mô tả các hiện tượng vật lí được khảo sát. Các đạo hàm theo không gian và theo thời gian của $e^{j(\omega t - kx)}$ ứng với các hệ số $-jk$ hoặc $+j\omega$:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{j(\omega t - kx)} = j\omega e^{j(\omega t - kx)} \text{ và } \frac{\partial}{\partial x} e^{j(\omega t - kx)} = -jke^{j(\omega t - kx)}$$

Nói chung, một phương trình có đạo hàm riêng phần được sóng $\underline{\psi}(x,t)$ nghiệm đúng thì quy về một phương trình đại số đơn giản trong đó có các thừa số $j\omega$ và jk.

Chú ý :

• *Trong những phần sau của giáo trình này, chúng ta sẽ gặp những sóng lan truyền theo mọi phương của không gian, và sẽ dùng cách kí hiệu phức :*

$$\underline{\psi}(M,t) = \underline{\psi}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \text{ với } \vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

để chỉ biên độ một sóng phẳng chạy đơn sắc lan truyền theo một phương do vectơ sóng $\vec{k}$ của nó chỉ rõ.

• Cách kí hiệu phức $e^{j(kx - \omega t)}$ cũng có thể được sử dụng, vì $\cos(\omega t - kx) = \mathcal{R}e[e^{\pm j(kx - \omega t)}]$. Trong trường hợp này chỉ cần đổi dấu trong các biểu thức trước đó. Khi đã lựa chọn một cách kí hiệu, tất nhiên là phải duy trì cách đó suốt trong quá trình khảo sát. Tuy nhiên việc này không làm thay đổi cái gì khi chúng ta quay trở về cách kí hiệu thực : rõ ràng đó vẫn là hiện tượng vật lí ấy. Trong sách này, chúng ta sẽ chỉ dùng cách kí hiệu phức $e^{j(\omega t - kx)}$.

2.4.4. Hệ thức tán sắc

Theo những điều đã nói trên thì sự tương thích của một sóng đơn sắc :

$$\underline{\psi}(x,t) = \psi_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

với phương trình lan truyền bắt buộc phải có một hệ thức giữa ω và k.

Phương trình lan truyền bắt buộc phải có một hệ thức gắn ω và k, gọi là *hệ thức tán sắc*.

Như vậy, trong trường hợp một sóng $\psi_0 e^{j(\omega t - kx)}$ là nghiệm của phương trình d'ALEMBERT, phương trình lan truyền :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) e^{j(\omega t - kx)} = 0$$

bắt buộc phải có hệ thức tán sắc :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

3 Sóng dừng

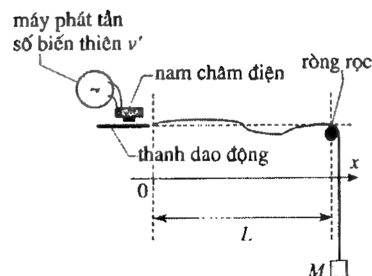
3.1. Sự tạo thành sóng dừng : sợi dây MELDE

3.1.1. Thiết bị thí nghiệm

Một sợi dây được căng ra giữa hai đầu (*h.*8) :

• đầu thứ nhất là một thanh rung chịu tác dụng của một nam châm điện kích thích, nó thực hiện những dao động nhỏ thẳng đứng với tần số ν (chú ý : trong trường hợp đang xét, sự có mặt của nam châm điện bắt buộc tần số kích thích ν của sợi dây phải bằng hai lần tần số ν' của dòng điện đi qua nam châm điện $\nu = 2\nu'$).

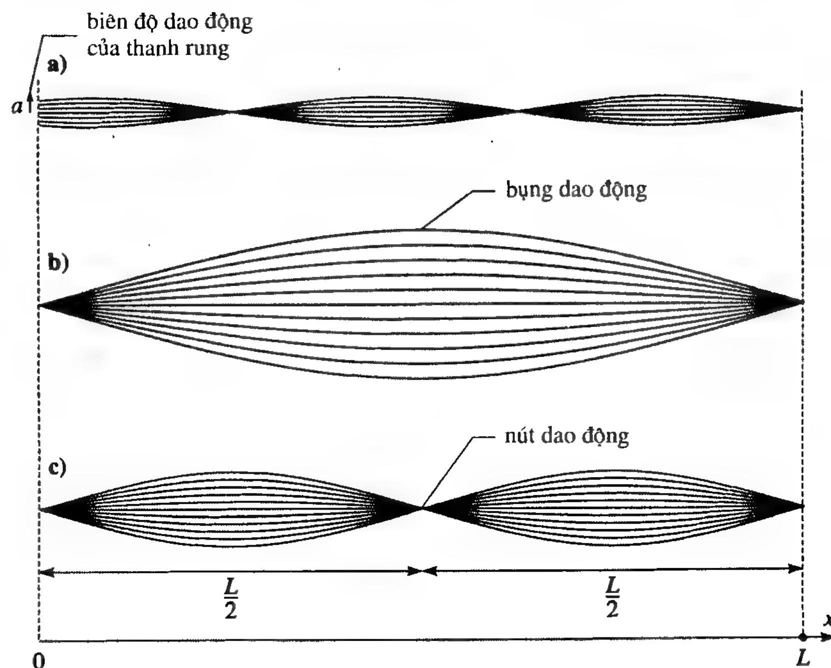
• đầu thứ hai là một ròng rọc, sợi dây vắt qua nó được căng bởi trọng lượng của một khối lượng M điều chỉnh được. Lực căng của sợi dây khi đó bằng Mg : $T_0 = Mg$.



H.8. *Kích thích sợi dây MELDE. Với thiết bị này, sợi dây được kích thích ở tần số $\nu = 2\nu'$ (có mặt nam châm điện).*

3.1.2. Quan sát các sóng dừng

Sau một chế độ chuyển tiếp trong một thời gian ngắn, sợi dây thực hiện những dao động cưỡng bức theo tần số ν do thanh rung áp đặt và tạo ra những "múi dao động" (*h.9a*).



H.9. *Sợi dây MELDE có độ căng và độ dài không đổi, kích thích bởi một tần số biến đổi.*
a. *Tần số bất kì.*
b. *Cộng hưởng thứ nhất.*
c. *Cộng hưởng thứ hai.*

Có thể nhận xét rằng các dao động này diễn ra tại chỗ và không lan truyền đi : chúng ta nói rằng sợi dây là nơi diễn ra những *sóng dừng*.

Chúng ta cho tần số ν của thanh rung biến thiên.

Nói chung biên độ các dao động là nhỏ (cùng bậc với biên độ a của thanh rung ; xem *hình* 9a), nhưng đối với một số tần số ν_n, tần số đó có thể lớn lên đáng kể (*h.*9b và 9c) : sợi dây có cộng hưởng.

Trên *hình 9*, chúng ta nhận thấy rằng đối với một tần số nhất định, tại một số điểm cố định và cách đều nhau, sợi dây có :

- những cực đại của dao động, gọi là *bụng dao động* ;
- những cực tiểu bằng không của dao động, gọi là *nút dao động* ;

Khi có cộng hưởng, thanh rung hầu như trùng với một nút dao động (xem *Áp dụng 1*), và khoảng cách giữa hai nút dao động bằng :

- độ dài L của sợi dây khi nó chỉ có một múi (*h.*9b) ;
- $\frac{L}{2}$ khi sợi dây có hai múi (*h.*9c) ;
- $\frac{L}{3}$ khi sợi dây có ba múi, ...

3.1.3. Định nghĩa sóng dừng

Trong quá trình thí nghiệm ở trên, một điểm của sợi dây có tọa độ x thực hiện những dao động $\psi(x,t)$ mà biên độ F chỉ phụ thuộc x (không phụ thuộc t), $\psi(x, t)$ chuyển sang dạng :

$$\psi(x,t) = F(x)\cos(\omega t + \varphi) \text{ với } \omega = 2\pi\nu .$$

Trong biểu thức này, các biến x và t đã bị tách riêng. Sự phụ thuộc vào $(x - ct)$ hoặc $(x + ct)$ không còn nữa, nên không có sự lan truyền : $\psi(x, t)$ biểu diễn một sóng dừng (ở đây là phẳng).

Các sự phụ thuộc của một sóng dừng vào các biến số không gian và thời gian đã được tách rời.

Một sóng dừng phẳng được biểu diễn trong cách kí hiệu thực bằng một hàm có dạng :

$$\psi(x, t) = F(x)G(t)$$

Các sóng dừng nói chung là rất thích hợp để mô tả các sóng trong một môi trường mà một số điều kiện biên được áp đặt cho mọi giá trị của t.

Chú ý :

Một sóng biểu diễn bởi $\underline{\psi} = \psi_0 e^{j(\omega t - kx)} = \psi_0 e^{j\omega t} e^{-jkx}$ trong cách kí hiệu phức thì có dạng $\underline{\psi} = \underline{F}(x)\underline{G}(x)$. Nhưng đó không phải là một sóng dừng, vì nó biểu thị sóng thực $\psi = \psi_0 \cos(\omega t - kx)$, là một sóng phẳng chạy đơn sắc (giả định ψ_0 là thực).

3.2. Các nghiệm dừng của phương trình d'ALEMBERT

Xét một hàm sóng có biến số tách riêng :

$$\psi(x,t) = F(x)G(t)$$

Khi hàm này là nghiệm của phương trình d'ALEMBERT, ta được :

$$F''(x)G(t) - \frac{1}{c^2} F(x)G''(t) = 0$$

vậy : $$c^2\frac{F''(x)}{F(x)}=\frac{G''(t)}{G(t)}=A \text{ với } A=\text{const}$$

vì hai vế đầu bằng nhau phụ thuộc các biến số độc lập x và t tương ứng.

Nếu chúng ta tìm một nghiệm chấp nhận được cho mọi giá trị của x và t, chúng ta phải gạt bỏ các nghiệm phân kì ở vô cực, vì vậy chỉ xét trường hợp mà hằng số hoàn toàn là âm : $A=-\omega^2$ (trường hợp một hằng số bằng không là không đáng quan tâm).

Khi đó ta được :

$$G(t)=G_0\cos(\omega t+\varphi_G)$$

$$F(x)=F_0\cos(kx+\varphi_F) \text{ với } k=\frac{\omega}{c}.$$

Một sóng dừng dao động "tại chỗ" theo dạng sinh (sóng này là đơn sắc) và là nghiệm của phương trình d'ALEMBERT, được viết thành :

$$\psi(x,t)=\psi_0\cos(kx+\varphi_F)\cos(\omega t+\varphi_G)$$

Chúng ta thừa nhận rằng một sóng dừng bất kỳ có thể được đặt dưới dạng một sự chồng chập các nghiệm thuộc loại các nghiệm mà ta vừa tìm được. Vì phương trình d'ALEMBERT là tuyến tính, một sóng như vậy thu được bằng phép chồng chập thì cũng là nghiệm của phương trình đó (xem §3.3.3).

<u>Chú ý :</u> Sự chuyển từ sóng dừng sang sóng chạy.

Tất nhiên nghiệm mà ta vừa tìm được phải nhập vào sơ đồ chung của các nghiệm của phương trình d'ALEMBERT :

$$\psi(x,t)=f\left(t-\frac{x}{c}\right)+g\left(t+\frac{x}{c}\right)$$

Để thấy rõ được điều đó, ta hãy viết :

$$\psi(x,t)=\psi_0\cos(kx+\varphi_F)\cos(\omega t+\varphi_G)$$

$$=\frac{\psi_0}{2}\left[\cos\left(\omega t-kx+\frac{\varphi_G-\varphi_F}{2}\right)\cos\left(\omega t+kx+\frac{\varphi_G+\varphi_F}{2}\right)\right]$$

nó làm lộ rõ sự khai triển ta cần tìm.

Áp dụng 1

Sợi dây MELDE

Trong thí nghiệm về sợi dây MELDE, thanh rung thực hiện những dao động dạng sin có biên độ a : $\psi(0,t)=a\cos\omega t$.

Sợi dây có độ dài L, được gắn chặt ở đầu kia, lực căng của sợi dây là T_0 $\left(c=\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}\right)$.

1) *Xác định những độ dịch chuyển $\psi(x, t)$ của mọi điểm của sợi dây vào mọi lúc.*

2) *Giải thích và bình luận hiện tượng cộng hưởng. Cho biết giá trị của các tần số cộng hưởng.*

1) Nghiệm dừng dạng sin :

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cos(kx + \varphi_F)\cos(\omega t + \varphi_G)$$

với $k = \frac{\omega}{c}$ là thích hợp, nếu nó thỏa mãn các điều kiện biên, tức là :

$$\begin{cases} \psi(0,t) = a\cos\omega t \\ \psi(L,t) = 0 \end{cases}$$

Điều này được thực hiện nếu ta lấy $\varphi_F = \frac{\pi}{2} - kL$, $\varphi_G = 0$ và $\psi_0 = \frac{a}{\sin kL}$, do đó :

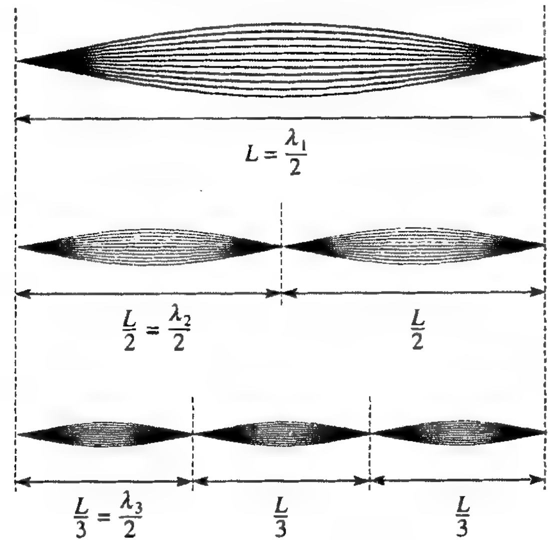
$$\psi(x,t) = \frac{a}{\sin kL}\sin k(L-x)\cos\omega t.$$

2) Chúng ta nhận thấy rằng đối với $k = k_n = \frac{n\pi}{L}$ (n nguyên), thì $\psi(x, t)$ trở thành vô hạn (về lí thuyết), sợi dây bắt đầu cộng hưởng.

Thực ra, những sự tắt dần không thể tránh khỏi, độ cứng của sợi dây (mà ta đã bỏ qua khi thành lập phương trình d'ALEMBERT), không còn có thể bỏ qua được khi có cộng hưởng và tất nhiên chúng giới hạn biên độ của các dịch chuyển của sợi dây.

Khi có cộng hưởng, a là rất nhỏ so với biên độ các bụng dao động. Do đó thanh rung hầu như có thể coi là một nút dao động của sợi dây.

Các tần số cộng hưởng υ_n có giá trị $\upsilon_n = n\frac{c}{2L}$ và độ dài L của sợi dây nghiệm đúng $L = n\frac{\lambda_n}{2}$, khi ta đưa vào bước sóng $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$ của bậc thứ tự đơn sắc (*h.*10).



H.10. *Sợi dây MELDE đang cộng hưởng.*
a. *Cộng hưởng thứ nhất : $n = 1$.*
b. *Cộng hưởng thứ hai : $n = 2$.*
c. *Cộng hưởng thứ ba : $n = 3$.*

3.3. Dao động tự do của một sợi dây cố định ở hai đầu

Chúng ta đặt vấn đề đi tìm các nghiệm của phương trình lan truyền các chuyển động ngang trên một sợi dây có độ dài L cố định ở hai đầu (*h.*11).

3.3.1. Tìm các nghiệm

Dạng tổng quát của các nghiệm là $\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$. Ở mọi thời điểm t, nó phải nghiệm đúng các điều kiện biên sau đây :

$$\psi(0, t) = 0, \text{ do đó } f(t) + g(t) = 0$$

và : $$\psi(L, t) = 0, \text{ do đó } f\left(t - \frac{L}{c}\right) + g\left(t + \frac{L}{c}\right) = 0$$



H.11. *Dao động tự do của một sợi dây cố định ở hai đầu.*

Và hàm f nghiệm đúng :

$$f\left(t-\frac{L}{c}\right)=-g\left(t+\frac{L}{c}\right)=f\left(t+\frac{L}{c}\right).$$

Các điều kiện biên bắt buộc hàm f (do đó, cả g nữa) phải là hàm *tuần hoàn*, có chu kì thời gian $T=\frac{2L}{c}$. Vậy nó có thể được khai triển thành chuỗi FOURIER (cũng như *tất cả* các hàm tuần hoàn "vật lí"). Tần số vòng cơ bản là $\omega_0=\frac{\pi c}{L}$ và tần số tương ứng là $\nu_0=\frac{c}{2L}$.

Như vậy, ta có thể viết :

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega_0 t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\omega_0 t).$$

Các giá trị của $f\left(t-\frac{x}{c}\right)$ và $g\left(t+\frac{x}{c}\right)=-f\left(t+\frac{x}{c}\right)$ được suy ra từ đó và dạng tổng quát của các sóng lan truyền dọc theo một sợi dây cố định ở hai đầu là :

$$\psi(x,t)=\begin{cases}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(n\omega_0\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(n\omega_0\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\\ -a_0-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(n\omega_0\left(t+\frac{x}{c}\right)\right)-\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(n\omega_0\left(t+\frac{x}{c}\right)\right)\end{cases}$$

Kí hiệu $A_n=-2b_n$ và $B_n=2a_n$ ta được :

$$\psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n\cos(n\omega_0 t)+B_n\sin(n\omega_0 t)\right)\sin\left(n\omega_0\frac{x}{c}\right)\right]$$

Các biến x và t đã được tách riêng trong biểu thức này, nghiệm này là một *sóng dừng*.

3.3.2. Các kiểu dao động riêng

Biểu thức $\psi(x,t)$ tìm thấy ở trên là kết quả của một sự chồng chập của các sóng dừng đơn sắc có dạng :

$$F_n(x)G_n(t)=\sin\left(n\omega_0\frac{x}{c}\right)\left(A_n\cos(n\omega_0 t)+B_n\sin(n\omega_0 t)\right)$$

$$=F_{0n}\sin\left(n\omega_0\frac{x}{c}\right)G_{0n}\sin(n\omega_0 t+\varphi_n).$$

Các hàm F_n và G_n là các hàm dao động :

$$F_n(x)=F_{0n}\sin\left(2\pi x\frac{n}{2L}\right)=F_{0n}\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda_n}\right)$$

$$G_n(t)=G_{0n}\sin\left(2\pi t\frac{nc}{2L}+\varphi_n\right)=G_{0n}\sin(2\pi\upsilon_n t+\varphi_n),$$

sao cho :

- chu kì không gian của $F_n(x)$ là $\lambda_n=\frac{1}{n}2L=\frac{\lambda_0}{n}$ với $\lambda_0=2L$;

• chu kì thời gian của $G_n(t)$ là $\nu_n = n\frac{c}{2L} = n\nu_0$ với $\nu_0 = \frac{c}{2L}$;

• $c = \lambda_0\nu_0 = \lambda_n\nu_n$ (n nguyên)

Chúng ta nhận thấy rằng chỉ có một tập hợp gián đoạn các kiểu dao động tự do của sợi dây mới có thể tồn tại vô thời hạn mà không cần đưa năng lượng từ ngoài vào (nếu ta bỏ qua mọi hiệu ứng phân tán) : đó là các *kiểu dao động riêng của sợi dây dao động.*

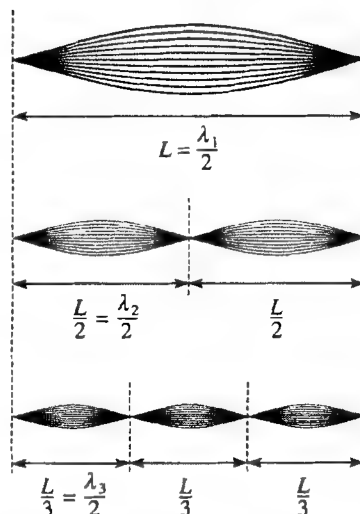
Hình 12 biểu diễn dáng vẻ của sợi dây khi nó dao động theo một trong ba kiểu dao động riêng đầu tiên, có các tần số :

• $\nu_1 = \nu_0 = \frac{c}{2L} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ và $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$, tức là $L = \frac{\lambda_0}{2}$;

• $\nu_2 = 2\nu_0$ và $\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{2}$, tức là $L = 2\frac{\lambda_2}{2}$;

• $\nu_3 = 3\nu_0$ và $\lambda_3 = \frac{\lambda_0}{3}$, tức là $L = 3\frac{\lambda_3}{2}$; ...

• một cách tổng quát hơn, ta sẽ có : $\nu_n = n\nu_0$ và $\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}$, tức là $L = n\frac{\lambda_n}{2}$.



H.12. *Các kiểu dao động riêng của một sợi day cố định ở hai đầu.*
a. *Kiểu* $n = 1$.
b. *Kiểu* $n = 2$.
c. *Kiểu* $n = 3$.

Kiểu thứ nhất, có tần số thấp nhất, gọi là *kiểu cơ bản.* Các kiểu khác, gọi là các *họa ba,* có một tần số là bội nguyên của tần số kiểu cơ bản.

Các sóng truyền tự do dọc theo một sợi dây có độ dài L, cố định ở hai đầu $x = 0$ và $x = L$, là những sự chồng chập của các sóng dừng đơn sắc có chu kì không gian λ_n và chu kì thời gian ν_n đã lượng tử hóa. Đó là những kiểu dao động riêng của sợi dây dao động :

$$\nu_n = n\nu_0 = n\frac{c}{2L} \text{ và } \lambda_n = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2L}{n}.$$

Biên độ của chúng có dạng :

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(A_n \cos 2\pi\nu_n t + B_n \sin 2\pi\nu_n t)\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda_n}\right)\right].$$

Chú ý :

• *Các kết quả này tương tự như các kết quả đã mô tả ở chương 1 đối với một chuỗi N dao động tử. Tuy nhiên trong trường hợp môi trường liên tục này, số lượng các kiểu dao động riêng hình dung được có vẻ là vô hạn : các tần số riêng của sợi dây* $\nu_n = n\frac{c}{2L}$ *tăng từ* $\nu_1 = \frac{c}{2L}$ *đối với họa âm cơ bản lên đến vô hạn (trong khi N dao động tử liên kết lại có một tần số cắt cao). Nếu như điều đó về mặt toán học có vẻ là khả dĩ, thì mô hình vật lí ta khảo sát phải được xem xét lại đối với các tần số cao, tức là các bước sóng ngắn : vì sợi dây lúc đó có hình dạng rất "xáo động", độ cứng của nó sẽ không còn có thể bỏ qua được nữa.*

• *Trong thí nghiệm sợi dây MELDE, ta quan sát được một lần cộng hưởng mỗi khi tần số kích thích ứng với tần số của một kiểu dao động riêng của sợi dây.*

Áp dụng 2

Khảo sát các kiểu dao động riêng của một sợi dây

Trong một lần thí nghiệm với sợi dây MELDE, người ta thấy các kết quả sau đây :

1) *Với cùng một độ dài L của sợi dây và cùng một khối lượng M mắc vào nó, người ta thu được những kết quả sau đây :*

- *tần số cộng hưởng* 19Hz *đối với hai múi ;*
- *tần số cộng hưởng* 28Hz *đối với ba múi.*

a) *Các giá trị bằng số đó có tương thích với nhau không ?*

b) *Các tần số cộng hưởng tiếp theo sẽ là bao nhiêu ?*

2) *Độ dài sợi dây là L =* 117cm. *Vận tốc truyền c của một nhiễu loạn trên sợi dây đó là bao nhiêu ?*

3) *Khối lượng M mắc vào sợi dây bằng* M = 25g.

a) *Độ căng của sợi dây là bao nhiêu ?*

b) *Rút ra một bậc độ lớn của mật độ khối lượng dài của sợi dây.*

1) a) Đặt $\nu_2 = 19\text{Hz}$ và $\nu_3 = 28\text{Hz}$, ta phải có $\frac{\nu_2}{2} = \frac{\nu_3}{3} = \nu_0$, tức là $\frac{\nu_3}{\nu_2} = 1,5$.

Thế mà $\frac{\nu_3}{\nu_2} = 1,47$, điều đó có nghĩa là các số đó tương thích với nhau. Ta thu được một giá trị của ν_0 gần với $\nu_0 = 9,4\text{Hz}$.

b) Các tần số tiếp theo được cho bởi công thức $\nu_n = n\nu_0$, tức là :

$$\nu_4 = 38\text{Hz}, \qquad \nu_5 = 47\text{Hz}, \ldots$$

2) Biết rằng độ dài sợi dây là $L = 1,17\text{m}$, $\lambda_0 = 2,34\text{m}$; vậy vận tốc c là :

$$c = \lambda_0 \nu_0 = 22\text{m.s}^{-1}$$

3) a) Vì khối lượng M bằng 25g, nên độ căng của sợi dây là $T_0 = 0,25\text{N}$ (với $g \approx 10\text{m.s}^{-2}$).

b) Vì vận tốc lan truyền c bằng $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$, trong đó μ là mật độ khối lượng dài của sợi dây, ta có :

$$\mu = \frac{T_0}{c^2},$$

tức là $\mu = 5,2.10^{-4}\text{kg.m}^{-1}$. Do đó, với độ chính xác của các tần số thì : $\mu = 0,5\text{g.m}^{-1}$.

Giá trị đó có thể so sánh với giá trị thu được khi ta cân, chẳng hạn, 10m dây chỉ trên một cái cân chính xác !

3.4. Sự phân tích sóng hài

Từ nay trở đi, ta đã biết rằng dạng tổng quát của các dao động tự do của một sợi dây dao động cố định ở hai đầu là :

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t) \right) \sin\left(n\omega_0 \frac{x}{c} \right) \right].$$

Chúng ta dự định tính toán biên độ các thành phần họa ba tạo thành chúng. Thực vậy, xác định được chúng là việc bổ ích, để có thể tác động lên những tham số điều chỉnh chúng.

Các nhạc cụ là một minh họa có thể dùng cho sự phân tích sóng hài.

• Sử dụng tính chất của các *kiểu dao động riêng*, có thể thiết kế những nguồn âm phát ra những tín hiệu chỉ mang một số lượng hạn chế những họa ba. Thí dụ, trong trường hợp một sợi dây đàn có độ dài đã cho, sự điều chỉnh độ căng của nó cho phép chỉnh kiểu dao động cơ bản của nó để tạo ra nốt nhạc ta cần có.

• Hơn nữa, cũng cần phải biết điều chỉnh phổ dao động của sợi dây đó, nó xác định âm sắc của nhạc cụ (sự phân bố các họa ba được kích thích). Có thể đạt được điều này bằng cách điều chỉnh các *điều kiện ban đầu*.

■ Xác định các họa ba

Các hệ số A_n và B_n của sự khai triển theo chuỗi FOURIER tương thích với các điều kiện biên có thể được xác định, chẳng hạn, bằng những điều kiện ban đầu áp đặt cho sợi dây dao động.

Chúng ta giả định rằng các giá trị của $\psi(x,0)$ và $\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)$ đối với x trong khoảng từ 0 đến L là đã biết tức là :

$$\begin{cases} \psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)\right] \\ \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[n\frac{\pi c}{L}B_n \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)\right] \end{cases}$$

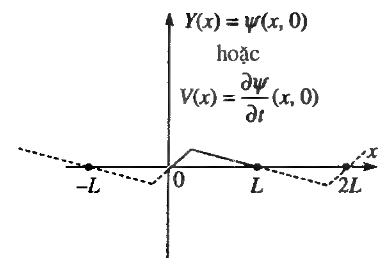
Khi đọc các hệ thức này, ta nhận thấy rằng :

• A_n là những hệ số của sự khai triển theo chuỗi FOURIER của một hàm tuần hoàn $Y(x)$ lẻ (không có số hạng chứa côsin) có chu kì $2L$, thu được bằng cách kéo dài hàm $\psi(x, 0)$ theo tính tuần hoàn, như *hình 13* gợi ra ;

• B_n là những hệ số của sự khai triển theo chuỗi FOURIER của một hàm tuần hoàn $V(x)$ lẻ, có chu kì $2L$, thu được bằng cách kéo dài hàm $\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)$ theo tính tuần hoàn, cũng như *hình 13* gợi ý.

Như vậy, ta có thể xác định các biên độ A_n và B_n nhờ các điều kiện ban đầu, bằng cách tính các tích phân sau đây :

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\psi(x,0)\mathrm{d}x \\ B_n = \frac{1}{n\pi c}\int_{-L}^{L}\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)\mathrm{d}x \end{cases}$$



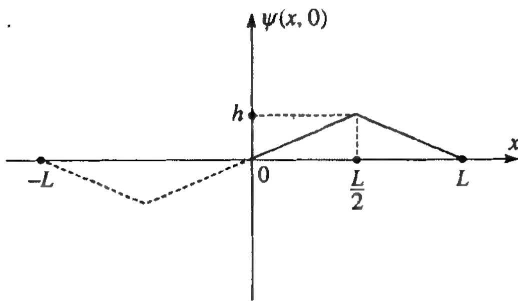
H.13. *Kéo dài các hàm* $\psi(x, t)$ *và* $\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)$ *"theo tính tuần hoàn".*

Áp dụng 3

Phổ của một sợi dây bị gẩy

Áp dụng kĩ thuật của **§3.4** *để khảo sát phổ một sợi dây đàn loại gẩy (claxơvanh, ghita, ...). Sợi dây cố định ở hai đầu này hoàn toàn nằm trong phạm vi khảo sát trước đây.*

Ở thời điểm ban đầu khi nó đã bị biến dạng từ trước, nó được thả ra không có vận tốc ban đầu. Để làm đơn giản các phép tính, sợi dây được gẩy ở điểm giữa độ dài của nó : dáng vẻ của $\psi(x, 0)$ được biểu diễn trên hình 14.



H.14. *Sợi dây được gẩy lúc $t = 0$.*

Đối với sợi dây này, hệ số B_n bằng không.

Do đối xứng, hệ số A_n cũng bằng không đối với n chẵn, ta phải xác định

$$A_{2p+1} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{L}x\right)\psi(x,0)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{8}{L}\int_{0}^{\frac{L}{2}} \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{L}x\right)h\frac{x}{L}\mathrm{d}x$$

Một phép tích phân từng phần cho ta :

$$A_{2p+1} = \frac{8h(-1)^p}{(2p+1)^2\pi^2}$$

Các họa ba có mặt đều là lẻ : $n = 1$ (cơ bản), 3, 5, 7, 9, ..., và các biên độ của chúng giảm rất nhanh, theo $\frac{1}{n}$.

Do đó phổ âm mà tai thu được sẽ giới hạn chủ yếu ở những họa ba đầu tiên.

Ta xét vài giá trị bằng số :

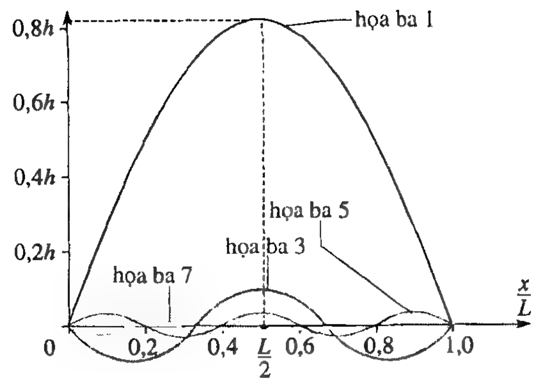
$A_1 = 8{,}11.10^{-1}\,\mathrm{h}$; $A_3 = -9{,}00.10^{-2}\,\mathrm{h}$

$A_5 = 3{,}24.10^{-2}\,\mathrm{h}$; $A_7 = -1{,}65.10^{-2}\,\mathrm{h}$; ...

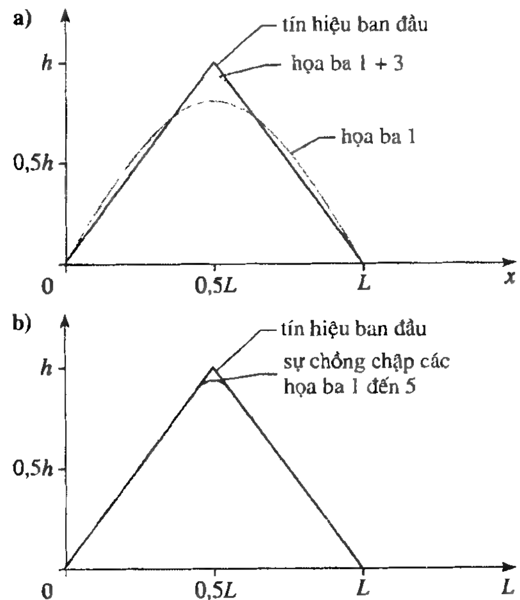
Trên *hình 16*, ta thấy rằng năm họa ba đầu tiên là đủ để tái tạo tín hiệu với một độ chính xác tốt.

Tín hiệu đầy đủ được cho bởi :

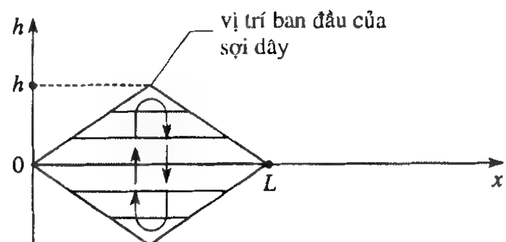
$$\psi(x,t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{8h(-1)^p}{(2p+1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(2p+1)\pi c}{L}t\right)\sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{L}x\right).$$



H.15. *Các họa ba 1, 3, 5, 7 của sợi dây bị gẩy.*



H.16. *Sự phục hồi tín hiệu bằng cách chồng chập các họa ba đầu tiên.*
a) *Họa ba 1 + 3* ; b) *Họa ba 1 + 3 + 5.*



H.17. *"Chuyển động" của một sợi dây bị gẩy ở điểm giữa : có thể coi rằng sơ đồ này là một dãy những ảnh chụp tức thời sợi dây ở những thời điểm rất gần nhau.*

Chú ý :

Các thang đo ngang được phóng đại mạnh trên tất cả các hình này.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ PHƯƠNG TRÌNH D'ALEMBERT

Những sóng dịch chuyển ngang $\psi(x, t)$ lan truyền theo một sợi dây không có độ cứng là những nghiệm của phương trình lan truyền (một chiều) d'ALEMBERT :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{với} \qquad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}.$$

■ SÓNG PHẲNG (SP)

Sóng được gọi là sóng phẳng nếu vào một lúc đã cho đại lượng đặc trưng cho sóng đang lan truyền là như nhau tại tất cả các điểm của một mặt phẳng vuông góc với phương truyền sóng.

■ SÓNG PHẲNG CHẠY (SPC)

- Một sóng phẳng chạy là một sóng phẳng truyền theo một phương và một chiều xác định rõ ràng.
- $\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ biểu diễn một sóng phẳng chạy truyền đi với vận tốc c, không biến dạng, theo chiều tăng của x.
- $\psi(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ biểu diễn một sóng phẳng chạy truyền đi với vận tốc c, không biến dạng, theo chiều giảm của x.
- Các nghiệm của phương trình lan truyền d'ALEMBERT có thể viết được một cách tổng quát dưới dạng sự chồng chập của hai sóng phẳng chạy $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ và $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$:

$$\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

■ SÓNG PHẲNG CHẠY ĐƠN SẮC (SPCĐS)

• *Đặc trưng*

Một sóng phẳng chạy đơn sắc lan truyền theo một phương song song với trục (Ox) theo chiều tăng của x, thì có một biên độ có dạng :

$$\underline{\psi}(x,t) = \underline{\psi}_0 e^{j(\omega t - kx)} \text{ trong cách kí hiệu phức, với } \underline{\psi}_0 = \psi_0 e^{j\phi_0}$$

hoặc $\psi(x,t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \phi_0)$ trong cách kí hiệu thực.

Nó được đặc trưng bằng tần số ω và vectơ sóng $\vec{k} = k\vec{e}_x$, và có hai chu kì : một chu kì thời gian $T = \frac{2\pi}{\omega}$ và một chu kì không gian $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Vận tốc lan truyền của nó bằng vận tốc lan truyền pha của nó, hay là vận tốc pha :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}.$$

• *Cách kí hiệu phức*

Cách kí hiệu $\underline{\psi}(x,t) = \underline{\psi}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ (ở đây $\underline{\psi}_0 = \psi_0 e^{j\phi_0}$) được vận dụng dễ dàng trong các phép tính gắn với các phương trình có đạo hàm riêng phần mô tả các hiện tượng vật lí được khảo sát.

Các đạo hàm theo không gian và thời gian của $e^{j(\omega t-kx)}$ ứng với các thừa số $-jk$ hoặc $+j\omega$:

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{j(\omega t-kx)} = j\omega e^{j(\omega t-kx)}$$

và :

$$\frac{\partial}{\partial x}e^{j(\omega t-kx)} = -jke^{j(\omega t-kx)}$$

Nói chung một phương trình có đạo hàm riêng phần được sóng $\psi(x, t)$ nghiệm đúng thì quy về một phương trình đại số đơn giản trong đó có các lũy thừa của $j\omega$ và jk.

■ SÓNG DỪNG

• *Định nghĩa*

Các sự phụ thuộc của một sóng dừng vào các biến số không gian và thời gian đã được tách rời.

Một sóng dừng phẳng được biểu diễn trong cách kí hiệu thực bằng một hàm có dạng :

$$\psi(x, t) = F(x)G(t).$$

Những chỗ có biên độ dao động cực đại được gọi là bụng dao động và những chỗ có biên độ dao động bằng không được gọi là các nút dao động.

Các sóng dừng nói chung là rất thích hợp để mô tả các sóng trong các môi trường tại đó một số điều kiện biên được nghiệm đúng vào mọi thời điểm t, ví như một sợi dây dao động cố định ở hai đầu.

• *Các nghiệm dừng của phương trình d'ALEMBERT*

Một sóng dừng dao động "tại chỗ" theo dạng sin (sóng này là đơn sắc) và là nghiệm của phương trình d'ALEMBERT, được viết thành :

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cos(kx + \varphi_F)\cos(\omega t + \varphi_G)$$

• *Các kiểu dao động riêng, sự phân tích sóng hài*

Các sóng truyền tự do dọc theo một sợi dây có độ dài L, cố định ở hai đầu $x = 0$ và $x = L$, là những sự chồng chập của những sóng dừng đơn sắc có chu kì không gian λ_n và chu kì thời gian ν_n đã lượng tử hóa.

Đó là những kiểu dao động riêng của sợi dây dao động :

$$\nu_n = n\nu_0 = n\frac{c}{2L}$$

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2L}{n}.$$

Biên độ của chúng có dạng :

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(A_n \cos 2\pi\nu_n t + B_n \sin 2\pi\nu_n t)\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda_n}\right)\right].$$

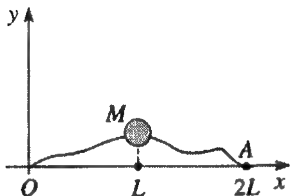
Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Sóng dừng trên một sợi dây có trọng tải phụ

Một sợi dây không có độ cứng, đồng nhất, khối lượng bằng m, độ dài bằng L, được cố định ở hai đầu O và A. Nó được giữ căng ra bởi một lực căng. Giả định rằng độ lớn của T không đổi, dù sự biến dạng (giả định là nhỏ) của sợi dây là như thế nào. Sợi dây mang ở trung điểm của nó một trọng tải phụ M hình điểm.

Các dịch chuyển nhỏ của sợi dây nằm trong mặt phẳng (xOy), và ta bỏ qua tác dụng của trọng lực. $\psi_1(x,t)$ và $\psi_2(x,t)$ lần lượt chỉ những độ dịch chuyển của phần bên trái $(0 \le x \le L)$ và của phần bên phải $(L \le x \le 2L)$ của sợi dây.



1) Xét đến khối lượng M, hãy viết hai hệ thức liên hệ $\psi_1(L,t)$ và $\psi_2(L,t)$.

2) Bằng cách tìm những nghiệm dừng dạng sin (có cùng tần số đối với ψ_1 và ψ_2), hãy xác định những tần số ω_n của các kiểu dao động riêng của sợi dây (cần xét hai trường hợp). Hãy bình luận ngắn gọn.

2 Ảnh hưởng của độ cứng một sợi dây đối với tần số dao động của nó

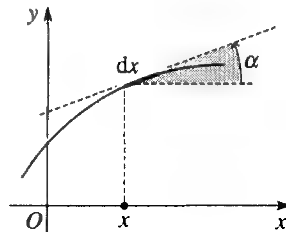
Một sợi dây có mật độ khối lượng dài μ, độ dài L, cố định ở hai đầu, chịu một lực căng T_0, nó dao động theo kiểu dao động riêng bậc n, theo định luật :

$$\psi(x,t) = A\cos\omega_n t \sin n\frac{\pi x}{L} \text{ với } n \text{ nguyên.}$$

Ở những tần số cao, phải tính đến độ cứng của sợi dây. Khi tính toán các lực tác dụng lên một nguyên tố sợi dây có độ dài dx, điều đó tương đương với việc đưa thêm một lực phụ $d\vec{R}$ có xu hướng chống lại sự uốn cong của sợi dây. Hình chiếu của nó xuống trục (Oy) được viết thành :

$$dR_y = -\gamma\frac{\partial^3\alpha}{\partial x^3}dx,$$

trong đó γ là một hằng số phụ thuộc chất liệu của sợi dây.



1) Tính tỉ số ε của môđun của dR_y với môđun của thành phần trên trục (Oy) của hợp lực của lực căng tác dụng lên nguyên tố sợi dây có độ dài dx.

2) Áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho một nguyên tố sợi dây có độ dài dx.

Từ đó suy ra tần số dao động ω_n của sợi dây là hàm của $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$, L, ε và n.

3) Tính hiệu chính tỉ đối của tần số gắn với kiểu dao động n, xuất hiện do ta có tính đến những hiệu quả của độ cứng (giả định rằng $\varepsilon \ll 1$). Áp dụng bằng số đối với n = 1, 2 và 10.

Cho biết :

$L = 0{,}5\text{m}$; $T = 387\text{N}$; $\gamma = 10^{-2}\text{N.m}^2$.

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

3 ★Ứng dụng vào âm nhạc : đàn ghita

Các kết quả thu được ở §3 của giáo trình là có ích cho việc giải bài tập này.

Đàn ghita cổ điển có sáu dây bằng boayô (ruột súc vật) hoặc bằng nilon, trong khi ghita điện lại có dây bằng thép.

Chúng tôi giới thiệu vài khái niệm về âm giai và về độ cao của âm.

Trong số các tính chất mà các nhạc sĩ gán cho âm thanh (độ dài, âm sắc và cường độ) thì độ cao, chính xác hơn là những chênh lệch độ cao, có thể được đánh giá dựa vào ôcta (quãng tám) và âm giai. Việc tăng gấp đôi tần số của một âm đi kèm với việc thay đổi ôcta. Âm giai gọi là âm giai điều hòa (đơn giản nhất và được sử dụng nhiều nhất) chia ốc ta thành mười hai quãng bằng nhau gọi là bán cung. Các tần số liên tiếp nhau của các nốt nhạc cách nhau bằng các bán cung đó tạo thành một cấp số nhân nghiệm đúng định luật tổng quát :

$$N_p = 2^{\frac{p}{12}}N \text{ với } p \in [1\ ;\ 12].$$

Các nốt nhạc của âm giai cổ điển (đô, rê, mi, ...) không phải đều cách nhau một bán cung.

Trong một ôcta, sự nối tiếp nhau của các nốt nhạc là như sau :

đô *đô#* *rê* *rê#* *mi* *fa* *fa#*

(hay *rê*♭) (hay *mi*♭) (hay *son*♭)

son *son#* *la* *la#* *si* *đô*

(hay *la*♭) (hay *si*♭)

Các ký hiệu # (dấu thăng) và ♭ (dấu giáng) nâng cao hoặc hạ thấp một bán cung các âm mà ta xét.

Như vậy, mi# = fa và fa♭ = mi.

Cơ sở tần số của âm giai điều hòa là la_3 (nốt la của âm giai thứ ba) mà tần số là 440Hz.

Đơn vị sava (đơn vị gắn với khả năng phân tách của tai) cho phép lượng tử hóa khoảng cách độ cao giữa hai âm. Hai tần số N_1 và N_2 được phân tách bằng :

$$1000 \log \frac{N_1}{N_2} \text{ sava.}$$

Các tần số cơ bản của các dây một chiếc đàn ghita là $[mi_1\ ;\ la_1\ ;\ rê_2\ ;\ son_2\ ;\ si_2\ ;\ mi_3]$, chỉ số chỉ rõ số thứ tự của ôcta được xét.

1) Xác định tần số ứng với mỗi một trong sáu dây.

2) Với những dữ liệu cung cấp trong bảng dưới đây :

• xác định những độ căng cần thiết để đàn ghita được lên dây hoàn toàn đúng (kiểu cơ bản) khi nó được mắc những dây bằng thép ;

• đối với một dây đã cho (thí dụ : dây số 4), so sánh ảnh hưởng của chất liệu làm dây đối với lực căng (giả định đường kính là không đổi).

số thứ tự dây		2	1	4	5	6
nốt nhạc cơ bản	mi_1	la_1	$rê_2$	son_2	si_2	mi_3
đường kính *D* (mm)	1,12	0,89	0,70	0,55	0,35	0,25
độ dài *L* (cm)	63	63	63	63	63	63
mật độ khối ρ (kg.m^{-3})	boayô .... 975 nilon .... 1180 thép 7800					

3) Độ biến thiên tỉ đối chấp nhận được đối với độ căng của dây số 4 (son_2) là bao nhiêu để cho tần số của âm cơ bản tương ứng không biến đổi nhiều hơn 5 sava (là giới hạn phân tách của tai loại trung bình) ?

Ứng dụng bằng số cho một dây bằng thép.

4) Người chơi đàn, trong khi gẩy dây đàn bằng một tay thì di chuyển các ngón của tay kia trên một hoặc nhiều dây đàn để làm biến đổi khoảng cách giữa hai đầu cố định *A* và *B*.

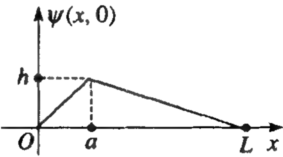
Người ấy di chuyển ngón tay đi bao nhiêu - trên dây số 4 chẳng hạn - để chuyển từ âm son_2 sang âm la_2 ?

Ứng dụng bằng số cho một dây đàn bằng thép. Bình luận kết quả thu được.

5) Đối với một dây đã cho, giá trị nhỏ nhất của *n* là bao nhiêu để tần số của họa âm thứ *n* lệch khỏi tần số một nốt nhạc trong âm giai ít hơn 5 sava ?

Các nhạc sĩ nói rằng họa ba này là một nghịch âm.

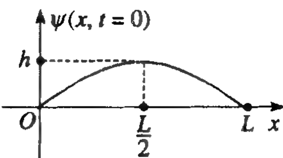
6) Khi gẩy đàn, người ta coi rằng dây đàn được thả ra không có vận tốc ban đầu ở vị trí vẽ trên sơ đồ ở bên.



a) Bằng cách sử dụng những biểu thức đã cho ở §3.4, hãy tính biên độ các họa ba khác nhau có mặt trong dây đàn.

b) Chứng tỏ rằng khi gẩy sợi dây đàn tại một điểm có hoành độ *a* thích hợp thì họa ba nghịch âm đầu tiên có thể bị loại trừ.

7) Nếu dây đàn không được gẩy (bằng một cái gẩy hình tam giác), mà được búng bằng ngón tay trần, hình dáng của dây đàn khi đó có thể được biểu diễn bằng sơ đồ bên đây, với các điều kiện ban đầu đối với $0 \le x \le L$.



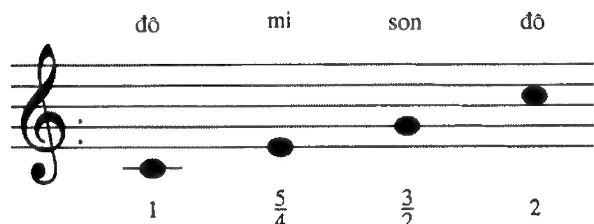
$$\psi(x,0) = \frac{4h}{L^2} x(L-x) \text{ và } \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = 0$$

a) Tính các biên độ mới của các họa ba có mặt trong dây đàn.

b) Biện luận về sự thuần khiết của các nốt nhạc thu được : tín hiệu âm nghe thấy sẽ gần giống hay khác xa một tín hiệu dạng sin thuần khiết ?

4 ★Ứng dụng vào âm nhạc : đàn dương cầm

1) Trước khi xây dựng chính xác âm giai điều hòa, các nhạc sĩ đã sử dụng *âm giai tự nhiên* : nó dựa trên ba quãng hài âm (tức là nghe êm tai) tạo thành hợp âm hoàn toàn trưởng có bổ sung bằng một quãng tám.



Như vậy, trong dãy đô - mi - son - đô, các tỉ lệ tần số là :

- với quãng ba (đô - mi) : $\frac{5}{4}$;
- với quãng năm (đô - son) : $\frac{3}{2}$;
- với quãng tám (đô - đô) : 2.

Đối với một dây đàn, ta thấy rằng nếu kiểu cơ bản (hay họa ba $n = 1$) là một nốt đô, thì họa ba $n = 2$ là nốt đô của ôcta cao hơn và họa ba $n = 3 = \frac{3}{2} \times 2$ là nốt son của ôcta cao hơn.

a) Tìm các nốt nhạc ứng với các họa ba $n = 4$, $n = 5$ và $n = 6$.

b) Chứng tỏ rằng họa ba $n = 7$ không nằm trong sơ đồ quãng ba - quãng năm - quãng tám (do đó các nhạc sĩ nói rằng nó là nghịch âm ; nó gần với si giáng).

c) Nốt nhạc ứng với họa ba $n = 8$ là nốt nhạc nào ? Nó là hài âm hay nghịch âm ?

2) Phổ âm của một sợi dây bị gõ (đàn dương cầm)

Vào thời điểm $t = 0$, sợi dây có độ dài L đang ở vị trí cân bằng $\psi(x, 0) = 0$. Sợi dây bị gõ bằng một cái búa nhỏ có bề rộng b (với $b \ll L$), đặt giữa các hoành độ $x = a$ và $x = a + b$. Trong điều kiện đó, vận tốc mỗi điểm của sợi dây tại thời điểm $t = 0$ có thể được xác định bằng hàm $u(x) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0)$ sao cho :

$$\begin{cases} \text{nếu } a \le x \le a + b,\ u(x) = u_0 \text{ (hằng số)} \\ \text{nếu không, } u(x) = 0 \end{cases}$$

a) Tính (xem §3.4) biên độ của các họa ba khác nhau có mặt trên dây đàn.

b) Tìm một ứng dụng trong âm nhạc của việc biên độ của các họa ba phụ thuộc a.

Phải làm gì để loại bỏ họa ba nghịch âm thứ nhất xác định bởi $n = 7$?

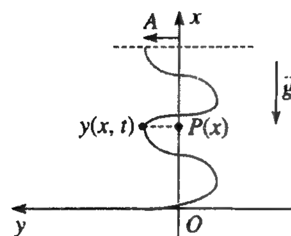
c) So sánh các phổ của một dây đàn dương cầm và một dây đàn ghita (xem *bài tập 3* và *Áp dụng 3*) và đánh giá sự khác biệt của âm sắc của chúng.

5 ★★Khảo sát dao động của một sợi dây dọc

Trục (Ox) là trục dọc, hướng trở lên, (Oy) là trục ngang. Một sợi dây vô cùng dẻo, có mật độ khối lượng dài μ, độ dài L, được treo vào điểm A trong một trường trọng lực có cường độ g. Khi sợi dây ở trạng thái nghỉ, đầu dưới của nó trùng với điểm O.

Điểm treo A của nó thực hiện những dao động ngang : $y_A = a\cos\omega t$, có biên độ a rất nhỏ so với L. Đầu dưới của sợi dây không bị bất kì một cản trở nào.

Độ dịch chuyển (hầu như ngang) của điểm $P(x)$ của sợi dây so với vị trí cân bằng của nó được kí hiệu là $y(x, t)$. Trong tất cả phần sau, ta giả định rằng y, $\frac{\partial y}{\partial x}$ và $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ là rất nhỏ, và sự dịch chuyển của sợi dây chỉ diễn ra theo phương (Oy).



1) Chứng tỏ rằng phương trình truyền sóng dọc theo sợi dây là :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g\left(\frac{\partial y}{\partial x} + x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right).$$

2) Người ta tìm một nghiệm của phương trình trên dưới dạng :

$$y(x, t) = \alpha(x)\cos\omega t + \beta(x)\sin\omega t.$$

a) Chứng tỏ rằng $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ nghiệm đúng cùng một phương trình vi phân.

b) Người ta kí hiệu $X = x\dfrac{\omega^2}{g}$; $\alpha(x) = A_0 A(X)$;

$$\beta(x) = B_0 A(X) \text{ ; với } A(0) = 1.$$

Lập phương trình mà hàm $A(x)$ nghiệm đúng, sau đó tìm một nghiệm của phương trình đó dưới dạng một sự khai triển theo chuỗi nguyên :

$$A(X) = 1 + A_1 X + A_2 X^2 + ...$$

Xác định các hệ số A_k

c) B_0 bằng bao nhiêu ? Xác định A_0 theo $A\left(\dfrac{\omega^2 L}{g}\right)$ và a. Viết biểu thức của $y(x, t)$.

3) *Áp dụng bằng số :* $L = 1$m, $a = 1$mm, $g = 9{,}81\text{m.s}^{-2}$, tần số kích thích của sợi dây $f = 5$Hz.

a) Tính thừa số $\dfrac{\omega^2 L}{g}$.

b) Sử dụng bảng các giá trị dưới đây, hoặc một phần mềm cho phép giải trực tiếp phương trình vi phân mà hàm $A(X)$ nghiệm đúng, hãy chỉ ra dáng vẻ của sợi dây bằng cách vẽ đồ thị $y(x, t)$ đối với x biến thiên từ 0 đến L vào một thời điểm t đã cho.

X	$A(X)$	$A'(X)$
0,00	1,00	– 1,00
1,45	0,00	– 0,43
3,67	– 0,40	0,00
7,62	0,00	0,12
12,30	0,30	0,00
18,72	0,00	– 0,06
25,87	– 0,25	0,00
34.76	0,00	0,04
44,38	0,22	0,00
55,73	0,00	– 0,03
67,82	– 0,20	0,00
81,64	0,00	0,02
96,20	0,18	0,00
112,48	0,00	– 0,02

c) Số lượng các nút xuất hiện trên sợi dây là bao nhiêu ?

d) Biên độ chuyển động của đầu tự do của sợi dây là bao nhiêu ?

e) Nếu $A(X)$ bằng không đối với $X = \dfrac{\omega^2 L}{g}$ thì điều gì sẽ xảy ra ?

BÀI CHỮA

1 1) *Đối với M, tại x = L, ta viết :*

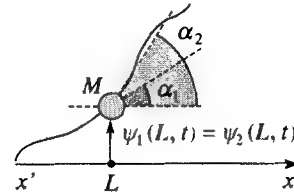
• *tính liên tục của độ dịch chuyển của sợi dây vào mọi thời điểm :*

$$\psi_1(L,t) = \psi_2(L,t) \text{ ;}$$

• *hệ thức cơ bản của động lực học :*

$$M\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = T(\alpha_2 - \alpha_1) = T\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)$$

Trong phương trình này, $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ *chỉ bất kì* $\dfrac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}$ *hay* $\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}$*, vì rằng* $\psi_1(L,t) = \psi_2(L,t)$ *tại mọi thời điểm*



2) *Các nghiệm dừng dạng sin có dạng :*

$$\psi_1(x,t) = \psi_{10}\cos(kx + \varphi_1)\cos(\omega t + \varphi'_1)$$

$$\psi_2(x,t) = \psi_{20}\cos(kx + \varphi_2)\cos(\omega t + \varphi'_2)\ .$$

Mỗi một hàm $\psi_1(x,t)$ *và* $\psi_2(x,t)$ *đều nghiệm đúng phương trình d'ALEMBERT, nên k và ω nhất thiết phải liên hệ với nhau bằng* $k = \dfrac{\omega}{c}$*, vận tốc lan truyền c bằng* $c = \sqrt{\dfrac{2LT}{m}}$.

• *Sợi dây cố định tại x = 0 và x = 2L.*

$\psi_1(0,t) = 0$ *vào mọi thời điểm khiến ta phải chọn :* $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{2}$;

$\psi_2(L,t) = 0$ *vào mọi thời điểm khiến ta phải chọn* $\psi_2(L,t) = 0$ *vào mọi thời điểm khiến ta phải chọn* $\varphi_2 = -2kL - \dfrac{\pi}{2}$.

Chú ý : Sự lựa chọn $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$ *hoàn toàn không làm thay đổi gì đối với bài toán, vì rằng chuyển từ* $-\dfrac{\pi}{2}$ *thành* $+\dfrac{\pi}{2}$ *chỉ có nghĩa là đổi dấu của các hằng số* ψ_{10} *và* ψ_{20} .

Sau đó, ψ_1 *và* ψ_2 *được viết dưới dạng :*

$$\psi_1(x,t) = \psi_{10}\sin(kx)\cos(\omega t + \varphi'_1)$$

$$\psi_2(x,t) = \psi_{20}\sin(k(x - 2L))\cos(\omega t - \varphi'_2)\ .$$

• *Những điều kiện thu được ở câu hỏi **1)** bắt buộc phải có tại mọi thời điểm :*

$$\psi_{10}\sin(kL)\cos(\omega t + \varphi'_1) = -\psi_{20}\sin(kL)\cos(\omega t + \varphi'_2)$$

$$-M\omega^2\psi_{10}\sin(kL)\cos(\omega t + \varphi'_1) = kT(\psi_{20}\cos(kL)\cos(\omega t + \varphi'_2)$$

$$-\psi_{10}\cos(kL)\cos(\omega t + \varphi'_1))\ .$$

Hai điều kiện đó bắt buộc nhất thiết phải có $\varphi'_1 = \varphi'_2$. Chọn gốc thời gian một cách đúng đắn, ta lấy $\varphi'_1 = \varphi'_2 = 0$; khi đó ta có:

$$\psi_{10}\sin(kL) = -\psi_{20}\sin(kL)$$

$$-M\omega^2\psi_{10}\sin(kL) = kT(\psi_{20}\cos(kL) - \psi_{10}\cos(kL))$$

Ta xét hai trường hợp.

• *nếu sin(kL) = 0, thì $\psi_{10} = \psi_{20}$.*

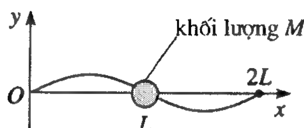
k được lượng tử hóa bởi $k = k_n = n\frac{\pi}{L}$ (n nguyên) và tần số lượng tử hóa bởi $\omega = \omega_n = nc\frac{\pi}{L}$.

Nếu sợi dây không có trọng tải phụ, nó sẽ dao động theo các kiểu dao động riêng có dạng (xem trong giáo trình) :

$$\psi_{n'}(x,t) = \psi_0\sin(k'_n x)\cos(\Omega'_n t) \quad \text{với} \quad k'_n = n'\frac{\pi}{2L} \ (n' \text{ nguyên}),$$

$$\Omega'_n = k'_n c .$$

Sợi dây có trọng tải phụ dao động theo các kiểu riêng chẵn (n = 2n') của sợi dây không có trọng tải phụ, và khối lượng M đứng yên.



kiểu $n = 1$

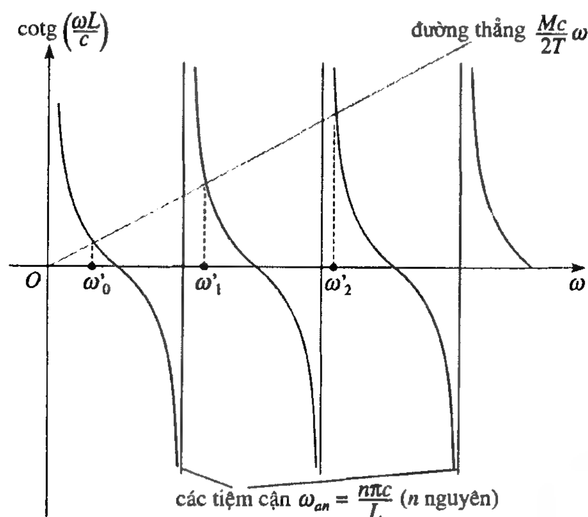
• *nếu sin(kL) ≠ 0, thì $\psi_{10} = -\psi_{20}$.*

Số sóng k phải nghiệm đúng hệ thức : $\text{cotg}(kL) = \frac{M\omega^2}{2Tk}$.

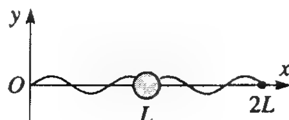
Vậy phương trình xác định tần số của các kiểu dao động riêng là :

$$\text{cotg}\left(\omega\frac{L}{c}\right) = \frac{Mc}{2T}\omega$$

Đồ thị dưới đây làm lộ rõ các tần số riêng lượng tử hóa tương ứng.



Đối với n lớn hơn hoặc bằng 1, thì $\omega'_n \approx nc\frac{\pi}{L}$, thành thử các tần số riêng giống như các tần số của trường hợp trên, khối lượng M hầu như đứng yên (nhưng độ dốc của sợi dây là không liên tục tại x = L).



kiểu $n = 3$

2 1) *Ta đã thấy ở § 1.2.2 rằng, đối với một sợi dây không có độ cứng thì thành phần trên trục y của hợp lực của lực căng tác dụng lên một nguyên tố dx của sợi dây được viết thành :*

$$T_0(\alpha(x+dx),t) - \alpha(x,t)) = T_0\frac{\partial\alpha}{\partial x}dx = T_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx$$

Biết rằng $\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial x}$, *ta rút ra* $\varepsilon = \frac{\gamma}{T_0}\frac{\left|\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}\right|}{\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|} = \frac{\gamma}{T_0}\frac{\pi^2}{L^2}n^2$.

Như vậy, đối với các dao động có tần số lớn (n lớn), ảnh hưởng của độ cứng của sợi dây càng ngày càng là quan trọng.

2) *Hệ thức cơ bản của động lực học áp dụng cho một yếu tố của sợi dây có độ dài dx dẫn đến :*

$$\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \gamma\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4},$$

đối với nghiệm $\psi(x,t) = A\cos\omega_n t\sin\frac{n\pi x}{L}$, *điều đó đòi hỏi điều kiện :*

$$\omega_n^2 = c^2\frac{\pi^2}{L^2}n^2(1+\varepsilon).$$

3) *Đối với một sợi dây không có độ cứng thì* $\omega_{0n} = c^2\frac{\pi^2}{L^2}n^2$, *do đó :*

$$\frac{\Delta\omega_n}{\omega_{0n}} \approx \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\gamma}{2T_0}\frac{\pi^2}{L^2}n^2$$

n	1	2	10
$\frac{\Delta\omega_n}{\omega_{0n}}$	$5,1.10^{-4}$	$2,0.10^{-3}$	$5,1.10^{-2}$

Sự chênh lệch tương đối là quan trọng hơn khi tần số của kiểu dao động riêng tăng lên, điều đó là dĩ nhiên. Đối với một kiểu có tần số cao, biên độ $\sin\frac{n\pi x}{L}$ *biến thiên nhanh, hình dáng của sợi dây bị "xáo động" hơn, và những hiệu quả của độ cứng của sợi dây là quan trọng hơn một cách đáng kể.*

3 1) *Xuất phát từ tần số của* la_3, *ta có thể tính được các tần số của :*

- $đô_3$ *; tức là* $\frac{440}{2^{\frac{9}{12}}} = 261,6Hz$
- $đô_2$ *; tức là* $\frac{261,6}{2} = 130,8Hz$;
- $đô_1$ *; tức là* $\frac{261,6}{4} = 65,4Hz$.

Từ đó, ta rút ra tần số của các nốt nhạc :

nốt nhạc	mi_1	la_1	$rê_2$
tần số (Hz)	$65,4\times 2^{\frac{4}{12}} = 82,4$	$65,4\times 2^{\frac{9}{12}} = \frac{440}{4} = 110$	$130,8\times 2^{\frac{2}{12}} = 146,8$

nốt nhạc	son_1	si_2	mi_3
tần số (Hz)	$130,8\times 2^{\frac{7}{12}} = 196$	$130,8\times 2^{\frac{11}{12}} = 247,9$	$261,6\times 2^{\frac{4}{12}} = 329,6$

2) *Đối với kiểu cơ bản (n = 1), độ căng* T_0 *và tần số N liên hệ với nhau bằng* $N = \frac{C}{2L} = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}\frac{1}{2L}$, *ở đây mật độ khối lượng dài là* $\mu = \rho\pi\frac{D^2}{4}$ *; điều đó cho ta* $T_0 = \pi\rho(DLN)^2$, *tức là đối với một sợi dây bằng thép thì :*

số thứ tự sợi dây	1	2	3	4	5	6
$T_0(N)$	82,8	93,2	102,7	113,0	73,2	66,0

và đối với các sợi dây số 4 khác nhau (son_2) *thì :*

	boayô	nilon	thép
$T_0(N)$	14,1	17,1	113,0

3) *Bằng cách biểu thị vi phân lôga của* $T_0 = \pi\rho(DLN)^2$, *ta được :*

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = 2\frac{\Delta N}{N}.$$

Độ chênh lệch giữa hai tần số N và N + ΔN bằng 5 sava, tức là :

$$5 = 1000\log\frac{N+\Delta N}{N} = \frac{1000}{\ln 10}\ln\left(1+\frac{\Delta N}{N}\right) \approx \frac{1000}{\ln 10}\frac{\Delta N}{N},$$

do đó :

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = 10\frac{\ln 10}{1000} = 2,3.10^{-2}$$

4) *Để chuyển từ* son_2 *(N = 196Hz) sang* la_2 *(N' = 220Hz) người chơi ghita phải chuyển dây đàn số 4 từ độ dài ban đầu L sang một độ dài L' = L − d cho bởi LN = (L − d)N', điều đó dẫn đến độ dịch chuyển d = 6,9cm.*

Như vậy, muốn chuyển từ một nốt nhạc sang nốt nhạc lân cận thì độ dịch chuyển tương ứng với kích thước bàn tay, và do đó có thể được thực hiện dễ dàng bằng cách sử dụng hai ngón tay mà không cần chuyển động bàn tay.

5) *Khi dao động, dây đàn phát ra một phổ có các tần số nN (n nguyên). Kiểu cơ bản n = 1 ứng với tần số một nốt nhạc của âm giai điều hòa. Khi đó tần số các nốt nhạc khác có thể được đặt dưới dạng* $N2^{\frac{p}{12}}$ *(p nguyên).*

Muốn tìm ra họa ba n nghịch âm đầu tiên, ta phải kiểm tra rằng đối với n đã cho không có bất kì giá trị nào của p dẫn đến :

$$1000\log\left(\frac{nN}{N2^{\frac{p}{12}}}\right) < 5, \text{ nghĩa là } 0,9886 < \frac{n}{2^{\frac{p}{12}}} < 1,0116.$$

Hệ thức trên được thỏa mãn với n = 2 (p = 12), n = 3 (p = 19), n = 4 (p = 24), n = 5 (p = 28), n = 6 (p = 31). Trái lại nó không được nghiệm đúng đối với họa ba 7.

$$p = 33 \text{ dẫn đến } \frac{7}{2^{\frac{33}{12}}} = 1,0406$$

và

$$p = 34 \text{ dẫn đến } \frac{7}{2^{\frac{34}{12}}} = 0,9822.$$

6) a) *Lấy lại những kết quả của §3.4, ta có :*

$B_n = 0$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^a \frac{h}{a}x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \frac{2}{L}\int_a^L \frac{h(L-x)}{L-a}x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

Một phép tích phân từng phần dẫn đến :

$$A_n = \frac{2h}{n^2\pi^2}\frac{L^2}{a(L-a)}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right).$$

b) *Muốn không làm xuất hiện họa ba 7, chỉ cần gẩy dây đàn ở hoành độ a nào làm triệt tiêu* A_7, *do đó :*

$$\sin\frac{7\pi a}{L} = 0 \text{ và } a = m\frac{L}{7} \text{ (m nguyên).}$$

7) a) *Bây giờ ta thu được* $B_n = 0$ *và* $A_{2p} = 0$, *và sau khi lấy tích phân từng phần :*

$$A_{2p+1} = \frac{32h}{(2p+1)^3\pi^3}.$$

b) *Đối với dây đàn được búng, các hệ số* A_n *giảm theo* $\frac{1}{n^3}$, *tức là nhanh hơn nhiều so với các hệ số tương ứng đối với dây đàn được gẩy : âm thanh của ghita lúc đó là rất trong, hầu như dạng sin, ở tần số của kiểu cơ bản.*

4 *Chú ý*

Có thể kiểm tra được rằng sự chênh lệch tần số giữa hai nốt nhạc cùng tên của âm giai điều hòa và âm giai tự nhiên là nhỏ hơn 5 sava (xem bài tập 3) :

$$mi \rightarrow \left|1000\log\left(\frac{\frac{5}{4}}{2^{\frac{4}{12}}}\right)\right| = 3,4 \text{ sava}$$

$$son \rightarrow \left|1000\log\left(\frac{\frac{3}{2}}{2^{\frac{7}{12}}}\right)\right| = 0,5 \text{ sava}$$

1) a) *Các họa ba n = 4, $n = 5 = \frac{5}{4}\times 4$ và $n = 6 = \frac{3}{2}\times 4$ ứng với các nốt nhạc đô, mi và son, cao hơn âm cơ bản hai ôcta.*

b) *Có thể viết họa ba n = 7 dưới dạng 2^p, hay $\frac{5}{4}\times 2^p$, hay $\frac{3}{2}\times 2^p$ (p nguyên).*

c) *Họa ba $n = 8 = 2^3$ là nốt đô cao hơn âm cơ bản ba ôcta : đó là một hợp âm.*

2) a) *$\psi(x, 0)$ bằng không ở thời điểm ban đầu, ta suy ra ngay $A_n = 0$. các hệ số B_n có thể tính được từ (xem §3.4) :*

$$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{2}{n\pi c}\int_a^{a+b} u_0 \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)dx,$$

do đó, đối với $b \ll L$ thì :

$$B_n \approx \frac{2u_0 b}{n\pi c}\sin\left(n\pi\frac{a}{L}\right)$$

b) *Tác động vào a, tức là vào vị trí của cái búa gõ vào dây đàn, có thể biến đổi biên độ B_n của các họa ba tùy ý muốn, do đó mà biến đổi âm sắc của âm phát ra.*

Có thể loại bỏ họa ba nghịch âm n = 7 bằng cách lấy $\sin\left(7\pi\frac{a}{L}\right) = 0$, tức là $a = n.\frac{L}{7}$ (n nguyên). Có thể nhận xét rằng khi đó dây đàn bị gõ tại một nút của kiểu dao động của họa ba 7 (đối với họa ba này, $L = 7\frac{\lambda}{2}$).

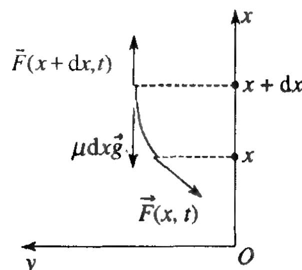
c) *Trong trường hợp đàn dương cầm, biên độ các họa ba giảm theo $\frac{1}{n}$, tức là rõ ràng chậm hơn các biên độ tương ứng của dây đàn ghita. Vậy đàn dương cầm phát ra những âm mà tỉ suất họa ba là rất đáng kể (trái với đàn ghita hoặc đàn clavơxanh, cũng là loại nhạc cụ có dây bị gẩy) : âm thanh của đàn dương cầm ấm hơn nhiều, âm sắc của nó "phong phú" hơn nhiều.*

5

1) *Kí hiệu $\vec{F}(x,t)$ là lực căng mà phần sợi dây có hoành độ lớn hơn x tác dụng lên phần có hoành độ nhỏ hơn x, hệ thức của động lực học áp dụng cho một nguyên tố sợi dây có độ dài $ds \approx dx$ cho ta :*

$$\mu dx\vec{a} = \vec{F}(x+dx,t) - \vec{F}(x,t) + \mu dx\vec{g}$$

Trọng lượng của sợi dây gây ra lực căng $\vec{F}$ là không thể bỏ qua được.



Ta được :

- *Khi chiếu xuống (Ox) :*

$$0 \approx F_x(x+dx,t) - F_x(x,t) - \mu dxg,$$

do đó : $$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \mu g \text{ và } F_x = \mu gx \;;$$

- *Khi chiếu xuống (Oy) :*

$$\mu dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_y(x+dx,t) - F_y(x,t) = \frac{\partial F_y}{\partial x}dx$$

Lực căng tiếp tuyến với sợi dây, ta có thể viết :

$$F_y = F_x\frac{\partial y}{\partial x} = \mu gx\frac{\partial y}{\partial x}$$

do đó : $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g\left(\frac{\partial y}{\partial x} + x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$$

2) a) $y(x,t) = \alpha(x)\cos\omega t + \beta(x)\cos\omega t$ *là nghiệm của phương trình trên nếu :*

$$\left(\alpha\frac{\omega^2}{g} + \frac{d\alpha}{dx} + x\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right)\cos\omega t + \left(\beta\frac{\omega^2}{g} + \frac{d\beta}{dx} + x\frac{d^2\beta}{dx^2}\right)\sin\omega t = 0$$

hệ thức đó phải được nghiệm đúng mặc dù t là bao nhiêu, điều đó đòi hỏi :

$$\alpha\frac{\omega^2}{g} + \frac{d\alpha}{dx} + x\frac{d^2\alpha}{dx^2} = 0$$

$$\beta\frac{\omega^2}{g} + \frac{d\beta}{dx} + x\frac{d^2\beta}{dx^2} = 0.$$

b) *Kí hiệu $X = x\frac{\omega^2}{g}$ ta thu được phương trình vi phân mà hàm A(X) nghiệm đúng :*

$$A + \frac{dA}{dX} + X\frac{d^2A}{dX^2} = 0.$$

Nghiệm chuỗi nguyên $A(X) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k x^k$ *thỏa mãn phương trình đó nếu :*

$$1 + A_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + (k+1)A_{k+1} + (k+1)kA_{k+1})X^k = 0$$

Ta rút ra $A_1 = -1$ *và* $A_{k+1} = -\frac{A_k}{(k+1)^2}$, *rồi* $A_k = \frac{(-1)^k}{(k!)^2}$, *có nghĩa rằng những số hạng đầu tiên của nghiệm là :*

$$A(X) = 1 - X + \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{36}X^3 + \frac{1}{576}X^4 - \frac{1}{14400}X^5 + 0(X^6).$$

Chú ý :

Có thể sử dụng một phần mềm để giải phương trình vi phân mà A nghiệm đúng : nghiệm của nó ứng với một hàm BESSEL mà sự khai triển có giới hạn theo biến số X đã được cho trên đây.

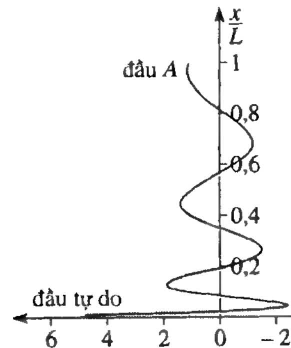
c) Đối với x = L, hàm $y(L,t) = (A_0 \cos\omega t + B_0 \sin\omega t) A\left(L\frac{\omega^2}{g}\right)$ *phải đồng nhất với* $y_A = a\cos\omega t$, *do đó* $B_0 = 0$ *và* $A_0 = \frac{a}{A\left(\frac{L\omega^2}{g}\right)}$.

Hình dáng của sợi dây ở thời điểm t được cho bởi :

$$y(x,t) = a\frac{A\left(x\frac{\omega^2}{g}\right)}{A\left(L\frac{\omega^2}{g}\right)}\cos\omega t.$$

3) a) $\frac{\omega^2 L}{g} = \frac{4\pi^2 f^2 L}{g} = 100{,}61$

b) *Trong trường hợp đang xét, ta vẽ đồ thị của* $\frac{y}{a}$ *biến thiên theo* $\frac{x}{L}$, *biểu diễn ở thời điểm t nghiệm đúng* $\cos\omega t = 1$.



c) Trên đồ thị thu được, ta quan sát thấy sợi dây có sáu nút dao động giữa x = 0 và x = L.

Hơn nữa, biên độ các dao động ngang của các điểm của sợi dây tăng lên, và khoảng cách giữa hai nút giảm khi đi lại gần đầu tự do của sợi dây. Đầu này "quất" vào không khí : ảnh hưởng của trường gia tốc g giống như ảnh hưởng của người cầm chiếc roi da bất thình lình kéo mạnh cán roi (tuy nhiên những biên độ ta xét hạn chế sự so sánh này).

d) *Đối với x = 0, biên độ dao động bằng* $\frac{a}{A\left(\frac{L\omega^2}{g}\right)} = A$, *tức là khoảng 6 đến 7 mm.*

e) *Nếu* $A\left(L\frac{\omega^2}{g}\right) = 0$, *biên độ dao động trở nên rất lớn (hiện tượng cộng hưởng) và phép tính thực hiện ở đây không còn áp dụng được nữa (ta chỉ giới hạn ở y nhỏ).*

DÂY CÁP ĐỒNG TRỤC : KHÁI NIỆM TRỞ KHÁNG

3

Mở đầu

Ở chương 2, chúng ta đã khảo sát sự lan truyền các sóng dọc theo một sợi dây dao động, mô tả bởi phương trình lan truyền d'ALEMBERT.

Chúng ta đã thu được vài nghiệm quan trọng của phương trình đó : sóng phẳng chạy, sóng phẳng chạy đơn sắc, sóng dừng.

Khi khảo sát sự truyền sóng điện trên một đường dây điện không có hao tổn, chúng ta sẽ kiểm tra thấy rằng các kết quả đó có thể áp dụng được cho các tình huống vật lí khác.

Chúng ta sẽ bổ sung chúng bằng cách phân tích sự truyền tải năng lượng gắn liền với sự truyền sóng, cũng như sự phản xạ và sự truyền qua của năng lượng khi các đặc trưng của môi trường lan truyền bị biến đổi.

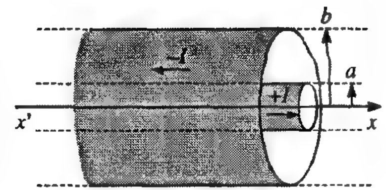
MỤC TIÊU

- Sự lan truyền một sóng trong một đường dây điện.
- Trở kháng của sóng, sự truyền năng lượng.
- Sự phản xạ, sự truyền qua.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Các nghiệm của phương trình d'ALEMBERT.

Đường dây điện không có tường minh trong chương trình năm thứ hai. *Tuy nhiên*, chúng tôi đã lựa chọn nó để giới thiệu các khái niệm quan trọng, như khái niệm trở kháng đặc trưng, sự truyền tải năng lượng, hay những hiện tượng phản xạ và truyền qua (chúng có trong chương trình), vì rằng nó cho phép sử dụng những kĩ năng tính toán đặc biệt đơn giản.



H.1. *Dây cáp đồng trục.*

1 Sự lan truyền sóng điện trong một đường dây

1.1. Thí nghiệm : sự lan truyền trong một dây cáp đồng trục

1.1.1. Cấu trúc của một dây cáp đồng trục.

Cấu trúc của một dây cáp đồng trục được biểu diễn trên *hình 1*. Lõi của dây cáp là một sợi dây bằng đồng, hình trụ, bán kính a. Nó được bọc bằng một lớp cách điện. Vỏ dây cáp có bán kính trong b, bằng đồng và bao quanh tất cả. Loại dây cáp này nối, chẳng hạn một máy thu hình với ăngten thu sóng.

1.1.2. Quan sát sự lan truyền

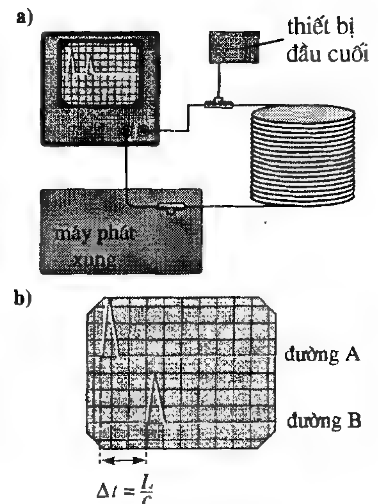
Chúng ta biết rằng nối một máy phát tín hiệu với một máy hiện sóng bằng một dây cáp đồng trục thì cho phép hiển thị tín hiệu từ máy phát truyền đi.

Thực ra điều này không hoàn toàn đúng, vì tín hiệu không được dây cáp truyền đi tức thời từ một máy này sang một máy khác : tín hiệu phải mất một thời gian nào đó để truyền trong dây cáp từ máy này sang máy khác. Nói chung chúng ta không thể cảm nhận được sự chênh lệch đó, vì vận tốc lan truyền trong dây cáp có cùng độ lớn với vận tốc ánh sáng. Một tín hiệu lan truyền trong một dây cáp đồng trục dài 30cm, với vận tốc khoảng 300.000km.s^{-1}, chỉ mất một nanô giây để truyền từ máy phát đến máy hiện sóng.

Để làm nổi rõ sự trễ gắn với một hiện tượng lan truyền trong dây cáp, chúng ta có thể tác động vào chiều dài của dây. Căn cứ vào độ lớn mà ta vừa nói, cần phải sử dụng một dây cáp rất dài, thí dụ như một cuộn dây cáp đồng trục.

Với một dây cáp 100m, sự trễ vào khoảng vài phần mười micrô giây. Nó cũng vẫn là khá nhỏ, nhưng hoàn toàn có thể quan sát được trên máy hiện sóng (tần số cắt của một máy hiện sóng thường lớn hơn 20MHz), nếu ta sử dụng một máy phát xung.

Một máy phát xung được nối với hai đường truyền của một máy hiện sóng bằng cách dùng một dây cáp 30cm ở một bên và một cuộn dây cáp 100m ở bên kia (*h*.2). Trên màn hình của máy hiện sóng, chúng ta quan sát được rõ ràng sự trễ của đỉnh đã đi qua cuộn dây so với đỉnh chỉ đi qua 30cm dây cáp (*h*.2b). Bằng cách quy định nền thời gian của máy hiện sóng là 0,1μs cho mỗi ô vuông chẳng hạn, ta có thể đo được thời gian trễ Δt đó và ước lượng được vận tốc truyền của tín hiệu điện trong dây cáp đồng trục.



H.2. *Quan sát các xung.*

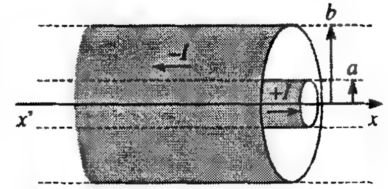
a) *Dụng cụ thí nghiệm : một thiết bị đầu cuối đặt song song trên dây cáp (xem bài tập 2 và 3) cho phép loại bỏ các phản xạ của tín hiệu trong dây cáp.*

b) *Màn hình máy hiện sóng.*

1.2. Mô hình lan truyền trong đường dây

Khi khảo sát điện động học, chúng ta làm việc theo phép gần đúng của các chế độ chuẩn dừng. Chúng ta bỏ qua các hiện tượng lan truyền, và trong điều kiện đó thì các yếu tố của mạch là các hằng số định xứ. Vì

Đường dây điện không có tường minh trong chương trình năm thứ hai. Tuy nhiên, chúng tôi đã lựa chọn nó để giới thiệu các khái niệm quan trọng, như khái niệm trở kháng đặc trưng, sự truyền tải năng lượng, hay những hiện tượng phản xạ và truyền qua (chúng có trong chương trình), vì rằng nó cho phép sử dụng những kĩ năng tính toán đặc biệt đơn giản.



H.1. *Dây cáp đồng trục.*

1 Sự lan truyền sóng điện trong một đường dây

1.1. Thí nghiệm : sự lan truyền trong một dây cáp đồng trục

1.1.1. Cấu trúc của một dây cáp đồng trục.

Cấu trúc của một dây cáp đồng trục được biểu diễn trên *hình 1*. Lõi của dây cáp là một sợi dây bằng đồng, hình trụ, bán kính a. Nó được bọc bằng một lớp cách điện. Vỏ dây cáp có bán kính trong b, bằng đồng và bao quanh tất cả. Loại dây cáp này nối, chẳng hạn một máy thu hình với ăngten thu sóng.

1.1.2. Quan sát sự lan truyền

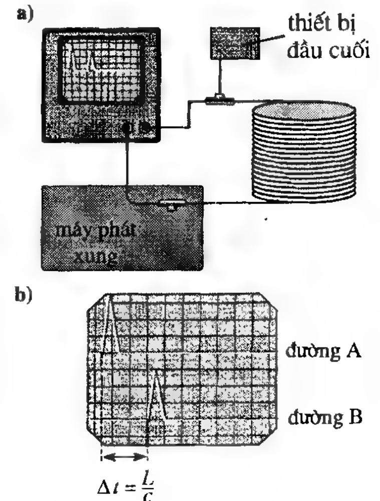
Chúng ta biết rằng nối một máy phát tín hiệu với một máy hiện sóng bằng một dây cáp đồng trục thì cho phép hiển thị tín hiệu từ máy phát truyền đi.

Thực ra điều này không hoàn toàn đúng, vì tín hiệu không được dây cáp truyền đi tức thời từ một máy này sang một máy khác : tín hiệu phải mất một thời gian nào đó để truyền trong dây cáp từ máy này sang máy khác. Nói chung chúng ta không thể cảm nhận được sự chênh lệch đó, vì vận tốc lan truyền trong dây cáp có cùng độ lớn với vận tốc ánh sáng. Một tín hiệu lan truyền trong một dây cáp đồng trục dài 30cm, với vận tốc khoảng 300.000km.s^{-1}, chỉ mất một nanô giây để truyền từ máy phát đến máy hiện sóng.

Để làm nổi rõ sự trễ gắn với một hiện tượng lan truyền trong dây cáp, chúng ta có thể tác động vào chiều dài của dây. Căn cứ vào độ lớn mà ta vừa nói, cần phải sử dụng một dây cáp rất dài, thí dụ như một cuộn dây cáp đồng trục.

Với một dây cáp 100m, sự trễ vào khoảng vài phần mười micrô giây. Nó cũng vẫn là khá nhỏ, nhưng hoàn toàn có thể quan sát được trên máy hiện sóng (tần số cắt của một máy hiện sóng thường lớn hơn 20MHz), nếu ta sử dụng một máy phát xung.

Một máy phát xung được nối với hai đường truyền của một máy hiện sóng bằng cách dùng một dây cáp 30cm ở một bên và một cuộn dây cáp 100m ở bên kia (*h*.2). Trên màn hình của máy hiện sóng, chúng ta quan sát được rõ ràng sự trễ của đỉnh đã đi qua cuộn dây so với đỉnh chỉ đi qua 30cm dây cáp (*h*.2b). Bằng cách quy định nền thời gian của máy hiện sóng là 0,1µs cho mỗi ô vuông chẳng hạn, ta có thể đo được thời gian trễ Δt đó và ước lượng được vận tốc truyền của tín hiệu điện trong dây cáp đồng trục.



H.2. *Quan sát các xung.*

a) *Dụng cụ thí nghiệm : một thiết bị đầu cuối đặt song song trên dây cáp (xem bài tập 2 và 3) cho phép loại bỏ các phản xạ của tín hiệu trong dây cáp.*

b) *Màn hình máy hiện sóng.*

1.2. Mô hình lan truyền trong đường dây

Khi khảo sát điện động học, chúng ta làm việc theo phép gần đúng của các chế độ chuẩn dừng. Chúng ta bỏ qua các hiện tượng lan truyền, và trong điều kiện đó thì các yếu tố của mạch là các hằng số định xứ. Vì

chúng ta không còn ở trong phép gần đúng đó nữa (chúng ta tìm cách làm bộc lộ một hiện tượng lan truyền), chúng ta làm việc với các mạch có hằng số phân bố.

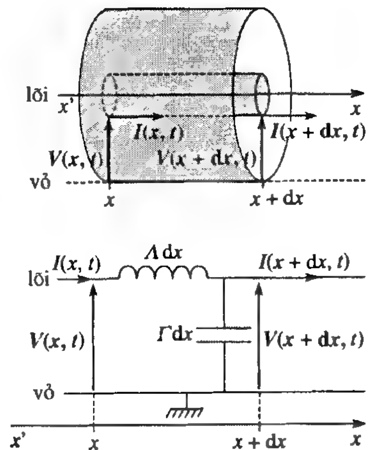
1.2.1. Mô hình đường dây điện có hằng số phân bố

Chúng ta hãy mô hình hóa dây cáp đồng trục, một môi trường liên tục, bằng một đường dây điện có các hằng số phân bố. Chúng ta kí hiệu Λ và Γ là độ cảm và điện dung của mỗi *đơn vị chiều dài* (biểu thị bằng $H.m^{-1}$ và $F.m^{-1}$). Đường dây được so sánh với một chuỗi những đoạn sơ cấp có độ dài dx, coi như những tứ cực sơ cấp được gắn với một độ cảm $dL = \Lambda dx$ và một điện dung $dC = \Gamma dx$ (*h*.3).

Nhận xét : ở đây chúng ta bỏ qua mọi sự hao tổn (điện trở của đường dây, độ dẫn nạp rò giữa lõi và vỏ, ...).

Mô hình này cho phép thấy được một cách đơn giản sự truyền sóng điện trong một dây cáp đồng trục mà ta vừa quan sát (chúng ta sẽ khảo sát một mô hình về sự truyền trường điện từ trong một đường dây, trong *bài tập* 3, *chương* 5).

Các đặc trưng Λ và Γ có thể tính được dựa vào hình học của đường dây điện, ở đây là một dây cáp đồng trục (xem *Áp dụng 1*).



H.3. *Sơ đồ điện của một đoạn đường dây có độ dài* dx.

Áp dụng 1

Độ cảm dài và điện dung dài của một dây cáp đồng trục

1) *Sử dụng một mô hình tĩnh trong đó lõi mang một điện tích mặt σ (vỏ mang điện tích trái dấu), hãy biểu diễn điện dung của dây cáp trên mỗi đơn vị chiều dài.*

2) *Cũng làm như trên, nhưng thừa nhận rằng các dòng điện $+I$ và $-I$ do lõi và vỏ truyền tải ứng với những sự phân bố mặt của các dòng điện $\vec{j}_{sa} = j_{sa}\vec{e}_x$ và $\vec{j}_{sb} = j_{sb}\vec{e}_x$ trên những mặt đối diện nhau của lõi và vỏ, hãy biểu diễn độ cảm dài của dây cáp.*

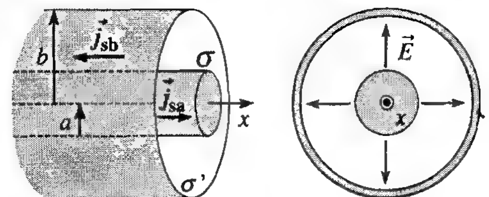
<u>*Chú ý :*</u>

Những đặc trưng điện từ của lớp cách điện phân cách lõi và vỏ của dây cáp được coi như là của chân không, mà các độ thẩm điện và từ là ε_0 và μ_0.

1) Trường tĩnh điện của sự phân bố đối xứng trụ đã đề xuất (điện tích mặt σ trên lõi, điện tích mặt $\sigma' = -\sigma\frac{a}{b}$ trên thành trong của vỏ) có dạng $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ (*h*.4a). Trong miền không có điện tích nằm giữa hai bản, trường đó có thông lượng bảo toàn, do đó $2\pi r E(r) = \text{const}$.

Ta thu được hằng số đó bằng cách áp dụng định lí GAUSS cho một hình trụ có trục (Ox), bán kính r nằm trong khoảng giữa a và b : $\frac{2\pi a\sigma}{\varepsilon_0} = \text{const}$. Từ đó rút ra : $\vec{E} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$.

Đối với $r < a$ hoặc $r > b$, ta có $\vec{E} = 0$.



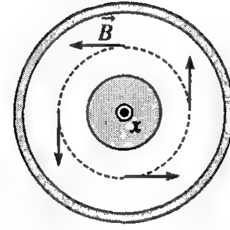
H.4a. *Điện trường của đường dây.*

Năng lượng điện từ tương ứng đối với mỗi đơn vị chiều dài của dây cáp là :

$$\int_{r=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} 2\pi r dr = \int_{r=a}^{b} \frac{a^2\sigma^2}{2\varepsilon_0 r^2} 2\pi r dr$$

$$= \frac{\pi\sigma^2 a^2}{\varepsilon_0} \ln\left[\frac{b}{a}\right],$$

có thể đồng nhất hóa với $\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\Gamma}$, là năng lượng trên một đơn vị chiều dài của một tụ điện mang một điện tích dài $\lambda = 2\pi a\sigma = -2\pi b\sigma'$, tức là $\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\frac{b}{a}\right]}$.



H.4b. *Từ trường của đường dây.*

2) Do đối xứng, từ trường của sự phân bố đã đề xuất có dạng $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$ (*h*.4b). Trong miền ở giữa các bản, áp dụng định lí AMPÈRE cho một đường tròn có trục (Ox) và bán kính r, ta được :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$

đối với r nằm giữa a và b, và $\vec{B} = 0$ ở các chỗ khác. Năng lượng từ dài tương ứng là :

$$\int_{r=0}^{\infty} \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r dr = \frac{1}{4\pi}\mu_0 I^2 \ln\left[\frac{b}{a}\right],$$

có thể đồng nhất hóa với $\frac{1}{2}\Lambda I^2$, tức là $\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left[\frac{b}{a}\right]$.

Chú ý :

Trong chế độ biến thiên, cấu trúc trường điện từ của các sóng lan truyền trong mạch cho phép sử dụng các giá trị này, chúng đã được tính toán một cách tiên nghiệm trong chế độ tĩnh, để mô tả sự truyền sóng điện phẳng trong dây cáp.

Xét tích $\Lambda\Gamma$: $\Lambda\Gamma = e_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

Tích này bằng nghịch đảo của bình phương vận tốc ánh sáng trong chân không :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}.$$

1.2.2. Các phương trình liên kết

Khi viết các phương trình điện học liên quan đến đoạn đường dây có chiều dài dx (*h*.5), ta được :

$$\Lambda dx\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = V(x,t) - V(x+dx,t)$$

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\Gamma dx}(I(x,t) - I(x+dx,t))$$

Như vậy sự lan truyền trong đường dây được mô tả bằng hệ các phương trình liên kết :

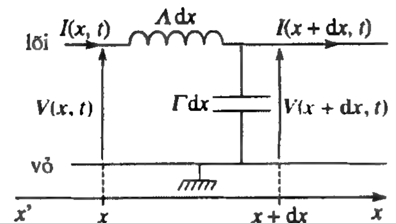
$$\Lambda\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \text{ và } \Gamma\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial I(x,t)}{\partial x}$$

1.2.3. Phương trình lan truyền

Phương trình lan truyền được rút ra bằng cách khử V hoặc I trong hệ các phương trình liên kết. Ta được :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - \Lambda\Gamma\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0 \text{ và } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \Lambda\Gamma\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0.$$

Chúng ta nhận ra phương trình d'ALEMBERT, được V và I nghiệm đúng, ở đây vận tốc đặc trưng của sự lan truyền là $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$.



H.5. *Sơ đồ điện học của một đoạn đường dây có độ dài* dx.

1.3. Sự tương tự điện cơ

Đáng chú ý là phương trình lan truyền thu được lại vẫn là phương trình d'ALEMBERT mà ta đã khảo sát vài nghiệm ở chương 2. Vậy chúng ta có thể áp dụng những kết quả đã tìm ra và thấy được những tương tự giữa sự lan truyền dao động dọc theo một sợi dây và sự lan truyền sóng điện trong một đường dây :

• cái tương tự cơ học của độ cảm L là khối lượng M, vậy cái tương tự của Λ là mật độ khối lượng dài μ ;

• cái tương tự của điện dung C là nghịch đảo của hằng số cứng $\frac{1}{K}$, vậy cái tương tự của Γ có dạng $\frac{1}{Ka}$, ở đây a là một độ dài, tức là nghịch đảo của một lực mà ta sẽ kí hiệu là T_0 ;

• sự tương ứng đó cho phép chuyển từ vận tốc truyền dọc theo sợi dây : $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ sang vận tốc truyền trong đường dây : $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$.

Như vậy ta lập được bảng so sánh (*h.*6).

đường dây điện	**sợi dây**
nguồn gốc của sự lan truyền : những biến thiên theo không gian và thời gian của hai đại lượng liên kết, duy trì lẫn nhau.	
các đại lượng	
• dòng điện $I(x, t)$ • điện áp $V(x, t)$	• vận tốc $v(x,t) = \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)$ (dịch chuyển ngang) • thành phần ngang của lực căng của sợi dây : $-F_y(x,t) = -T_0\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t)$ (sai khác về dấu)
các phương trình liên kết	
$\begin{cases}\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial V}{\partial x}\\ \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial I}{\partial x}\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial(-F_y)}{\partial x}\\ \frac{\partial(-F_y)}{\partial t} = -T_0\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$
các hằng số đặc trưng của môi trường	
Λ độ cảm dài Γ điện dung dài	μ mật độ khối lượng dài $\frac{1}{T_0}$ nghịch đảo lực căng của sợi dây
sự lan truyền (một chiều) của các đại lượng này, là hệ quả sự liên kết của các đạo hàm theo không gian và theo thời gian, được mô tả bởi phương trình lan truyền d'ALEMBERT, hay phương trình sóng cổ điển : $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$	
vận tốc c đặc trưng cho sự lan truyền	
$c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$	$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

◄ **H.6.** *Những sự tương tự giữa đường dây điện và sợi dây dao động.*

1.3. Sự tương tự điện cơ

Đáng chú ý là phương trình lan truyền thu được lại vẫn là phương trình d'ALEMBERT mà ta đã khảo sát vài nghiệm ở chương 2. Vậy chúng ta có thể áp dụng những kết quả đã tìm ra và thấy được những tương tự giữa sự lan truyền dao động dọc theo một sợi dây và sự lan truyền sóng điện trong một đường dây :

• cái tương tự cơ học của độ cảm L là khối lượng M, vậy cái tương tự của Λ là mật độ khối lượng dài μ ;

• cái tương tự của điện dung C là nghịch đảo của hằng số cứng $\frac{1}{K}$, vậy cái tương tự của Γ có dạng $\frac{1}{Ka}$, ở đây a là một độ dài, tức là nghịch đảo của một lực mà ta sẽ kí hiệu là T_0 ;

• sự tương ứng đó cho phép chuyển từ vận tốc truyền dọc theo sợi dây : $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ sang vận tốc truyền trong đường dây : $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$.

Như vậy ta lập được bảng so sánh (*h*.6).

đường dây điện	sợi dây
nguồn gốc của sự lan truyền : những biến thiên theo không gian và thời gian của hai đại lượng liên kết, duy trì lẫn nhau.	
các đại lượng	
• dòng điện $I(x, t)$	• vận tốc $v(x,t) = \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)$ (dịch chuyển ngang)
• điện áp $V(x, t)$	• thành phần ngang của lực căng của sợi dây : $-F_y(x,t) = -T_0\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t)$ (sai khác về dấu)
các phương trình liên kết	
$\begin{cases}\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial V}{\partial x}\\ \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial I}{\partial x}\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial(-F_y)}{\partial x}\\ \frac{\partial(-F_y)}{\partial t} = -T_0\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$
các hằng số đặc trưng của môi trường	
Λ độ cảm dài	μ mật độ khối lượng dài
Γ điện dung dài	$\frac{1}{T_0}$ nghịch đảo lực căng của sợi dây
sự lan truyền (một chiều) của các đại lượng này, là hệ quả sự liên kết của các đạo hàm theo không gian và theo thời gian, được mô tả bởi phương trình lan truyền d'ALEMBERT, hay phương trình sóng cổ điển : $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$	
vận tốc c đặc trưng cho sự lan truyền	
$c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$	$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

◄ **H.6.** *Những sự tương tự giữa đường dây điện và sợi dây dao động.*

2 Trở kháng đặc trưng của đường dây điện

Thuật ngữ trở kháng tất nhiên khiến chúng ta nghĩ đến các đại lượng điện học. Đúng vậy, chúng ta sẽ sử dụng ở đây thí dụ về mạch điện để đề cập khái niệm đó. Tất nhiên, chúng ta sẽ mở rộng các kết quả thu được sang các sóng cơ học, thậm chí cả các sóng khác nữa.

2.1. Định nghĩa

Xét một *sóng phẳng chạy* di chuyển theo chiều tăng của x. Ta biết rằng $I(x, t)$ và $V(x, t)$ là nghiệm của phương trình d'ALEMBERT chúng có dạng :

$$I(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \text{ và } V(x,t) = h\left(t - \frac{x}{c}\right);$$

chúng ta tìm xem có một hệ thức đơn giản nào giữa hai đại lượng đó không.

Phương trình lan truyền là một hệ quả của các phương trình liên kết, vậy các nghiệm $I(x, t)$ và $V(x, t)$ tương thích với vật lí học của bài toán, trong thực tế là liên kết.

Ta hãy lấy nghiệm $I(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ và hãy xây dựng nghiệm $V(x, t)$, xuất phát từ các phương trình liên kết dòng điện và điện áp :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -\Lambda \dfrac{\partial I}{\partial t} = -\Lambda f'\left(t - \dfrac{x}{c}\right) \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} = -\dfrac{1}{\Gamma}\dfrac{\partial I}{\partial x} = \dfrac{1}{\Gamma c} f'\left(t - \dfrac{x}{c}\right) \end{cases}$$

(kí hiệu $f'(u) = \frac{df}{du}$, với $u = t - \frac{x}{c}$).

Lấy tích phân phương trình thứ nhất đối với x, ta được :

$$V(x,t) = \Lambda c f\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(t).$$

Đưa biểu thức này vào phương trình thứ hai, ta được :

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \Lambda c f'\left(t - \frac{x}{c}\right) + H'(t) = \frac{1}{\Gamma c} f'\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Biết rằng $\Lambda c = \frac{1}{\Gamma c} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$, ta rút ra $H'(t) = 0$ và $H(t) = \text{const}K$. Vì chúng ta chỉ quan tâm đến những hiện tượng đang lan truyền, tức là biến thiên theo thời gian, chúng ta lấy $K = 0$.

Cuối cùng, nghiệm cần tìm là :

$$V(x,t) = h\left(t - \frac{x}{c}\right) = Z_c f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

với kí hiệu $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$, nó đồng nhất với một trở kháng biểu thị bằng ôm.

Đối với một sóng phẳng chạy truyền theo chiều tăng của x, điện áp V và cường độ I gắn với nhau bởi $V(x,t) = Z_c I(x,t)$, hệ thức này xác định trở kháng đặc trưng $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$ của đường dây điện (chú ý rằng Z_c là thực).

Áp dụng 2

Trở kháng đặc trưng của một dây cáp đồng trục

Các bán kính của lõi và vỏ một dây cáp máy thu hình (xem Áp dụng 1) lần lượt là a = 1mm và b = 3,5mm.

Khoảng giữa lõi và vỏ không phải trống rỗng, mà chứa đầy một vật liệu cách điện không có từ tính (poliêtilen) có độ thẩm điện tỉ đối $\varepsilon_r = 2{,}26$

Cho biết :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}.10^{-9}\,\text{F.m}^{-1} \;;$$

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\,\text{H.m}^{-1}.$$

Điện dung dài, độ cảm dài của dây cáp, vận tốc truyền c của các tín hiệu điện mà nó truyền tải, và trở kháng đặc trưng Z_c của nó là bao nhiêu ?

Muốn tính điện dung dài của dây cáp, ta thay độ thẩm điện của chân không ε_0 xuất hiện trong kết quả của *Áp dụng 1* bằng độ thẩm điện của chất cách điện : $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$.

Với c_0 là vận tốc ánh sáng trong chân không, ta được :

$$\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left[\frac{b}{a}\right]} = 100\,\text{pF.m}^{-1} \;;$$

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left[\frac{b}{a}\right] = 0{,}25\,\mu\text{H.m}^{-1} \;;$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \approx 2.10^8\,\text{m.s}^{-1} \;;$$

$$Z_c = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}\ln\left[\frac{b}{a}\right] \approx 50\,\Omega.$$

2.2. Trường hợp sóng phẳng

Trong trường hợp một sóng phẳng chạy di chuyển theo chiều tăng của x, $I(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$, thì một phép tính tương tự như ở §**2.1** dẫn đến $V(x,t) = -Z_c I(x,t)$.

Bằng sự chồng chập hai kết quả nói trên, chúng ta suy ra rằng khi mạch có một sóng phẳng dạng :

$$I(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

chạy qua thì điện áp $V(x, t)$ được viết thành : $V(x,t) = Z_c\left[f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t + \frac{x}{c}\right)\right]$.

3 Sự lan truyền năng lượng trong đường dây điện

3.1. Trường hợp sóng phẳng chạy

Xét một sóng phẳng chạy di chuyển theo chiều tăng của x, dọc theo một đường dây có trở kháng đặc trưng bằng Z_c.

Trong các điều kiện đó, ta biết rằng :

$$I(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \text{ và } V(x,t) = Z_c f\left(t - \frac{x}{c}\right), \text{ tức là } V(x,t) = Z_c I(x,t).$$

3.1.1. Công suất được truyền tải

Vì dòng điện $I(x, t)$ được tính là dương theo chiều tăng của x, nên công suất được phần bên trái (hoành độ nhỏ hơn x) của đường dây truyền tải cho phần bên phải (hoành độ lớn hơn x) bằng $\mathscr{P}(x, t) = +V(x, t)I(x, t)$, tức là $\mathscr{P}(x,t) = +Z_c I^2(x,t)$.

3.1.2. Mật độ dài của năng lượng

Năng lượng $\delta\mathscr{E}$ tích lũy trong một nguyên tố đường dây có độ dài dx là tổng các năng lượng tích lũy trong điện cảm Λdx và trong điện dung Γdx, tức là :

$$\delta\mathscr{E} = \frac{1}{2}\Lambda\delta x I^2(x,t) + \frac{1}{2}\Gamma\delta x V^2(x,t).$$

Mật độ dài của năng lượng $e(x, t)$ được xác định bởi $\delta\mathscr{E} = e(x, t)\delta x$ và bằng :

$$e(x,t) = \frac{1}{2}\Lambda I^2(x,t) + \frac{1}{2}\Gamma V^2(x,t) \ ;$$

e cũng có thể được viết dưới dạng :

$$e(x,t) = \frac{1}{2}\Lambda I^2(x,t) + \frac{1}{2}\Gamma Z_c^2 I^2(x,t) = \Lambda I^2(x,t),$$

vì $\Gamma Z_c^2 = \Lambda$.

3.1.3. Sự cân bằng năng lượng địa phương. Vận tốc năng lượng

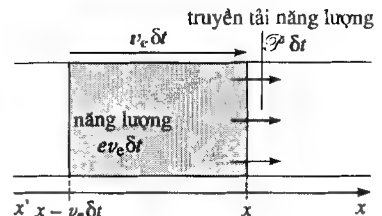
Chúng ta có thể xác định vận tốc lan truyền năng lượng v_e bằng cách biểu thị năng lượng δW truyền qua một tiết diện có tọa độ x, trong khoảng thời gian δt, theo hai cách khác nhau :

- biết công suất truyền đi $\mathscr{P}(x, t)$, ta có $\delta W = \mathscr{P}(x, t)\delta t$;
- vì mật độ khối của năng lượng $e(x, t)$ di chuyển với vận tốc v_e, nên năng lượng δW cần tìm (*h.*7) ứng với năng lượng chứa trong một nguyên tố đường dây có độ dài $v_e\delta t$, tức là $\delta W = e(x, t)\, v_e\, \delta t$.

Đồng nhất hóa hai biểu thức đó, ta được :

$$\delta W = \mathscr{P}(x, t)\delta t = e(x, t)\, v_e\, \delta t, \text{ tức là } \mathscr{P}(x, t) = e(x, t)\, v_e.$$

Như vậy, chúng ta kiểm tra được rằng v_e đồng nhất với vận tốc truyền sóng c, bởi vì : $v_e = \dfrac{\mathscr{P}(x,t)}{e(x,t)} = \dfrac{Z_c I^2(x,t)}{\Lambda I^2(x,t)} = \dfrac{Z_c}{\Lambda} = c$.



H.7. *Năng lượng δW truyền qua mặt phẳng có tọa độ x ứng với năng lượng chứa trên một nguyên tố đường dây có độ dài $v_e$dt, tức là $\delta W = e(x, t)\, v_e$dt.*

Chú ý :

Biến thiên của mật độ năng lượng điện đi cùng với sóng ở đây chỉ gắn duy nhất với sự truyền tải năng lượng. Trong các trường hợp khác, có thể phải tính đến những số hạng hấp thụ (đường dây có điện trở, rò điện trong các tụ điện) hoặc khuếch đại (nguồn năng lượng).

Đối với một sóng phẳng chạy $\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$, mật độ dài của năng lượng di chuyển với vận tốc c (chú ý rằng $e(x,t) = \Lambda f^2\left(t - \frac{x}{c}\right)$ là một hàm của $t - \frac{x}{c}$).

3.2. Trường hợp sóng phẳng

Xét một sóng phẳng là sự chồng chập của hai sóng phẳng chạy di chuyển theo hai chiều ngược nhau của trục (x, x'), dọc theo một đường dây có trở kháng đặc trưng Z_c, tức là :

$$I(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

và $$V(x,t) = Z_c\left[f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t + \frac{x}{c}\right)\right].$$

3.2.1. Công suất được truyền tải

Dòng điện $I(x, t)$ được tính là dương theo chiều tăng của x, nên công suất do phần bên trái của đường dây (hoành độ nhỏ hơn x) truyền tải cho phần bên phải (hoành độ lớn hơn x) bằng :

$$\mathcal{P}(x, t) = +V(x, t)I(x, t)$$

Có thể viết hệ thức đó thành :

$$\mathcal{P}(x, t) = +Z_c\left[f^2\left(t - \frac{x}{c}\right) - g^2\left(t + \frac{x}{c}\right)\right]$$

Hai số hạng xuất hiện trong biểu thức này lần lượt ứng với sóng phẳng chạy $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ truyền theo chiều tăng của x và truyền tải năng lượng theo chiều đó, và sóng phẳng chạy $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ truyền theo chiều ngược lại và cũng truyền tải năng lượng theo chiều đó (vì vậy có dấu trừ).

3.2.2. Mật độ năng lượng

Năng lượng $\delta\mathcal{E}$ tích lũy trong một nguyên tố đường dây có độ dài dx bao giờ cũng là tổng các năng lượng tích lũy trong điện cảm Λdx và điện dung Γdx, tức là :

$$\delta\mathcal{E} = \frac{1}{2}\Lambda\delta x I^2(x,t) + \frac{1}{2}\Gamma\delta x V^2(x,t)$$

và mật độ dài của năng lượng bằng :

$$e(x,t) = \frac{1}{2}\Lambda(I)^2(x,t) + \frac{1}{2}\Gamma V^2(x,t).$$

Chú ý :

Biến thiên của mật độ năng lượng điện đi cùng với sóng ở đây chỉ gắn duy nhất với sự truyền tải năng lượng. Trong các trường hợp khác, có thể phải tính đến những số hạng hấp thụ (đường dây có điện trở, rò điện trong các tụ điện) hoặc khuếch đại (nguồn năng lượng).

Đối với một sóng phẳng chạy $\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$, mật độ dài của năng lượng di chuyển với vận tốc c (chú ý rằng $e(x,t) = \Lambda f^2\left(t - \frac{x}{c}\right)$ là một hàm của $t - \frac{x}{c}$).

3.2. Trường hợp sóng phẳng

Xét một sóng phẳng là sự chồng chập của hai sóng phẳng chạy di chuyển theo hai chiều ngược nhau của trục (x, x'), dọc theo một đường dây có trở kháng đặc trưng Z_c, tức là :

$$I(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

và $$V(x,t) = Z_C\left[f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t + \frac{x}{c}\right)\right].$$

3.2.1. Công suất được truyền tải

Dòng điện $I(x, t)$ được tính là dương theo chiều tăng của x, nên công suất do phần bên trái của đường dây (hoành độ nhỏ hơn x) truyền tải cho phần bên phải (hoành độ lớn hơn x) bằng :

$$\mathscr{P}(x, t) = +V(x, t)I(x, t)$$

Có thể viết hệ thức đó thành :

$$\mathscr{P}(x, t) = +Z_C\left[f^2\left(t - \frac{x}{c}\right) - g^2\left(t + \frac{x}{c}\right)\right]$$

Hai số hạng xuất hiện trong biểu thức này lần lượt ứng với sóng phẳng chạy $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ truyền theo chiều tăng của x và truyền tải năng lượng theo chiều đó, và sóng phẳng chạy $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ truyền theo chiều ngược lại và cũng truyền tải năng lượng theo chiều đó (vì vậy có dấu trừ).

3.2.2. Mật độ năng lượng

Năng lượng $\delta\mathscr{E}$ tích lũy trong một nguyên tố đường dây có độ dài dx bao giờ cũng là tổng các năng lượng tích lũy trong điện cảm Λdx và điện dung Γdx, tức là :

$$\delta\mathscr{E} = \frac{1}{2}\Lambda\delta x I^2(x,t) + \frac{1}{2}\Gamma\delta x V^2(x,t)$$

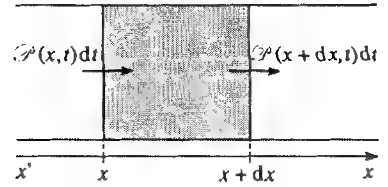
và mật độ dài của năng lượng bằng :

$$e(x,t) = \frac{1}{2}\Lambda(I)^2(x,t) + \frac{1}{2}\Gamma V^2(x,t).$$

Dùng các kí hiệu "f" và "g", ta được :

$$e(x,t) = \Lambda\left(f^2\left(t-\frac{x}{c}\right)+g^2\left(t+\frac{x}{c}\right)\right).$$

biểu thức này lại làm xuất hiện hai số hạng dương mà ta có thể gán cho hai sóng chạy được sử dụng trong sóng được khảo sát.



H.8. *Hiệu các năng lượng đi vào và đi ra làm thay đổi mật độ dài của năng lượng e(x, t).*

3.2.3. Sự cân bằng năng lượng địa phương

Sự biến thiên năng lượng chứa trong một độ dài nguyên tố dx của đường dây trong khoảng thời gian δt gắn với sự truyền tải năng lượng diễn ra tại x và $x + dx$ (*h*.8).

Năng lượng truyền qua một tiết diện ở tọa độ x ($\mathscr{P}(x, t)\delta t$) trong khoảng thời gian δt trừ đi năng lượng truyền qua một tiết diện ở tọa độ $x + dx$ ($\mathscr{P}(x + dx,t)\delta t$) trong cùng khoảng thời gian đó, thì bằng sự biến thiên năng lượng giữa hai mặt phẳng đó trong khoảng thời gian δt :

$$\mathscr{P}(x, t)\delta t - \mathscr{P}(x + dx, t)\delta t = \frac{\partial e(x,t)}{\partial t}dx\delta t$$

tức là
$$-\frac{\partial \mathscr{P}(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial e(x,t)}{\partial t}.$$

<u>*Chú ý :*</u>

• *Có thể kiểm tra dễ dàng phương trình này bằng cách sử dụng biểu thức tổng quát của công suất (xem* §**3.2.1**) :

$$\mathscr{P}(x, t) = +V(x, t)I(x, t),$$

do đó $-\dfrac{\partial \mathscr{P}(x,t)}{\partial x} = -I(x,t)\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial x} - V(x,t)\dfrac{\partial I(x,t)}{\partial x}$;

$$e(x,t) = \frac{1}{2}\Lambda I^2(x,t) + \frac{1}{2}\Gamma V^2(x,t),$$

vậy $\dfrac{\partial e(x,t)}{\partial t} = I(x,t)\Lambda\dfrac{\partial I(x,t)}{\partial t} + V(x,t)\Gamma\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial t}$, và các phương trình liên kết (xem §**1.2.2**) :

$$\Lambda\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}$$

và $$\Gamma\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial I(x,t)}{\partial x}$$

• Đối với các nghiệm mà ta vừa viết như là sự chồng chập các sóng phẳng chạy, chúng ta có thể kiểm tra trực tiếp sự cân bằng đó bằng cách viết :

$$-\frac{\partial \mathscr{P}(x,t)}{\partial x} = \frac{Z_c}{c}2[ff' + gg'] = \frac{\partial e(x,t)}{\partial t} = \Lambda\frac{\partial}{\partial t}[f^2 + g^2].$$

3.3. Trở kháng và công suất đi đối với sự lan truyền một chiều

Chúng ta có thể tổng quát hóa nhanh chóng các kết quả đã thu được trong trường hợp đường dây điện, bằng cách vận dụng những sự tương tự đã được nêu lên trước đây và xây dựng bảng so sánh (*h*.9).

<table>
<tr><th>đường dây điện</th><th>sợi dây dao động</th></tr>
<tr><td colspan="2">công suất được truyền tải (theo chiều tăng của x) trong môi trường có thể được biểu thị như tích của các đại lượng (liên hợp về năng lượng)</td></tr>
<tr><td colspan="2">công suất</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{P}(x, t) = V(x, t)I(x, t)$</td><td>$\mathcal{P}(x, t) = (-F_y(x,t))v(x,t)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">các phương trình biến thiên của các đại lượng đó là liên kết, nên các biểu thức của chúng - dưới dạng một sự chồng chập của hai sóng phẳng chạy, truyền với vận tốc c theo chiều x tăng hoặc giảm - gắn với nhau làm xuất hiện trở kháng đặc trưng của môi trường nơi chúng lan truyền.</td></tr>
<tr><td colspan="2">biểu thức tổng quát của các phương trình biến thiên</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} I(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \\ V(x,t) \\ = Z_c\left[f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t + \frac{x}{c}\right)\right] \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} v(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \\ -F_y(x,t) \\ = Z_c\left[f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t + \frac{x}{c}\right)\right] \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">trở kháng đặc trưng của môi trường</td></tr>
<tr><td>$Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$</td><td>$Z_c = \sqrt{T_0\mu}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">trong các môi trường "lí tưởng" này (không có hấp thụ hoặc khuếch đại), công suất được truyền tải $\mathcal{P}(x, t)$ và mật độ dài của năng lượng $e(x, t)$ gắn với nhau bằng sự cân bằng năng lượng địa phương : $\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x}$.

Năng lượng, cũng như mọi đại lượng khác đi đối với các sóng là nghiệm của phương trình d'ALEMBERT, lan truyện với vận tốc c.</td></tr>
</table>

H.9. *Những sự tương tự điện – cơ.*

Chú ý :

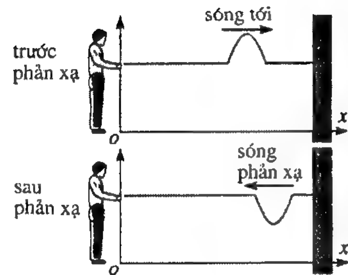
Đối với sợi dây dao động, công suất truyền tải từ trái sang phải thì bằng $-F_y v$ (xem bài tập 6).

4 Ảnh hưởng của các điều kiện biên

Trong chương này, chúng ta chưa tính đến các giới hạn có thể có của các môi trường lan truyền : kích thước giới hạn (theo (Ox)), những sự gián đoạn của môi trường. Chúng đặt ra những *điều kiện biên* mà các sóng phải thỏa mãn.

Khi một đường dây truyền bị đóng lại ở một trở kháng đầu cuối hoặc bị nối với một môi trường thứ hai, thì sự thể hiện các điều kiện biên cho phép xác định các đặc trưng của sóng phản xạ và sóng truyền qua được hình thành.

Các điều kiện biên phải được xác lập cho từng trường hợp một, bằng cách khảo sát chính ngay bài toán được đặt ra mỗi lần.



H.10. *Sóng tới và sóng phản xạ trên một sợi dây dao động.*

4.1. Phản xạ ở đầu đường dây bị đóng lại bởi một trở kháng đầu cuối

4.1.1. Thí nghiệm sơ đẳng

Nếu chúng ta áp đặt một chấn động vào đầu một sợi dây có đầu kia gắn vào một bức tường, vào lúc đầu chúng ta có thể thấy sự biến dạng tạo ra di chuyển về phía bức tường : một sóng loại "f" lan truyền với vận tốc c theo chiều tăng của x (*h.*10). Khi biến dạng này đi tới bức tường, nó không biến mất một cách giản đơn vì bị đầu cuối này hấp thụ, trái lại ta quan sát thấy một chấn động (ngược chiều với sóng tới) đi trở lại phía ta : sóng tới "f" đã làm nẩy sinh ở ngang đầu cuối một sóng phản xạ loại "g".

Hiện tượng quan sát được có tính tổng quát, và ta sẽ thấy lại nó đối với tất cả các sóng mà ta sẽ khảo sát sự lan truyền. Một vách đá hắt lại một tiếng vang, một cái gương hắt lại một ánh sáng, là những thí dụ về sự phản xạ sóng âm và sóng ánh sáng (sóng điện từ).

Tiếp tục trường hợp tổng quát của đường dây điện mà ta đã khảo sát cho tới nay. Chúng ta sẽ khảo sát ở đây sự phản xạ của một sóng điện ở cuối một đường dây, nhưng vẫn ghi nhớ trong đầu óc tính tổng quát của các hiện tượng quan sát được.

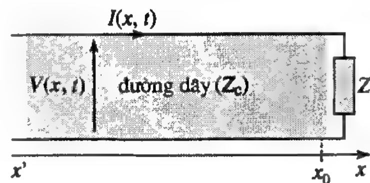
4.1.2. Trở kháng đầu cuối, điều kiện biên

Xét trường hợp một đường dây điện tận cùng ở hoành độ x_0 bằng một thiết bị đầu cuối có trở kháng Z (*h.*11).

Nếu chẳng hạn chúng ta dùng một dây dẫn nối lõi và vỏ của một dây cáp đồng trục ở đầu cuối của nó thì đầu ra bị đoản mạch. Ta đã tạo ra một trở kháng đầu cuối bằng không : $Z = 0$. Trái lại, một đường dây điện có đầu cuối mở ứng với một trở kháng đầu cuối vô hạn : $Z = \infty$.

Nói tổng quát hơn, một cách tiên nghiệm thì trở kháng Z là một đại lượng phức được xác định đối với một tần số ω đã cho. Khi đó ta hiểu ngầm rằng ta giải bài toán cho một sóng tới chạy dạng sin có tần số đã cho.

<u>Chú ý :</u> *Một tín hiệu vật lí bất kì có thể được phân tích thành sự chồng chập của các sóng đơn sắc. Như vậy việc nghiên cứu sự phản xạ của một sóng chạy đơn sắc là bổ ích. Sự phản xạ của một tín hiệu vật lí bất kì có thể được phân tích bằng sự chồng chập các đáp ứng ứng với các tần số* ω *khác nhau chứa trong sóng tới.*



H.11. *Thiết bị đầu cuối ở cuối đường dây.*

Điều kiện giới hạn $x = x_0$ diễn tả rằng đường dây bị đóng trên trở kháng $\underline{Z}$ được viết như sau cho mọi t, cho một sóng dạng sin, và trong cách kí hiệu phức :

$$\underline{Z}\underline{I}(x_0, t) = \underline{V}(x_0, t)$$

Áp dụng 3

Những thí dụ về trở kháng đầu cuối

Một cái vòng khối lượng M được treo tại $x = x_0$, ở đầu một sợi dây kéo căng (độ căng T_0). Nó được định vị bởi độ cao y(t) của nó. Trạng thái dao động của sợi dây được mô tả bởi hàm dương $\psi(x, t)$.

1) *Cho biết giá trị của các trở kháng (xác định bởi $-F_y(x_0,t) = Zv(x_0,t)$ với :*

$$F_y(x_0,t) = T_0\left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}\right)_{(x_0,t)}$$

và
$$v(x_0,t) = \left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\right)_{(x_0,t)}$$

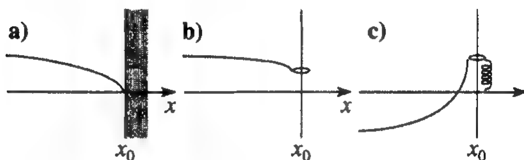
và điều kiện biên ở $x = x_0$ ứng với các trường hợp mà một sợi dây dao động được gắn :

a) *với một cái vòng cố định ở điểm* $(x = x_0, y = 0)$ (*h.*12a) ;

b) *với một cái vòng khối lượng không đáng kể có thể trượt không ma sát trên trục* $(x = x_0, y(t)$ *bất kì*) (*h.*12b) ;

c) *với một cái vòng khối lượng M có thể trượt trên trục* $(x = x_0, y(t)$ *bất kì*) *với ma sát thủy động đặc trưng bởi hệ số λ, trong khi vẫn liên kết với điểm* $(x = x_0, y = 0)$ *bởi một lò xo có độ cứng K, độ dài không tải có thể bỏ qua* (*h.*12c).

Các chuyển động trong trường hợp này được giả định là dạng sin, có tần số ω (phải biểu diễn Z(ω) theo cách kí hiệu phức).



H.12. *Thiết bị đầu cuối ở đầu sợi dây dao động (cái vòng có kích thước rất nhỏ so với bước sóng)*
a. *Đầu dây bị chặn.*
b. *Đầu dây "tự do".*
c. *Cái vòng bị kéo lại, có ma sát.*

2) *Hãy đề xuất những tình huống tương tự trong trường hợp một đường dây điện.*

1) Đối với một sợi dây dao động, chúng ta viết điều kiện biên ở $x = x_0$ cho t bất kì :

$$-F_y(x_0,t) = Zv(x_0,t),$$

tức là :

$$Z = \frac{-F_y(x_0,t)}{\left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\right)_{(x_0,t)}} = \frac{-T_0\left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}\right)_{(x_0,t)}}{\left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\right)_{(x_0,t)}}$$

biết rằng $y(t) = \Psi(x_0,t)$ và

$$F_y(x_0,t) = T_0\left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}\right)_{(x_0,t)},$$

a) Cái vòng là cố định, vậy $y(t) = \Psi(x_0,t) = 0$ bất kì t là bao nhiêu, nghĩa là : $\left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\right)_{(x_0,t)}$ và $\left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}\right)_{(x_0,t)}$ là bất kì (tức là $F_y(x_0,t)$ bất kì).

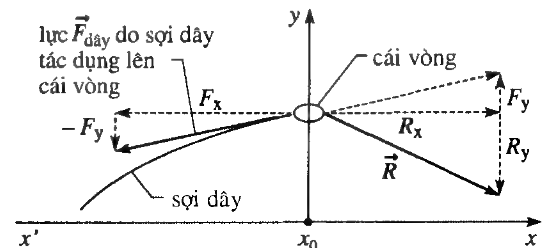
$y(t) = 0$ đối với mọi giá trị của F_y dẫn đến $Z_\omega = \infty$.

b) Áp dụng hệ thức cơ bản của phép chiếu theo (Oy) cho cái vòng có khối lượng M, chịu tác dụng của lực $\vec{F}_{\text{dây}}$ từ phía sợi dây và của các lực khác mà ta kí hiệu là $\vec{R}$ (*h.*13) :

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = F_{\text{dây},y} + R_y$$

với $F_{\text{dây},y} = -F_y(x_0,t) = -T_0\left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}\right)_{(x_0,t)}$.

Trong trường hợp b), cái vòng có khối lượng M bằng không là tự do ($R_y = 0$) trong chuyển động thẳng đứng của nó. Như vậy ta thấy rằng F_y phải triệt tiêu đối với mọi giá trị của $y(t)$, tức là $Z_\omega = 0$.



$$F_y(x_0,t) = T_0\left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}\right)_{(x_0,t)},$$

nên hình chiếu theo (Oy) của hợp lực các lực do sợi dây tác dụng lên cái vòng bằng $-F_y(x_0,t)$.

c) Cũng như vậy $M\frac{d^2y}{dt^2} = -F_y(x_0,t) - \lambda\frac{dy}{dt} - Ky$.

Sử dụng cách kí hiệu phức, ta được : $(-M\omega^2 + j\lambda\omega + K)y = -\underline{F}_y$.

Biết rằng $\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\right)_{(x_0,t)} = v(x_0,t)$,

$\frac{d^2y}{dt^2} = j\omega v(x_0,t)$ và $y = \frac{v(x_0,t)}{j\omega}$, điều đó cho ta :

$\underline{Z}_{cơ} = jM\omega + \lambda + \frac{K}{j\omega}$.

2) a) $Z_{điện} = \infty$: đường dây là mở tại $x = x_0$.

b) $Z_{điện} = 0$: đường dây bị đoản mạch tại $x = x_0$.

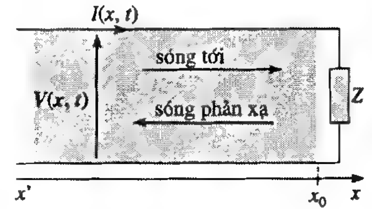
c) $Z_{điện} = jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}$: đường dây bị đóng ở $x = x_0$ trên một mạch bao gồm một điện cảm L, một điện trở R và một điện dung C mắc nối tiếp.

4.1.3. Sự xác định sóng phản xạ

Cho một sóng chạy truyền theo chiều tăng của x, đối với sóng đó $V(x,t) = Z_cI(x,t)$. Nếu nó truyền về phía một thiết bị đầu cuối có trở kháng Z, nói chung nó không thể thỏa mãn điều kiện biên ở $x = x_0$:

$V(x_0,t) = ZI(x_0,t)$ (hay : $\underline{V}(x_0,t) = \underline{Z}\,\underline{I}(x_0,t)$ theo cách kí hiệu phức).

Tất nhiên trừ trường hợp rất đặc biệt khi đường dây bị đóng lại trên trở kháng đặc trưng của nó : $Z_c = Z$. Cũng như trong thí nghiệm trên, ta phải xét đến sự tồn tại một sóng phản xạ (*h.*14).



H.14. *Phản xạ ở cuối đường dây.*

Vì sóng tới được giả định là sóng dạng sin có tần số ω, chúng ta sử dụng cách kí hiệu phức.

Trong miền $x < x_0$, sóng là sự chồng chập của sóng tới (truyền theo chiều tăng của x).

$\underline{I}_i(x,t) = \underline{I}_{i0}e^{j(\omega t - kx)}$ và sóng phản xạ (truyền theo chiều giảm của x) $\underline{I}_r(x,t) = \underline{I}_{r0}e^{j(\omega t + kx)}$ với $k = \frac{\omega}{r}$:

$$\begin{cases} \underline{I}(x,t) = \underline{I}_i(x,t) + \underline{I}_r(x,t) \\ \underline{V}(x,t) = \underline{V}_i(x,t) + \underline{V}_r(x,t) = Z_c(\underline{I}_i(x,t) - \underline{I}_r(x,t)) \end{cases}$$

Điều kiện biên ở $x = x_0$, $\underline{V}(x_0,t) = \underline{Z}\,\underline{I}(x_0,t)$ đòi hỏi :

$$(Z_c - \underline{Z})\underline{I}_i(x_0,t) = (Z_c + \underline{Z})\underline{I}_r(x_0,t)$$

4.1.4. Hệ số phản xạ đối với các biên độ

Hệ số phản xạ đối với biên độ, kí hiệu là $\underline{\rho}$ là tỉ số *ở nơi sóng phản xạ* giữa biên độ phức của sóng phản xạ và biên độ phức của sóng tới.

Từ những hệ thức mà những điều kiện biên đòi hỏi, ta rút ra :

$$\underline{\rho}_i = \frac{\underline{I}_{\text{sóng phản xạ}}(x_0,t)}{\underline{I}_{\text{sóng tới}}(x_0,t)} = \frac{\underline{I}_r(x_0,t)}{\underline{I}_i(x_0,t)} = \frac{Z_c - \underline{Z}}{Z_c + \underline{Z}}$$

$$\underline{\rho}_V = \frac{\underline{V}_{\text{sóng phản xạ}}(x_0,t)}{\underline{V}_{\text{sóng tới}}(x_0,t)} = \frac{-Z_c\underline{I}_r(x_0,t)}{Z_c\underline{I}_i(x_0,t)} = \frac{\underline{Z} - Z_c}{Z_c + \underline{Z}} = -\rho_I.$$

4.1.5. Hệ số phản xạ năng lượng

Đối với các sóng dạng sin, chúng ta chỉ quan tâm đến các giá trị trung bình của các công suất (thực) tới $\mathscr{P}_i$ và phản xạ $\mathscr{P}_r$.

Hệ số phản xạ năng lượng, kí hiệu là R, là tỉ số giữa công suất trung bình phản xạ và công suất trung bình tới, theo giá trị tuyệt đối :

$$R = \left|\frac{\langle \mathscr{P}_r \rangle}{\langle \mathscr{P}_i \rangle}\right|.$$

Biết rằng ta có thể tính giá trị trung bình $\langle \mathscr{P} \rangle$ của công suất :

$$\mathscr{P}(x, t) = V(x, t)I(x, t),$$

với
$$V(x,t) = V_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_1) = \mathscr{R}e(\underline{V})$$

$$I(x,t) = V_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_2) = \mathscr{R}e(\underline{I})$$

bằng hệ thức $< \mathscr{P} >= \frac{1}{2} \mathscr{R}e(\underline{V}\,\underline{I}^*)$, trong đó $\underline{I}^*$ chỉ liên hợp phức của $\underline{I}$, ta có :

$$< \mathscr{P}_i >= \frac{1}{2} \mathscr{R}e(\underline{V}_i\, \underline{I}_i^*) = \frac{1}{2} Z_c \left|\underline{I}_i\right|^2$$

$$< \mathscr{P}_r >= \frac{1}{2} \mathscr{R}e(\underline{V}_r\, \underline{I}_r^*) = -\frac{1}{2} Z_c \left|\underline{I}_r\right|^2$$

và ta rút ra $R = \left|\underline{\rho}\right|^2$, với $\underline{\rho} = \underline{\rho}_I$ hoặc $\underline{\rho}_V$.

4.1.6. Biện luận các kết quả

Chúng là có thể phân tích các kết quả trên đối với vài đầu cuối đặc biệt :

• $Z = \infty$: đầu cuối đường dây là mở.

$$\underline{\rho}_I = -\underline{\rho}_V = -1 \text{ và } R = 1.$$

Sự phản xạ là hoàn toàn, theo nghĩa là toàn bộ năng lượng của sóng tới lại có mặt ở sóng phản xạ.

• $Z = 0$: $\underline{\rho}_I = -\underline{\rho}_V = 1$ và $R = 1$, đường dây điện bị đoản mạch. Ở đây sự phản xạ cũng là hoàn toàn.

• Z thuần túy ảo : ở cuối đường dây V và I vuông góc nhau. Một đầu cuối như vậy (dễ thực hiện trong điện học : điện cảm, điện dung) không phân tán năng lượng, ta lại có sự phản xạ hoàn toàn ($R = 1$).

Những đầu cuối mà đối với chúng $R = 1$ được gọi là đầu cuối lí tưởng : chúng không phân tán năng lượng.

• $Z = Z_c$: đó là trường hợp duy nhất mà ta không cần đưa vào một sóng phản xạ để thỏa mãn điều kiện biên. Thực vậy, ta thấy rằng $\underline{\rho}_I = -\underline{\rho}_V = 0$ và $R = 0$.

Khi đường dây được đóng trên trở kháng đặc trưng của nó thì không có sóng phản xạ, sự phản xạ bằng không. Tất cả năng lượng của sóng tới bị hấp thụ ở đầu cuối : ở đây có *sự thích ứng trở kháng*.

Áp dụng 4

Sự tạo thành các sóng dừng đơn sắc

Một SPCĐS mà dòng điện là :

$$\underline{I}(x,t) = \underline{I}_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

theo cách kí hiệu phức, truyền theo chiều tăng của x dọc theo một đường dây điện có trở kháng đặc trưng Z_c (nằm trong vùng $x < 0$).

Nó phản xạ tại $x = 0$ bởi một đầu cuối lí tưởng, nghĩa là không phân tán năng lượng, có trở kháng $\underline{Z}$.

Xác lập biểu thức của sóng toàn phần có được trên đường dây trong các trường hợp có thể hình dung đối với các giá trị của $\underline{Z}$ ($\underline{Z}$ vô hạn, $\underline{Z} = 0$ và $\underline{Z}$ thuần túy ảo).

Chứng tỏ rằng sóng đó là sóng dừng và chỉ rõ những hoành độ các điểm tại đó biên độ của dòng điện hoặc điện áp có cực trị.

Sóng tới là :

$$\underline{I}(x,t) = \underline{I}_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

và $\underline{V}(x,t) = Z_c \underline{I}_0 e^{j(\omega t - kx)}$

Sóng toàn phần là :

$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I}_0 e^{j\omega t}\left(e^{-jkx} + \dfrac{Z_c - \underline{Z}}{Z_c + \underline{Z}} e^{jkx}\right) \\ \underline{V} = Z_c \underline{I}_0 e^{j\omega t}\left(e^{-jkx} - \dfrac{Z_c - \underline{Z}}{Z_c + \underline{Z}} e^{jkx}\right) \end{cases}$$

Xét ba trường hợp có trở kháng đầu cuối lí tưởng :

• nếu $\underline{Z} = \infty$:

$$I(x,t) = \mathcal{R}e(\underline{I}(x,t)) = 2I_0 \sin(\omega t + \varphi_0)\sin(kx)$$

và : $V(x,t) = \mathcal{R}e(\underline{V}(x,t)) = 2Z_c I_0 \cos(\omega t + \varphi_0)\cos(kx)$;

• nếu $\underline{Z} = 0$:

$$I(x,t) = \mathcal{R}e(\underline{I}(x,t)) = 2I_0 \cos(\omega t + \varphi_0)\cos(kx)$$

và $V(x,t) = \mathcal{R}e(\underline{V}(x,t)) = 2Z_c I_0 \sin(\omega t + \varphi_0)\sin(kx)$;

• nếu $\underline{Z}$ là thuần túy ảo, với kí hiệu $\underline{Z} = jA$ (A thực) và $e^{2j\phi} = \dfrac{Z_c - \underline{Z}}{Z_c + \underline{Z}}$; ta được :

$$I(x,t) = \mathcal{R}e(\underline{I}(x,t)) = 2I_0 \cos(\omega t + \Phi + \varphi_0)\cos(kx + \Phi)$$

và

$$V(x,t) = \mathcal{R}e(\underline{V}(x,t)) = 2Z_c I_0 \sin(\omega t + \Phi + \varphi_0)\sin(kx + \Phi) ;$$

Các sóng thu được do sự chồng chập các SPCĐS tới và phản xạ là các sóng dừng có dạng :

$$\psi(x,t) = F_0 G_0 \cos(kx + \phi_F)\cos(\omega t + \phi_G)$$

Xét trường hợp $\underline{Z} = \infty$:

$$I(x,t) = 2I_0 \sin(\omega t + \varphi_0)\sin(kx)$$

$$V(x,t) = 2Z_c I_0 \cos(\omega t + \varphi_0)\cos(kx).$$

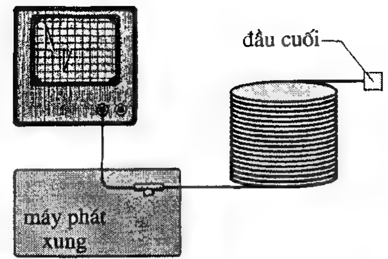
Biên độ dòng bằng không (nút dòng) đối với $x = p\dfrac{\lambda}{2}$ (p nguyên, âm hoặc bằng không) và là cực đại, bằng $2I_0$ đối với $x = p\dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\lambda}{4}$ (p nguyên, âm). Đối với các điện áp, các kết quả là đảo ngược lại.

Đối với trường $\underline{Z} = 0$, các kết quả là ngược lại so với trường hợp trên.

Khi $\underline{Z} = jA$, các kết quả chỉ bị dịch chuyển một lượng :

$$\Delta x = -\lambda \frac{\Phi}{2\pi}.$$

4.1.7. Sự thể hiện bằng thực nghiệm



H.15. *Quan sát các xung tới và phản xạ.*

Mắc một máy phát (có trở kháng trong 50Ω) vào một đầu của một cuộn dây cáp đồng trục mà nhà thiết kế đã chỉ rõ trở kháng đặc trưng $Z_c = 50\Omega$. Đầu kia được nối với một trở kháng điều chỉnh được.

Máy hiện sóng mắc ở gần máy phát cho phép quan sát được điện áp ở đầu đường dây (*h.*15).

Muốn phân biệt rõ tín hiệu phát đi và tín hiệu phản xạ, chúng ta dùng một máy phát xung.

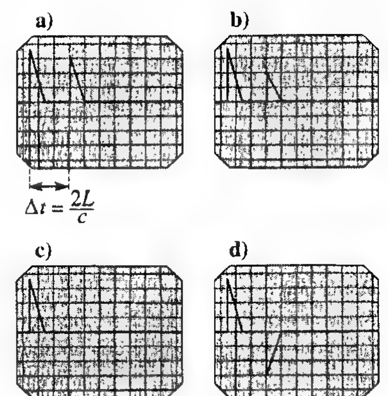
Tín hiệu sử dụng không có dạng sin, nhưng chúng ta sẽ sử dụng một trở kháng đầu cuối ứng với một điện trở $Z = R$. Như vậy có thể sử dụng trực tiếp được các kết quả ở trên.

Bắt đầu, ta không đặt cái gì ở đầu dây cáp : đầu dây khi đó được đóng trên một trở kháng vô hạn. Màn hình của máy hiện sóng đã đồng bộ hóa với các xung phát ra từ máy phát, khi đó có dáng vẻ biểu diễn trên *hình* 16a.

Tiếp theo xung phát ra từ máy phát là một xung phản xạ với một thời gian trễ $\Delta t = \frac{2L}{c}$ ($2L$ vì tín hiệu đã chuyển động khứ hồi với vận tốc c trong dây cáp có chiều dài L). Xung này có cùng dấu với xung ban đầu và biên độ hơi nhỏ hơn. Kết quả này tương thích với giá trị lí thuyết $\rho_V = 1$, biên độ giảm do hao tổn trên đường dây, đường dây này không hoàn toàn là lí tưởng.

Nếu ta giảm dần điện trở của đầu cuối, biên độ của xung phản xạ cũng giảm (*h.*16b). Nó thậm chí còn mất đi khi R bằng Z_c, tức là 50Ω (*h.*16).

Tiếp tục giảm điện trở R. Chúng ta quan sát được một xung phản xạ ngược dấu với xung phát ra. Đến giới hạn đoản mạch, xung này có một biên độ hơi nhỏ hơn xung ban đầu (*h.*16d).



H.16. *Phản xạ của tín hiệu do nhiều trở kháng đầu mối khác nhau $Z = R$.*
a. $R = \infty$. **b.** $\infty > R > Z_c$
c. $R = Z_c$ **d.** $R = 0$.

Chú ý :

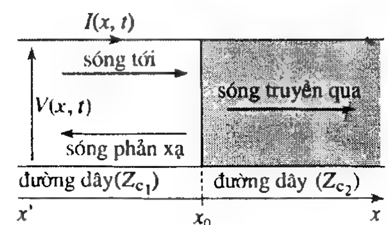
• *Một số dây cáp đồng trục (dây cáp máy thu hình, ...) có một trở kháng đặc trưng 75Ω. Trở kháng trong của máy phát không bằng trở kháng đặc trưng của dây cáp, nên tín hiệu phản hồi lại phản xạ ở ngang máy phát, rồi lại ở đầu cuối, và cứ tiếp tục như vậy. Khi đó ta quan sát được kết quả của một sự phản xạ liên hồi trên màn hình của máy hiện sóng.*

• *Các xung phản xạ thực ra lại rộng hơn các xung phát ra. Hiện tượng đó được gọi là sự tán sắc, sẽ được khảo sát ở chương 7.*

4.2. Phản xạ và truyền qua

4.2.1. Các điều kiện biên đối với một sự thay đổi môi trường

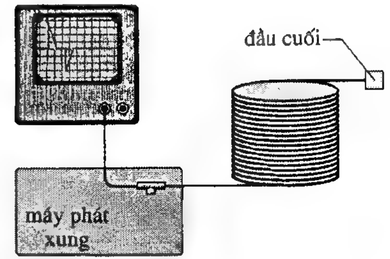
Trong trường hợp một gián đoạn về môi trường, thí dụ một chỗ nối giữa hai đường dây khác nhau, thì một tín hiệu tới "f_1" làm phát sinh không những một sóng phản xạ loại "g_1", mà còn một sóng truyền qua loại "f_2" (*h.*17). (Trong mục này, chúng ta trở lại một cách kí hiệu thực và những sóng phẳng không nhất thiết là dạng sin).



H.17. *Phản xạ và truyền qua ở một gián đoạn đơn giản.*

4.1.7. Sự thể hiện bằng thực nghiệm

Mắc một máy phát (có trở kháng trong 50Ω) vào một đầu của một cuộn dây cáp đồng trục mà nhà thiết kế đã chỉ rõ trở kháng đặc trưng $Z_c = 50\Omega$. Đầu kia được nối với một trở kháng điều chỉnh được.



H.15. *Quan sát các xung tới và phản xạ.*

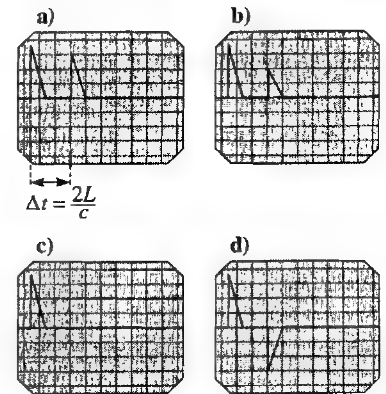
Máy hiện sóng mắc ở gần máy phát cho phép quan sát được điện áp ở đầu đường dây (*h.*15).

Muốn phân biệt rõ tín hiệu phát đi và tín hiệu phản xạ, chúng ta dùng một máy phát xung.

Tín hiệu sử dụng không có dạng sin, nhưng chúng ta sẽ sử dụng một trở kháng đầu cuối ứng với một điện trở $Z = R$. Như vậy có thể sử dụng trực tiếp được các kết quả ở trên.

Bắt đầu, ta không đặt cái gì ở đầu dây cáp : đầu dây khi đó được đóng trên một trở kháng vô hạn. Màn hình của máy hiện sóng đã đồng bộ hóa với các xung phát ra từ máy phát, khi đó có dáng vẻ biểu diễn trên *hình* 16a.

Tiếp theo xung phát ra từ máy phát là một xung phản xạ với một thời gian trễ $\Delta t = \dfrac{2L}{c}$ (2L vì tín hiệu đã chuyển động khứ hồi với vận tốc c trong dây cáp có chiều dài L). Xung này có cùng dấu với xung ban đầu và biên độ hơi nhỏ hơn. Kết quả này tương thích với giá trị lí thuyết $\rho_V = 1$, biên độ giảm do hao tổn trên đường dây, đường dây này không hoàn toàn là lí tưởng.



H.16. *Phản xạ của tín hiệu do nhiều trở kháng đầu mối khác nhau $Z = R$.*
a. $R = \infty$. **b.** $\infty > R > Z_c$
c. $R = Z_c$ **d.** $R = 0$.

Nếu ta giảm dần điện trở của đầu cuối, biên độ của xung phản xạ cũng giảm (*h.*16b). Nó thậm chí còn mất đi khi R bằng Z_c, tức là 50Ω (*h.*16).

Tiếp tục giảm điện trở R. Chúng ta quan sát được một xung phản xạ ngược dấu với xung phát ra. Đến giới hạn đoản mạch, xung này có một biên độ hơi nhỏ hơn xung ban đầu (*h.*16d).

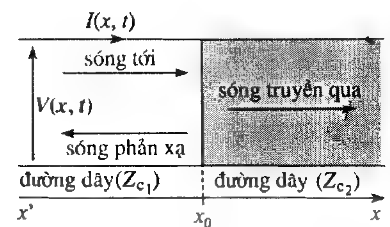
<u>*Chú ý :*</u>

- *Một số dây cáp đồng trục (dây cáp máy thu hình, ...) có một trở kháng đặc trưng 75Ω. Trở kháng trong của máy phát không bằng trở kháng đặc trưng của dây cáp, nên tín hiệu phản hồi lại phản xạ ở ngang máy phát, rồi lại ở đầu cuối, và cứ tiếp tục như vậy. Khi đó ta quan sát được kết quả của một sự phản xạ liên hồi trên màn hình của máy hiện sóng.*
- *Các xung phản xạ thực ra lại rộng hơn các xung phát ra. Hiện tượng đó được gọi là sự tán sắc, sẽ được khảo sát ở chương 7.*

4.2. Phản xạ và truyền qua

4.2.1. Các điều kiện biên đối với một sự thay đổi môi trường

Trong trường hợp một gián đoạn về môi trường, thí dụ một chỗ nối giữa hai đường dây khác nhau, thì một tín hiệu tới "f_1" làm phát sinh không những một sóng phản xạ loại "g_1", mà còn một sóng truyền qua loại "f_2" (*h.*17). (Trong mục này, chúng ta trở lại một cách kí hiệu thực và những sóng phẳng không nhất thiết là dạng sin).



H.17. *Phản xạ và truyền qua ở một gián đoạn đơn giản.*

Chú ý :

Ta có thể xét nghiệm tổng quát nhất trong môi trường 2 bằng cách đưa vào một tín hiệu loại g_2. Trong trường hợp chỉ có một gián đoạn trong môi trường truyền, thì điều này là vô lí : Một tín hiệu như vậy từ bên phải đi đến, nó phải được sinh ra bởi một nguồn sóng khác hoặc bởi sự phản xạ trên một đầu cuối hoặc một gián đoạn khác xa hơn về phía bên phải. Chúng ta sẽ thấy một thí dụ ở bài tập 2.

Chúng ta có thể viết ở chỗ nối tại $x = x_0$:

• sự liên tục của dòng điện (không có tích lũy địa phương các điện tích ở $x = x_0$, trừ phi các đường dây được nối qua một tụ điện hoặc một điện trở rò, xem bài tập 2 và 3). Đối với mọi t :

$$I_1(x_0^-, t) = I_2(x_0^+, t) \ ;$$

• sự liên tục của điện áp tại $x = x_0$ (trừ phi các đường dây được nối qua một điện cảm). Đối với mọi t :

$$V_1(x_0^-, t) = V_2(x_0^+, t)$$

Kí hiệu các trở kháng đặc trưng, thực và dương, của hai đường dây là Z_{c1} và Z_{c2}, các vận tốc lan truyền là c_1 và c_2. Hai điều kiện biên đòi hỏi tại $x = x_0$:

$$f_1\left(t - \frac{x_0}{c_1}\right) + g_1\left(t + \frac{x_0}{c_1}\right) = f_2\left(t - \frac{x_0}{c_2}\right)$$

$$Z_{c_1}\left[f_1\left(t - \frac{x_0}{c_1}\right) - g_1\left(t + \frac{x_0}{c_1}\right)\right] = Z_{c_2} f_2\left(t - \frac{x_0}{c_2}\right).$$

Chú ý :

Kích thước của chỗ nối được giả định là nhỏ so với các bước sóng có mặt, để có thể coi nó là "điểm nối".

4.2.2. Hệ số phản xạ và truyền qua

Hệ số truyền qua từ đường dây 1 sang đường dây 2, kí hiệu là τ_{12}, là tỉ số tại nơi sóng truyền qua (và phản xạ) giữa biên độ sóng truyền qua và biên độ sóng tới.

Hệ số phản xạ, kí hiệu là ρ_{12}, là tỉ số giữa biên độ sóng phản xạ và biên độ sóng tới.

Khi đưa vào các hệ số phản xạ và truyền qua đối với dòng điện, hai phương trình trên dẫn đến :

$$1 + \rho_{12} = \tau_{12}$$

$$Z_{c_1}(1 - \rho_{12}) = Z_{c_2}\tau_{12}.$$

Các hệ số phản xạ và truyền qua có dạng :

$$\rho_{12(\text{dòng})} = \frac{g_1(x_0, t)}{f_1(x_0, t)} = \frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}} = -\rho'_{12(\text{dòng})}$$

$$\tau_{12(\text{dòng})} = \frac{Z_{c2} f_2(x_0, t)}{Z_{c1} f_1(x_0, t)} = \frac{2Z_{c1}}{Z_{c1} + Z_{c2}} = \frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}\tau'_{12(\text{dòng})}.$$

Áp dụng 5

Sự phản xạ và truyền qua của năng lượng ở giao diện của hai đường dây điện

Các hệ số phản xạ và truyền qua của năng lượng trong trường hợp vừa khảo sát là bao nhiêu ?

Chứng tỏ rằng các hệ số đó nghiệm đúng :

$$R + T = 1.$$

Có thể giải thích kết quả này như thế nào ?

Các trở kháng đặc trưng Z_{c1} và Z_{c2} là thực và dương. Các hệ số ρ và τ mà ta vừa tính được là thực. Xét các tỉ số một bên là của công suất phản xạ và công suất tới, bên kia là của công suất truyền qua và công suất tới, ta được :

$$R = \left|\frac{\langle \mathscr{P}_r \rangle}{\langle \mathscr{P}_i \rangle}\right| = \left|\frac{-Z_{c1}}{Z_{c1}}\frac{\mathscr{R}e(g_1(x_0,t)g_1^*(x_0,t))}{\mathscr{R}e(f_1(x_0,t)f_1^*(x_0,t))}\right| = \left(\frac{Z_{c1}-Z_{c2}}{Z_{c1}+Z_{c2}}\right)^2$$

$$T = \left|\frac{\langle \mathscr{P}_t \rangle}{\langle \mathscr{P}_i \rangle}\right| = \left|\frac{+Z_{c2}f_2(x_0,t)f_2(x_0,t)}{+Z_{c1}f_1(x_0,t)f_1(x_0,t)}\right| = \frac{4Z_{c1}Z_{c2}}{(Z_{c1}+Z_{c2})^2}$$

Có thể kiểm tra ngay được hệ thức $R + T = 1$.

Đối với các đường dây lí tưởng này, không có hao tổn, hệ thức đó diễn tả rằng toàn bộ công suất tới (1) được thấy lại một mặt trong sóng phản xạ (R), và mặt khác trong sóng truyền qua (T).

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ PHƯƠNG TRÌNH LIÊN KẾT, PHƯƠNG TRÌNH D'ALEMBERT - SỰ TRUYỀN SÓNG VÀ NĂNG LƯỢNG

• *Các phương trình liên kết*

Hai đại lượng "dòng điện $I(x, t)$" và "điện áp $V(x, t)$" lan truyền thì thỏa mãn phương trình d'ALEMBERT, hay phương trình sóng cổ điển, $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$, với $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$ (Λ là điện cảm dài và Γ là điện dung dài).

Sự lan truyền (một chiều) của các đại lượng này là một hệ quả của sự liên kết của các đạo hàm của chúng theo không gian và theo thời gian : $\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial V}{\partial x}$ và $\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial I}{\partial x}$.

• Trở kháng đặc trưng

Đối với một sóng phẳng chạy truyền theo chiều tăng của x, điện áp V và cường độ I gắn với nhau bởi $V(x,t) = Z_C I(x,t)$, nó xác định trở kháng đặc trưng $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$ của đường dây điện (chú ý rằng Z_c là thực).

Đối với một sóng phẳng chạy truyền theo chiều giảm của x, dọc theo một đường dây có trở kháng đặc trưng Z_c, ta có $V(x,t) = -Z_c I(x,t)$.

• Sự lan truyền năng lượng

Sự lan truyền sóng có kèm theo một sự lan truyền năng lượng. Công suất do sóng truyền tải có thể được viết dưới dạng tích : $\mathscr{P}(x, t) = V(x, t)I(x, t)$.

• Trong môi trường "lí tưởng" này (không có hấp thụ hoặc khuếch đại), công suất truyền tải $\mathscr{P}(x, t)$ và mật độ dài của năng lượng $e(x, t)$ gắn với nhau bởi sự cân bằng năng lượng địa phương : $\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x}$.

Năng lượng, cũng như mọi đại lượng khác gắn liền với các sóng là nghiệm của phương trình d'ALEMBERT, truyền đi với vận tốc c.

■ PHẢN XẠ VÀ TRUYỀN QUA

• Các điều kiện biên

Khi một đường dây truyền được đóng lại trên một trở kháng đầu cuối hoặc được nối với một môi trường truyền thứ hai, sự thể hiện các điều kiện biên cho phép xác định các đặc trưng của sóng phản xạ và sóng tới phát sinh.

• Phản xạ trên một trở kháng đầu cuối

Hệ số phản xạ về biên độ, kí hiệu là ρ, là tỉ số, tại nơi sóng phản xạ, giữa biên độ phức của sóng phản xạ và biên độ phức của sóng tới.

Hệ số phản xạ năng lượng, kí hiệu là R, là tỉ số giữa năng lượng trung bình phản xạ và năng lượng trung bình tới, tính theo giá trị tuyệt đối : $R = \left|\frac{\langle \mathscr{P}_r \rangle}{\langle \mathscr{P} \rangle}\right|$.

Các đầu cuối tại đó $R = 1$ được gọi là đầu cuối lí tưởng : chúng không phân tán năng lượng.

Khi đường dây được đóng trên trở kháng đặc trưng của nó, thì không có sóng phản xạ, sự phản xạ là bằng không. Toàn bộ năng lượng của sóng tới bị hấp thụ ở đầu cuối : ở đây có *sự thích ứng trở kháng*.

• Phản xạ và truyền qua

Hệ số truyền qua từ đường dây 1 sang đường dây 2, kí hiệu là τ_{12}, là tỉ số tại nơi sóng được truyền qua (và phản xạ), giữa biên độ sóng truyền qua và biên độ sóng tới.

Hệ số phản xạ, kí hiệu là ρ_{12}, là tỉ số giữa biên độ sóng phản xạ và biên độ sóng tới.

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Trở kháng chuyển lên đầu đường dây

Một SPCĐS điện tới mà dòng điện được biểu diễn bởi $\underline{I}_i(x,t) = \underline{I}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ lan truyền trên một đường dây điện có trở kháng đặc trưng Z_c và độ dài L tính từ một máy phát đặt tại $x = 0$. Nó phản xạ tại $x = L$ trên một trở kháng đầu cuối $\underline{Z}_L$.

1) Sóng toàn phần $(\underline{I}, \underline{V})$ tồn tại trong đường dây điện có dạng thế nào ?

2) Trở kháng hiệu dụng của đường dây ở tọa độ x có biểu thức thế nào ? Nói riêng, hãy biểu diễn trở kháng chuyển lên đầu đường dây $\underline{Z}(0)$.

3) Trong điều kiện nào thì trở kháng đó không phụ thuộc chiều dài đường dây nối máy phát và tải $\underline{Z}_L$?

2 Loại bỏ một sóng phản xạ trong một đường dây

Một đường dây điện không có hao tổn, có trở kháng đặc trưng Z_c, được nuôi bởi một máy phát có điện áp dạng sin, tần số ω.

Nói chung, chạy qua nó là một dòng điện $I(x, t)$, được viết theo cách kí hiệu phức :

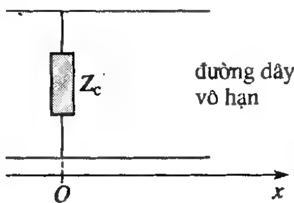
$$I(x,t) = \underline{I}_1 e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I}_2 e^{j(\omega t + kx)}$$

ở đây I_1 và I_2 là những hằng số (trong trường hợp này là phức), với $k = \dfrac{\omega}{c}$, và c chỉ vận tốc của sóng dòng đó.

Khi đó điện áp $\underline{V}(x, t)$ được viết thành :

$$\underline{V}(x,t) = Z_c \underline{I}_1 e^{j(\omega t - kx)} - Z_c \underline{I}_2 e^{j(\omega t + kx)}$$

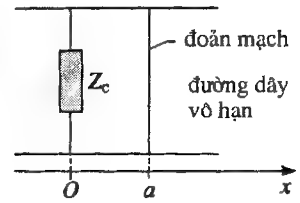
1) Đường dây kéo dài từ $x = -\infty$ đến $x = +\infty$. Một trở kháng Z_c được đặt ở $x = 0$, song song với đường dây và chúng ta quan tâm đến sóng dòng ở phần $x < 0$ của đường dây.



a) Chứng tỏ rằng sóng đó "nhìn thấy" tại $x = 0$ một trở kháng được diễn tả theo một hàm rất đơn giản của Z_c.

b) Xác định và tính môđun ρ của hệ số phản xạ của sóng (về dòng điện và điện áp) tại $x = 0$.

2) Ngoài ra, người ta đặt một đoản mạch mắc song song trên đường dây, tại hoành độ $x = a$.



a) Sóng dòng giữa các hoành độ $x = 0$ và $x = a$ có dạng nào ?

b) Chứng tỏ rằng có một giá trị cực tiểu a_0 của a sao cho dòng điện ở phần dương của đường dây bằng không tại $x = 0$.

Diễn tả a_0 là hàm của bước sóng λ của sóng dòng trong đường dây. Trong điều kiện đó, rút ra hệ số phản xạ và dạng của sóng trong phần âm của đường dây.

3 Sự kết hợp hai đường dây

Một đường dây điện không có hao tổn, có trở kháng đặc trưng Z_c (ta nhắc lại rằng Z_c là thực), được nuôi bởi một máy phát có điện áp dạng sin, tần số ω.

Nói chung, chạy qua nó là một dòng điện $I(x, t)$, được viết theo cách kí hiệu phức :

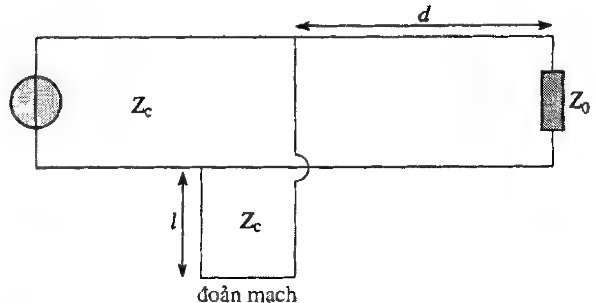
$$\underline{I}(x,t) = \underline{I}_1 e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I}_2 e^{j(\omega t + kx)}$$

ở đây $\underline{I}_1$ và $\underline{I}_2$ là hằng số với $k = \dfrac{\omega}{c}$, và c chỉ vận tốc của sóng dòng đó.

Khi đó điện áp $\underline{V}(x, t)$ được viết thanh :

$$\underline{V}(x,t) = Z_c \underline{I}_1 e^{j(\omega t - kx)} - Z_c \underline{I}_2 e^{j(\omega t + kx)}$$

Đường dây được đóng trên một trở kháng thực Z_0 khác với Z_c. Cách đầu đường dây một khoảng d có một đường dây thứ hai, không có hao tổn, có cùng trở kháng đặc trưng Z_c, được đóng trên một đoản mạch.



1) Viết những điều kiện liên tục đối với điện thế $\underline{V}$ và dòng điện $\underline{I}$ tại điểm nối của hai đường dây. Từ đó rút ra điều kiện tương ứng đối với các trở kháng.

2) Xác định các độ dài d và l để khi nhìn từ máy phát thì đường dây chính có vẻ như được đóng trên trở kháng đặc trưng của nó (phải diễn tả tgkd và tgkl là hàm của Z_0 và Z_c).

Tính những độ dài l và d nhỏ nhất thích hợp với $Z_c = 50\,\Omega$, $Z_0 = 175\,\Omega$ và một bước sóng $\lambda = 10$cm.

4 Phản xạ của một sóng trên một sợi dây căng

Một sợi dây không có độ cứng, có mật độ khối lượng dài μ và độ dài L, được cố định tại $x = L$ với một độ căng T_0. Ta đặt $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$ và bỏ qua trọng lượng của sợi dây. Độ dịch chuyển của một điểm M của sợi dây có hoành độ x được mô tả bởi hàm $y(x, t)$ $(0 < x < L)$.

Sợi dây đứng yên ở vị trí cân bằng ($y(x, 0) = 0$). Bắt đầu từ thời điểm $t = 0$, tại đầu $x = 0$, người ta áp đặt cho sợi dây chuyển động sau đây :

- đối với $t \in [0\,;\,\tau]$: $y(0,t) = a\dfrac{t}{\tau}$;
- đối với $t \in [\tau\,;\,3\tau]$: $y(0, t) = a$;
- đối với $t \in [3\tau\,;\,5\tau]$: $y(0,t) = \dfrac{a}{2\tau}(5\tau - t)$;
- đối với $t > 5\tau$: $y(0,t) = 0$;

với $\tau = 0{,}1\dfrac{L}{c}$, $L = 10$cm và $a = 2$mm.

1) Biểu diễn sợi dây ở thời điểm $t = 6\tau = 0{,}6\dfrac{L}{c}$. Ở thời điểm đó, vận tốc của sợi dây ở những điểm có hoành độ $0{,}2L$; $0{,}4L$; $0{,}55L$ là bao nhiêu ?

2) Vẽ sợi dây ở những thời điểm $t = 13\tau$ và $t = 18\tau$.

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

5 ★Phản xạ và truyền qua : hai sợi dây dao động nối với nhau

Hai sợi dây dao động mang chỉ số 1 và 2 được nối liền đầu nhau tại một điểm có hoành độ x_0. Một sự liên kết như vậy có kèm theo hai điều kiện biên tại $x = x_0$, gắn liền các độ dịch chuyển và các độ căng ngang của hai sợi dây.

Bằng cách lặp lại những lập luận sử dụng trong giáo trình đối với trường hợp hai đường dây điện đặt nối liền đầu nhau, hãy xác lập những điều kiện biên và biểu thức của các hệ số phản xạ và truyền qua về biên độ trong trường hợp đang xét (với giả định rằng một sóng tới và một sóng phản xạ di chuyển trên sợi dây bên trái và chỉ có một sóng truyền qua di chuyển trên sợi dây bên phải).

6 ★★Khía cạnh năng lượng của sự lan truyền trong một sợi dây dao động

Một sợi dây không có độ cứng, có mật độ khối lượng dài μ và chiều dài L được kéo căng bởi một độ căng T_0, giữa hai điểm $x = 0$ và $x = L$. Bỏ qua trọng lượng sợi dây.

Các chuyển động ngang nhỏ của sợi dây được mô tả bởi hàm $y(x, t)$ ghi lại sự dịch chuyển của một điểm M của sợi dây có hoành độ x ở thời điểm t.

1) Biểu thị mật độ năng lượng dài e_K của sợi dây.

2) Chứng tỏ rằng công phải cung cấp cho một nguyên tố sợi dây (có độ dài dx lúc nghỉ) để đưa nó từ trạng thái nghỉ ($y = 0$) sang trạng thái mà $y = y(x, t)$ (nguyên tố sợi dây khi đó có độ dài $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$) được viết thành :

$$\delta W = -\frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\,.$$

Rút ra mật độ thế năng dài e_P của sợi dây.

3) Chứng tỏ rằng có một hàm $P(x, t)$ sao cho :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{với} \quad e = e_K + e_P$$

Giải thích kết quả đó.

4) Chuyển động dừng của một sợi dây trong kiểu dao động n được biểu diễn bởi :

$$y_n(x,t) = A_n \sin k_n x \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

với $k_n = \dfrac{\omega_n}{c} = \dfrac{n\pi}{L}$ và $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$.

Tính năng lượng toàn phần của sợi dây trong kiểu dao động n.

5) Nghiệm tổng quát của phương trình lan truyền là một tổ hợp tuyến tính của các kiểu dao động khác nhau.

Tính năng lượng toàn phần $\mathscr{E}$ của sợi dây theo các giá trị $\mathscr{E}_n$. Hãy kết luận.

Chú ý :

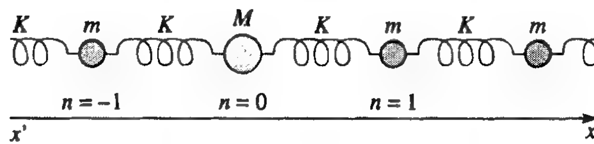
$$\int_O^L \sin k_n x \sin k_m x \mathrm{d}x = \frac{L}{2} n = m$$

Số hạng này bằng 0 nếu $n \neq m$.

7 ★Sóng phản xạ trong một chuỗi nguyên tử

Một vật rắn kết tinh được mô hình hóa bởi một chuỗi vô hạn các khối lượng điểm m (mang các chỉ số nguyên n), liên kết bằng những lò xo như nhau có độ cứng K và độ dài a ở trạng thái cân bằng.

Tại $n = 0$ tinh thể chứa một "tạp chất" được coi như một khối lượng điểm M.



1) Khảo sát hệ các phương trình vi phân mà các độ dịch chuyển u_n của các hạt khác nhau thỏa mãn.

2) Trong miền các giá trị âm của x có một sóng tới lan truyền, nó được xác định trong cách kí hiệu phức.

$u_{in} = Ae^{j(\omega t - kna)}$ với A là một hằng số thực.

Hệ thức nào nhất thiết gắn tần số ω với số sóng k ?

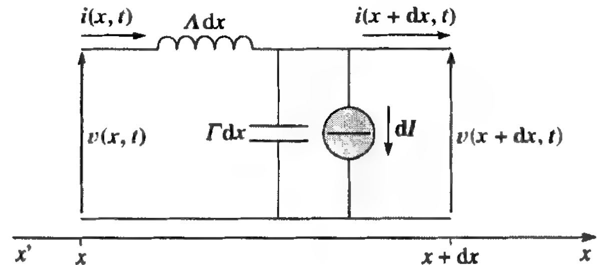
Chứng tỏ rằng có một sóng phản xạ và một sóng truyền qua bởi tạp chất.

Xác định các biên độ phức $\underline{B}$ và $\underline{D}$ của mỗi một sóng đó, tùy theo A.

3) Khảo sát các trường hợp giới hạn : $M = m$, $M = 0$ và M rất lớn $(M \to \infty)$.

8 ★Sóng đơn trong một đường dây điện

Một chỗ nối JOSEPHSON là một tập hợp hai tấm siêu dẫn cách nhau bởi một vật cách điện trong đó các êlectrôn có thể xuyên qua vật cách điện nhờ hiệu ứng đường hầm. Một chỗ nối như vậy, trải dài theo phương $(x'x)$ có thể được mô tả như một đường dây điện có một điện dung phân bố, một điện cảm phân bố và các nguồn dòng điện phân bố. Như vậy một nguyên tố chiều dài dx bao hàm giữa các hoành độ x và $(x + \mathrm{d}x)$ của chỗ nối đó có thể được biểu diễn bằng sơ đồ dưới đây, trong đó Γ biểu diễn một mật độ điện dung dài và Λ biểu diễn một mật độ điện cảm dài. Máy phát dòng điện sơ cấp cung cấp một dòng $\mathrm{d}I = I_0 \sin\theta \mathrm{d}x$, trong đó θ là một hàm của x và t, gắn với hiệu điện thế $v(x, t)$ ở các cực của máy phát bởi hệ thức $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha v(x,t)$, I_0 chỉ một hằng số cho trước và $\alpha = \frac{4\pi e}{h}$ với e là môđun của điện tích êlectrôn và h là hằng số PLANCK.



1) Thành lập các phương trình vi phân nghiệm đúng bởi v, i và θ. Từ đó rút ra rằng $\theta(x, t)$ là nghiệm của phương trình vi phân :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{1}{\delta^2}\sin\theta$$

Xác định các hằng số c và δ theo các tham số của chỗ nối :

2) Người ta đặt $x^* = \frac{x}{\delta}$ và $t^* = \frac{ct}{\delta}$; ta tìm một nghiệm của phương trình vi phân trên, nghiệm đúng :

$\mathrm{tg}\frac{\theta}{4} = X(x^*)T(t^*)$ với θ trong khoảng từ 0 đến 2π,

trong đó $X(x^*)$ chỉ một hàm của biến duy nhất x^* và $T(t^*)$ chỉ một hàm của biến duy nhất t^*.

Sau vài phép tính, ta được :

$$\sin\theta = \frac{4XT(1 - X^2T^2)}{(1 + X^2T^2)^2}$$

$$\text{và } \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} = \frac{4TX''}{1 + X^2T^2} - \frac{8T^3X(X')^2}{(1 + X^2T^2)^2},$$

trong đó $X' = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x^*}$ và $X'' = \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^{*2}}$ chỉ những đạo hàm bậc một và bậc hai đối với x^*.

a) Khi đó $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}}$ bằng bao nhiêu ? Hãy thành lập phương trình chứa X, X', X'', T, T' và T'' bảo đảm rằng θ là thích hợp.

Chú ý :

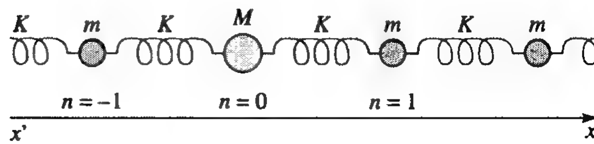
$$\int_O^L \sin k_n x \sin k_m x\mathrm{d}x = \frac{L}{2} n = m$$

Số hạng này bằng 0 nếu $n \neq m$.

7 ★Sóng phản xạ trong một chuỗi nguyên tử

Một vật rắn kết tinh được mô hình hóa bởi một chuỗi vô hạn các khối lượng điểm m (mang các chỉ số nguyên n), liên kết bằng những lò xo như nhau có độ cứng K và độ dài a ở trạng thái cân bằng.

Tại $n = 0$ tinh thể chứa một "tạp chất" được coi như một khối lượng điểm M.



1) Khảo sát hệ các phương trình vi phân mà các độ dịch chuyển u_n của các hạt khác nhau thỏa mãn.

2) Trong miền các giá trị âm của x có một sóng tới lan truyền, nó được xác định trong cách kí hiệu phức.

$u_{in} = Ae^{j(\omega t - kna)}$ với A là một hằng số thực.

Hệ thức nào nhất thiết gắn tần số ω với số sóng k ?

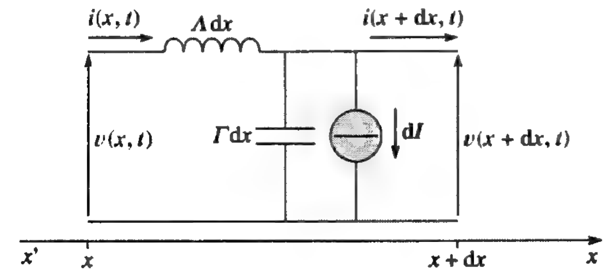
Chứng tỏ rằng có một sóng phản xạ và một sóng truyền qua bởi tạp chất.

Xác định các biên độ phức $\underline{B}$ và $\underline{D}$ của mỗi một sóng đó, tùy theo A.

3) Khảo sát các trường hợp giới hạn : $M = m$, $M = 0$ và M rất lớn $(M \to \infty)$.

8 ★Sóng đơn trong một đường dây điện

Một chỗ nối JOSEPHSON là một tập hợp hai tấm siêu dẫn cách nhau bởi một vật cách điện trong đó các êlectrôn có thể xuyên qua vật cách điện nhờ hiệu ứng đường hầm. Một chỗ nối như vậy, trải dài theo phương $(x'x)$ có thể được mô tả như một đường dây điện có một điện dung phân bố, một điện cảm phân bố và các nguồn dòng điện phân bố. Như vậy một nguyên tố chiều dài dx bao hàm giữa các hoành độ x và $(x + \mathrm{d}x)$ của chỗ nối đó có thể được biểu diễn bằng sơ đồ dưới đây, trong đó Γ biểu diễn một mật độ điện dung dài và Λ biểu diễn một mật độ điện cảm dài. Máy phát dòng điện sơ cấp cung cấp một dòng $\mathrm{d}I = I_0 \sin\theta \mathrm{d}x$, trong đó θ là một hàm của x và t, gắn với hiệu điện thế $v(x, t)$ ở các cực của máy phát bởi hệ thức $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha v(x,t)$, I_0 chỉ một hằng số cho trước và $\alpha = \frac{4\pi e}{h}$ với e là môđun của điện tích êlectrôn và h là hằng số PLANCK.



1) Thành lập các phương trình vi phân nghiệm đúng bởi v, i và θ. Từ đó rút ra rằng $\theta(x, t)$ là nghiệm của phương trình vi phân :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{1}{\delta^2}\sin\theta$$

Xác định các hằng số c và δ theo các tham số của chỗ nối :

2) Người ta đặt $x^* = \frac{x}{\delta}$ và $t^* = \frac{ct}{\delta}$; ta tìm một nghiệm của phương trình vi phân trên, nghiệm đúng :

$\mathrm{tg}\frac{\theta}{4} = X(x^*)T(t^*)$ với θ trong khoảng từ 0 đến 2π,

trong đó $X(x^*)$ chỉ một hàm của biến duy nhất x^* và $T(t^*)$ chỉ một hàm của biến duy nhất t^*.

Sau vài phép tính, ta được :

$$\sin\theta = \frac{4XT(1 - X^2T^2)}{(1 + X^2T^2)^2}$$

$$\text{và } \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} = \frac{4TX''}{1 + X^2T^2} - \frac{8T^3X(X')^2}{(1 + X^2T^2)^2},$$

trong đó $X' = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x^*}$ và $X'' = \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^{*2}}$ chỉ những đạo hàm bậc một và bậc hai đối với x^*.

a) Khi đó $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}}$ bằng bao nhiêu ? Hãy thành lập phương trình chứa X, X', X'', T, T' và T'' bảo đảm rằng θ là thích hợp.

b) Kiểm tra rằng nếu $(X')^2 = mX^2$ và $(T')^2 = (m-1)T^2$ thì nghiệm là thích hợp.

3) a) Giải những phương trình này đối với $m > 1$. Chứng tỏ rằng ta thu được cho θ hai họ nghiệm bằng không ở khắp nơi tại thời điểm $t = -\infty$ (trừ ở $x = -\infty$), truyền theo chiều của trục (Ox) hoặc chiều ngược lại với một vận tốc u mà ta sẽ biểu đạt theo c và m. Các sóng đó được gọi là sóng đơn hay soliton. Khi truyền đi, các sóng đó có biến dạng không ?

b) Đối với soliton truyền theo chiều trục (Ox), hãy vẽ dáng vẻ của đồ thị cho biết θ theo x tại các thời điểm khác nhau. Ảnh hưởng của m, tức là của u nữa trên đồ thị này là thế nào ?

BÀI CHỮA

1 1) *Sóng tới nghiệm đúng phương trình d'ALEMBERT, do đó* $k = \frac{\omega}{c}$. *Nó ứng với :*

$$\underline{I}_i(x,t) = \underline{I}_0 e^{j(\omega t - kx)} \text{ và } \underline{V}_i(x,t) = Z_c \underline{I}_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

Khi phản xạ tại x = L, nó làm phát sinh một sóng đơn sắc có cùng tần số với SPCĐS tới, và có thể viết thành :

$$\underline{I}_r(x,t) = \underline{I}_{0r} e^{j(\omega t + kx)} \text{ và } \underline{V}_r(x,t) = -Z_c \underline{I}_{0r} e^{j(\omega t + kx)}.$$

Điều kiện biên x = L bắt buộc $\left|\underline{V}_i + \underline{V}_r\right|_{(L,t)} = Z_L \left|\underline{I}_i + \underline{I}_r\right|_{(L,t)}$, *do đó* $I_{0r} = I_0 \frac{Z_c - \underline{Z}_L}{Z_c + \underline{Z}_L} e^{-2jkL}$

Vậy sóng toàn phần là :

$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I}_0 e^{j(\omega t - kL)} \left(e^{jk(L-x)} + \dfrac{Z_c - \underline{Z}_L}{Z_c + \underline{Z}_L} e^{jk(x-L)} \right) \\ \underline{V} = Z_c \underline{I}_0 e^{j(\omega t - kL)} \left(e^{jk(L-x)} - \dfrac{Z_c - \underline{Z}_L}{Z_c + \underline{Z}_L} e^{jk(x-L)} \right) \end{cases}$$

2) *Ta rút ra :* $\underline{Z}(x) = Z_c \frac{\underline{Z}_L \cos k(L-x) + jZ_c \sin k(L-x)}{Z_c \cos k(L-x) + j\underline{Z}_L \sin k(L-x)}$, *rồi :*

$$\underline{Z}(0) = Z_c \frac{\underline{Z}_L \cos kL + jZ_c \sin kL}{Z_c \cos kL + j\underline{Z}_L \sin kL}.$$

3) *Trở kháng này đưa lên đầu đường dây thì không phụ thuộc L khi* $\underline{Z}_L = Z_c$. *Một đường dây được đóng trên trở kháng đặc trưng* Z_c *của nó thì tương đương với một đường dây vô hạn có trở kháng đặc trưng* Z_c.

2 a) *Vì đường dây là vô hạn, ở bên kia x = 0 (x > 0) chỉ có thể có một sóng chạy kiểu :*

$$\underline{I}^+(x,t) = \underline{I}_0^+ e^{j(\omega t - kx)} \text{ và } \underline{V}^+(x,t) = Z_c \underline{I}_0^+ e^{j(\omega t - kx)}$$

Đối với x > 0 thì $\frac{\underline{V}^+}{\underline{I}^+} = Z_c$ *không phụ thuộc x. Phần đường dây từ x = 0 đến x = +∞ tương đương với một trở kháng* Z_c *đặt tại x = 0. Do đó sóng có mặt ở phần x < 0 của đường dây "trông thấy" tại x = 0 hai trở kháng* Z_c *mắc song song, tức là một trở kháng* $Z_0 = Z_c \,//\, Z_c = \frac{Z_c}{2}$.

b) *Trong phần x < 0 của đường dây có sóng*

$$\underline{I}(x,t) = \underline{I}_1 e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I}_2 e^{j(\omega t + kx)}.$$

Số hạng thứ nhất là sóng tới, số hạng thứ hai là sóng phản xạ, do đó :

$$\rho = \left| \frac{\underline{I}_{\text{phản xạ}}(x=0,t)}{\underline{I}_{\text{tới}}(x=0,t)} \right| = \left| \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right|$$

Chú ý rằng ρ cũng bằng $\rho = \left| \frac{\underline{V}_{\text{phản xạ}}(x=0,t)}{\underline{V}_{\text{tới}}(x=0,t)} \right|$.

Biết rằng : $Z_0 = \frac{Z_c}{2} = \frac{\underline{V}(0,t)}{\underline{I}(0,t)} = Z_c \frac{\underline{I}_1 - \underline{I}_2}{\underline{I}_1 + \underline{I}_2}$, *ta có* $\rho = \frac{1}{3}$.

2) a) *Giữa x = 0 và x = a, nhất thiết có hai sóng truyền ngược chiều nhau (sóng tới và sóng phản xạ) :*

$$\underline{I}'(x,t) = \underline{I}_1^+ e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I}_2^+ e^{j(\omega t + kx)}$$

$$\underline{V}'(x,t) = Z_c \left(\underline{I}_1^+ e^{j(\omega t - kx)} - \underline{I}_2^+ e^{j(\omega t + kx)} \right).$$

Ở x = a thì V'(a, t) = 0 (đoản mạch) dẫn đến $\underline{I}_2^+ = I_1^+ e^{-2jka}$, *do đó :*

$$\underline{I}'(x,t) = 2\underline{I}_1^+ e^{j(\omega t - ka)} \cos k(a-x)$$

$$\underline{V}'(x,t) = 2jZ_c \underline{I}_1^+ e^{j(\omega t - ka)} \sin k(a-x)$$

b) *Điều kiện* $\underline{I}'(x=0,t) = 0$ *bắt buộc phải có :*

$$ka = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \text{ nguyên})$$

Giá trị nhỏ nhất của a là $a_0 = \frac{\lambda}{4}$.

Vậy sóng tồn tại ở phần âm của đường dây "nhìn thấy" tại x = 0 :

- *trở kháng* Z_c *đặt tại x = 0*
- *trở kháng của phần dương của đường dây, nó là vô hạn vì* $\frac{\underline{V}'(x=0,t)}{\underline{I}'(x=0,t)}$ *là vô hạn.*

Vì hai trở kháng này mắc song song, phần âm của đường dây bị đóng trên trở kháng đặc trưng Z_c *và hệ số phản xạ ρ bằng không. Không có sóng phản xạ và phần này của đường dây có sóng :*

$$\underline{I}(x,t) = \underline{I}_1 e^{j(\omega t - kx)}$$

$$\underline{V}(x,t) = Z_c \underline{I}_1 e^{j(\omega t - kx)} \text{ đối với } x < 0$$

3 1) *Ở chỗ nối, tại* $x = y = 0$, *thì :*

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

$$\underline{V} = \underline{V}_1 = \underline{V}_2$$

và hai trở kháng $\underline{Z}_1(0)$ *của đầu đường dây chính (giữa điểm nối tại* $x = 0$ *và trở kháng* Z_0 *tại* $x = d$*) và* $Z_2(0)$ *của đường dây bên (giữa điểm nối* $y = 0$ *và đoản mạch tại* $y = l$*) được mắc song song. Phần* $x < 0$ *của đường dây chính "nhìn thấy" tại* $x = 0$ *trở kháng :*

$$\underline{Z}(0) = \frac{\underline{Z}_1(0)\underline{Z}_2(0)}{\underline{Z}_1(0) + \underline{Z}_2(0)}$$

Trong đường dây chính, giữa điểm nối và Z_0, *ta có :*

$$\underline{I}(x,t) = \underline{I}_1 e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I}_2 e^{j(\omega t + kx)}$$

$$\underline{V}(x,t) = Z_c(\underline{I}_1 e^{j(\omega t - kx)} - \underline{I}_2 e^{j(\omega t + kx)})\ ;$$

Vậy trở kháng tại x là : $\underline{Z}_1(x) = \dfrac{\underline{V}(x,t)}{\underline{I}(x,t)} = Z_c \dfrac{\underline{I}_1 e^{-jkx} - \underline{I}_2 e^{jkx}}{\underline{I}_1 e^{-jkx} + \underline{I}_2 e^{jkx}}$

Thế nhưng đối với $x = d$ *thì* $\underline{Z}_1(d) = Z_0$ *; ta rút ra (nói riêng, bằng cách tính tỉ số* $\dfrac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}$ *theo* Z_0 *và* Z_c *) :*

$$Z_1(0) = Z_c \frac{Z_0 + jZ_c \text{tg}kd}{Z_c + jZ_0 \text{tg}kd}.$$

Đối với đường dây bên, chỉ cần thay d bằng l và Z_0 *bằng 0 (đoản mạch) trong kết quả trên :*

$$Z_2(0) = jZ_c \text{tg}kl$$

Ta rút ra :

$$\underline{Z}(0) = Z_c \frac{-Z_c \text{tg}kd\,\text{tg}kl + jZ_0 \text{tg}kl}{Z_0(1 - \text{tg}kd\,\text{tg}kl) + jZ_c(\text{tg}kd + \text{tg}kl)}.$$

2) *Nếu ở ngang tầm máy phát trở kháng của đường dây bằng trở kháng đặc trưng của nó, thì trở kháng đường dây nhất thiết phải bằng* Z_c *tại mọi điểm giữa máy phát và chỗ nối (khi đó cường độ* $\underline{I}$ *có dạng* $\underline{I} = \underline{I}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ *).*

Vậy $\underline{Z}(0) = Z_c$, *do đó, bằng cách các phần thực bằng nhau và các phần ảo bằng nhau, ta được :*

$$-Z_c \text{tg}(kd)\text{tg}(kl) = Z_0(1 - \text{tg}(kd)\text{tg}(kl))$$

$$Z_c(\text{tg}(kd) + \text{tg}(kl)) = Z_0 \text{tg}(kl).$$

Ta rút ra :

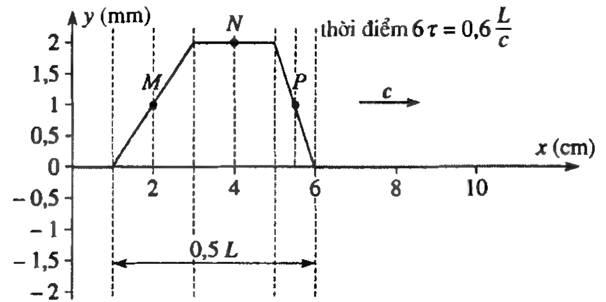
$$\text{tg}^2(kd) = \frac{Z_0}{Z_c} \text{ và } \text{tg}^2(kl) = \frac{Z_0 Z_c}{(Z_0 - Z_c)^2}.$$

Áp dụng bằng số :

- $\text{tg}kd = 1{,}87$; $kd = \dfrac{2\pi}{\lambda} d = 1{,}08$; $d = 1{,}72$ cm.
- $\text{tg}kl = 0{,}75$; $kl = \dfrac{2\pi}{\lambda} l = 0{,}64$; $l = 1{,}02$ cm.

4 1) *Sóng tới* $y(x,t) = f(x,t) = f\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$ *lan truyền trên sợi dây. Ở thời điểm* $t = 6\tau$, *nó chưa tới đầu* $x = L$ *của sợi dây ; nó sẽ tới đó vào thời điểm* $t = 10\tau = \dfrac{L}{c}$.

Biết rằng $f(x,6\tau) = f\left(0{,}6\tau - \dfrac{x}{c}\right)$, *sợi dây có dáng vẻ như sau :*



Các vận tốc $v = \dfrac{\partial y}{\partial t}$ *của các điểm* $M(x = 0{,}2L)$, $N(x = 0{,}4L)$ *và* $P(x = 0{,}55L)$ *được cho trong bảng dưới đây ở thời điểm* $t = 6\tau$.

điểm	y(x,t)	vị trí	vận tốc
$M(x = 0{,}2L)$	$f(x,t) = \dfrac{a}{2\tau}\left(5\tau - t + \dfrac{x}{c}\right)$	$y = \dfrac{a}{2}$	$-\dfrac{a}{2\tau}$
$N(x = 0{,}4L)$	a	$y = a$	0
$P(x = 0{,}55L)$	$f(x,t) = \dfrac{a}{\tau}\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$	$y = \dfrac{a}{2}$	$+\dfrac{a}{\tau}$

2) *Sóng tới truyền đến đầu* $x = L$ *của sợi dây vào thời điểm* $t_0 = \dfrac{L}{c} = 10\tau$, *và bắt đầu từ lúc đó thì một sóng phản xạ* $g(x,t) = g\left(t + \dfrac{x}{c}\right)$ *chồng chập với sóng tới* $f(x,t) = f\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$:

$$y(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Vì đầu $x = L$ *của sợi dây là cố định, ta phải có ở mọi lúc :*

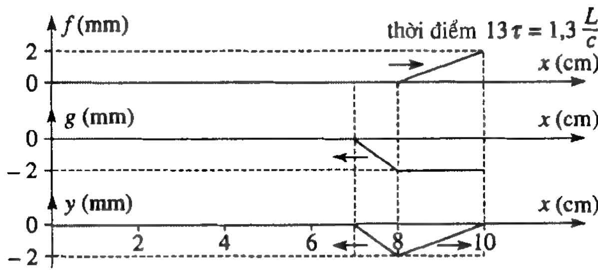
$$y(L,t) = f\left(t - \frac{L}{c}\right) + g\left(t + \frac{L}{c}\right) = 0$$

do đó $g(t) = -f\left(t - 2\dfrac{L}{c}\right)$ *và* $y(x,t) = f\left(t - \dfrac{x}{c}\right) - f\left(t + \dfrac{x - 2L}{c}\right)$.

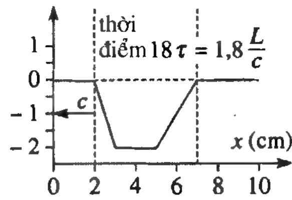
Bảng dưới đây cho giá trị của các hàm f, g và y vào thời điểm $t = 13\tau$.

miền	hàm $f(x, 13\tau)$	hàm $g(x, 13\tau)$	hàm $y(x, 13\tau)$
$x < 0{,}7L$	0	0	0
$0{,}7L < x < 0{,}8L$	0	$a\dfrac{7L-10x}{L}$	$a\dfrac{7L-10x}{L}$
$0{,}8L < x < L$	$a\dfrac{(10x-8L)}{2L}$	$-a$	$5a\dfrac{(x-L)}{L}$

Dáng vẻ của đường cong được trình bày dưới đây.



Tại thời điểm $t = 18\tau$, tất cả sóng đã phản xạ, $f(x, 18\tau) = 0$ và chỉ còn lại sóng phản xạ.



$$y(x, 18\tau) = g(x, 18\tau)$$

$$= -f\left(18\tau + \frac{x-2L}{c}\right)$$

$y(x,18\tau) = -f\left(-2\tau + \dfrac{x}{c}\right)$, *do đó sợi dây có dáng vẻ như trên.*

5 • Điều kiện biên

Theo định nghĩa sự liên kết giữa các sợi dây, những dịch chuyển của các sợi dây này sẽ là như nhau, tức là đối với mọi t thì :

$$y_1(x_0^-, t) = y_2(x_0^+, t).$$

Lấy tích phân theo thời gian, ta có thể viết cũng hệ thức đó cho các vận tốc dịch chuyển ngang tại $x = x_0$ đối với mọi t :

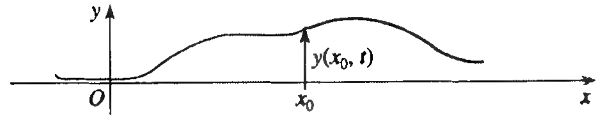
$$v_1(x_0^-, t) = v_2(x_0^+, t) \quad (1).$$

Chiếu xuống (Ox), hệ thức cơ bản của động lực học áp dụng cho nguyên tố độ dài δx và nguyên tố khối lượng δm nằm giữa các hoành độ $x_0 - \dfrac{\delta x}{2}$ và $x_0 + \dfrac{\delta x}{2}$ cho ta :

$$\delta m\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{(x=x_0,t)} = F_y\left(x_0 + \frac{\delta x}{2}, t\right) - F_y\left(x_0 - \frac{\delta x}{2}, t\right)$$

Khi δx dần tới số không thì khối lượng δm cũng thế, và ta rút ra tính liên tục của thành phần ngang của lực căng tại điểm nối, đối với mọi t :

$$F_{y1}(x_0^-, t) = F_{y2}(x_0^+, t) \quad (2)$$



Chú ý :

Sự bằng nhau của các thành phần dọc của các lực căng cũng nhất thiết được nghiệm đúng để đảm bảo sự tồn tại của vị trí nghỉ.

• Hệ số phản xạ và hệ số truyền đối với các biên độ

Các phương trình liên kết cho phép ta viết các vận tốc và các thành phần ngang của lực căng, là các nghiệm của phương trình d'ALEMBERT, dưới dạng :

$$\begin{cases} v(x,t) = f\left(t - \dfrac{x}{c}\right) + g\left(t + \dfrac{x}{c}\right) \\ -F_y(x,t) = Z_c\left[f\left(t - \dfrac{x}{c}\right) - g\left(t + \dfrac{x}{c}\right)\right] \end{cases}$$

trong đó Z_c là trở kháng (cơ học) đặc trưng của sợi dây ta xét. Ta kí hiệu Z_1 và Z_2 là các trở kháng đặc trưng, thực và dương, của hai đường dây, c_1 và c_2 là các vận tốc truyền. Hai điều kiện giới hạn (1) và (2) được viết lại :

$$f_1\left(t - \frac{x_0}{c_1}\right) + g_1\left(t + \frac{x_0}{c_1}\right) = f_2\left(t - \frac{x_0}{c_2}\right)$$

$$Z_1\left[f_1\left(t - \frac{x_0}{c_1}\right) - g_1\left(t + \frac{x_0}{c_1}\right)\right] = Z_2 f_2\left(t - \frac{x_0}{c_2}\right)$$

Đưa vào các hệ số phản xạ và truyền qua về biên độ liên quan tới vận tốc, ta có :

$$1 + \rho_{12} = \tau_{12} \text{ và } Z_1(1 - \rho_{12}) = Z_2\tau_{12},$$

tức là : $\rho_{12(\text{vận tốc})} = \dfrac{g_1(x_0,t)}{f_1(x_0,t)} = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = -\rho'_{12(\text{độ căng})}$

$$\tau_{12(\text{vận tốc})} = \frac{Z_2 f_2(x_0,t)}{Z_1 f_1(x_0,t)} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_1}{Z_2}\tau'_{12(\text{độ căng})}$$

Vì các trở kháng đặc trưng Z_1 và Z_1 là thực và dương, nên các hệ số ρ và τ là thực.

6 1) $e_K = \dfrac{1}{2}\mu\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)^2$

2) *Muốn kéo dài nguyên tố sợi dây từ dx thành :*

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \approx dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right),$$

ta phải cung cấp một công : $\delta W \approx T_0(\mathrm{d}s - \mathrm{d}x) = \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x$ *, biểu thị thế năng của nguyên tố độ dài dx của sợi dây (nhắc lại rằng độ căng* T_0 *của sợi dây có thể được coi là hằng số), do đó :*

$$e_P = \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

3) *Lấy đạo hàm* $e = e_K + e_P$ *đối với t, ta được :*

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \mu\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + T_0\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}F_y\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}(-vF_y)$$

Các phương trình xác định chuyển động của sợi dây (xem chương **2**) *là :*

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \text{ và } F_y = T_0\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Vậy ta có $\mathscr{P} = -vF_y$ *với* $v = \frac{\partial y}{\partial t}$.

Đẳng thức $\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x}$ *là phương trình cân bằng năng lượng tương tự như phương trình đã thu được ở §***3.2.3**.

$\mathscr{P} = -vF_y$ *biểu thị công suất truyền từ phần bên trái (hoành độ nhỏ hơn x) sang phần bên phải của sợi dây (hoành độ lớn hơn x).*

4) *Phép tính :*

$$\mathscr{E}_n = \int_O^L (e_K + e_P)dx = \frac{1}{2}\mu\int_O^L\left(\frac{\partial y_n}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{T_0}{2}\int_O^L\left(\frac{\partial y_n}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x,$$

dẫn đến $\mathscr{E}_n = \frac{n^2\pi^2}{4L}T_0A_n^2$.

Năng lượng này không đổi, không phụ thuộc thời gian (hệ ta khảo sát đã được lí tưởng hóa).

5) *Khi tính đến mọi kiểu, ta có :*

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \sin(\omega t + \varphi_n).$$

$$e_K = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\sum_{n=1}^{\infty}(\omega_n A_n \sin k_n \cos(\omega_n t + \varphi_n))^2$$

$$e_P = \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{T_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(k_n A_n \cos k_n x \sin(\omega_n t + \varphi_n))^2.$$

Sau vài phép tính, và chú ý đến nhận xét của đầu bài, ta rút ra :

$$\mathscr{E} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{4L}T_0A_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}_n.$$

Năng lượng toàn phần của sợi dây bằng tổng các năng lượng của mỗi kiểu dao động.

7 **1)** *Hệ thức cơ bản của động lực học viết được :*

- *đối với các hạt có khối lượng m (n ≠ 0) :*

$$m\ddot{\underline{u}}_n = -K(\underline{u}_n - \underline{u}_{n-1}) - K(\underline{u}_n - \underline{u}_{n+1}) \quad (1);$$

- *đối với hạt có khối lượng M (n = 0) :*

$$M\ddot{\underline{u}}_0 = -K(\underline{u}_0 - \underline{u}_{-1}) - K(\underline{u}_0 - \underline{u}_{+1}) \quad (2).$$

Các hệ thức (1) và (2) đương nhiên là có giá trị trong cách kí hiệu phức.

2) $\underline{u}_{in}$ *là nghiệm của phương trình (1) đối với n < 0 nếu ω và k gắn với nhau bởi hệ thức tán sắc* $\omega^2 = \frac{4K}{m}\sin^2\frac{ka}{2}$.

Do đó $\underline{u}_{in}$ *không thể là nghiệm của phương trình (2). Ta giả định rằng tạp chất làm phát sinh (như thực nghiệm chỉ rõ) :*

- *một sóng phản xạ* $\underline{u}_{rn} = \underline{B}e^{j(\omega t + kna)}$ *đối với n < 0 ;*
- *một sóng truyền qua* $u_{tn} = \underline{D}e^{j(\omega t - kna)}$ *đối với n > 0.*

Ta sẽ lấy những sóng này cùng tần số ω với tần số tới để chúng có thể nghiệm đúng vào mọi lúc những điều kiện biên, thể hiện bởi những hệ thức tuyến tính. Do đó, các sóng này cũng có những vectơ sóng có cùng môđun k, vì k và ω phải thỏa mãn cùng một hệ thức tán sắc (đối với n ≠ 0, thì $\underline{u}_{rn}$ *và* $\underline{u}_{tn}$ *nghiệm đúng phương trình (1)).*

Các dịch chuyển của các hạt được viết :

- *đối với n < 0 :* $\underline{u}_n = \underline{u}_{in} + \underline{u}_{rn} = Ae^{j(\omega t - kna)} + \underline{B}e^{j(\omega t + kna)}$;
- *đối với n > 0 :* $\underline{u}_n = u_{tn} = \underline{D}e^{j(\omega t - kna)}$;
- *đối với n = 0 :* $\underline{u}_0 = \underline{u}_{i0} + \underline{u}_{r0}$, $A + \underline{B} = \underline{D}$.

Ngoài ra, độ dịch chuyển u_0*, phải thỏa mãn phương trình (2) ; điều đó đòi hỏi :*

$$\omega^2 M\underline{D} = K(2\underline{D} - (Ae^{jka} + \underline{B}e^{-jka}) - \underline{D}e^{-jka})$$

Chú ý đến hệ thức tán sắc, ta rút ra :

$$\underline{B} = -\frac{\left(\frac{M}{m} - 1\right)\sin\left(\frac{ka}{2}\right)}{\left(\frac{M}{m} - 1\right)\sin\left(\frac{ka}{2}\right) - j\cos\left(\frac{ka}{2}\right)}A$$

$$\underline{D} = A + \underline{B} = -\frac{j\cos\frac{ka}{2}}{\left(\frac{M}{m} - 1\right)\sin\frac{ka}{2} - j\cos\frac{ka}{2}}A.$$

Ta có thể ghi nhận rằng các biên độ $\underline{B}$ *và* $\underline{D}$ *là phức, và do đó sự phản xạ và sự truyền qua mang lại những độ lệch pha giữa các sóng khác nhau.*

3) • ***M = m***

$$\underline{B} = 0 \quad \text{và} \quad \underline{D} = A$$

Khi tất cả các hạt đều như nhau, sóng tới truyền "một cách tự nhiên" trong vật rắn kết tinh.

Như vậy, một sóng phản xạ có thể chỉ ra sự có mặt của các tạp chất trong một vật rắn kết tinh. Thực vậy, các phương pháp phân tích các chất rắn (và khuyết tật của chúng) chính là việc truyền các sóng siêu âm vào các chất rắn này và dò tìm mọi sóng phản xạ.

• $M = 0$: **không có hạt tại $n = 0$**

$$\underline{B} = -A\sin\frac{ka}{2}e^{j\left(\frac{ka}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} \text{ và } \underline{D} = A\cos\frac{ka}{2}e^{j\frac{ka}{2}}$$

Có thể chú ý rằng nếu $ka \ll 1$ (tức là nếu $a \ll \lambda$) thì $B \approx 0$ và $D \approx A$, sóng tới không bị phản xạ và ta không cảm thấy sự vắng mặt của hạt tại $n = 0$.

• $M \to \infty$

$$\underline{B} = -A \quad \text{và} \quad \underline{D} = 0$$

Có phản xạ toàn phần, điều này có thể dự đoán được, vì một hạt rất nặng thì hầu như không dao động.

8

1) *Các định luật về các mạng và các nút dẫn đến lần lượt :*

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \Lambda\frac{\partial i}{dt} \text{ và } -\frac{\partial i}{\partial x} = \Gamma\frac{\partial v}{\partial t} + I_0\sin\theta$$

do đó có phương trình :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \Lambda\Gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Lambda I_0\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}.$$

Ta thấy lại phương trình lan truyền (phi tuyến tính) mà đầu bài đã đề xuất, bằng cách lấy tích phân phương trình trên đối với t (ở đây ta giả định rằng v, i và θ thực sự phụ thuộc t và x ; hằng số tích phân đối với t – do đó có thể chỉ là hàm của x thôi – xuất hiện trong quá trình tính toán được lấy là bằng không) rồi sau đó nhân nó với α. Ta được :

$$\frac{1}{c^2} = \Gamma\Lambda \text{ và } \frac{1}{\delta^2} = \alpha\Lambda I_0 = \frac{4\pi e}{h}\Lambda I_0$$

Có thể lưu ý rằng khi giải bài tập 8 chương 1, chúng ta cũng có thể thu được đúng phương trình có đạo hàm riêng phần đó nếu như ta đã không giả định θ là nhỏ.

2) a) *Với các biến rút gọn, phương trình được viết thành* $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial^2\theta}{\partial t^{*2}} = \sin\theta$.

Vì X và T giữ các vai trò đối xứng, ta có ngay :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^{*2}} = \frac{4XT''}{1+X^2T^2} - \frac{8X^3T(T')^2}{(1+X^2T^2)^2}$$

và ta được :

$$(TX'' - XT'')(1+X^2T^2) - XT(1 - X^2T^2 + 2T^2(X')^2 - 2X^2(T')^2) = 0$$

b) *Cuối cùng có thể kiểm tra được rằng khi ta lấy :*

$$(X')^2 = mX^2 \text{, do đó } X'' = mX$$

và $(T')^2 = (m-1)T$, *do đó* $T'' = (m-1)T$,

thì phương trình trên được thỏa mãn.

3) a) *X và T được viết thành :*

$$X = Ae^{\sqrt{m}x^*} + Be^{-\sqrt{m}x^*} \text{ và } T = De^{\sqrt{m-1}t^*} + Ee^{\sqrt{m-1}t^*}$$

Trong số bốn hằng số tích phân A, B, D và E, phải chọn E bằng không nếu ta muốn cho θ, tức là T nữa, bằng không tại $t = -\infty$. Khi đó có hai họ nghiệm xác định bởi :

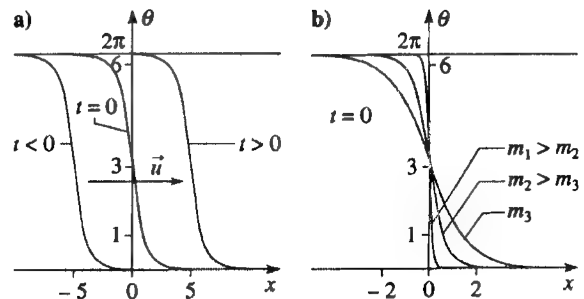
$$tg\frac{\theta}{4} = ADe^{-\frac{\sqrt{m}}{\delta}(x-ut)} \text{ và } tg\frac{\theta}{4} = BDe^{\frac{\sqrt{m}}{\delta}(x+ut)}$$

bằng cách đặt $u = c\sqrt{\frac{m-1}{m}}$.

Các nghiệm này là hai sóng chạy, truyền với vận tốc u, sóng thứ nhất theo chiều tăng của x, sóng thứ hai theo chiều ngược lại. Do biểu thức của nó, hai sóng này không biến dạng trong quá trình lan truyền.

b) *Sơ đồ* a) *biểu diễn dáng vẻ của sóng đơn θ tùy theo x vào những thời điểm khác nhau : sóng đó chỉ đi qua một điểm của chỗ nối có một lần, và ở điểm đó θ biến thiên từ 0 đến 2π.*

Sơ đồ b) biểu diễn sự biến thiên của θ vào một thời điểm cho trước, tùy theo x, đối với các giá trị khác nhau của tham số m : m càng lớn (tức là vận tốc tốc truyền u càng lớn), thì miền nối mà sóng có liên quan càng hẹp (θ bằng không ở phía sau, θ bằng 2π ở phía trước). Như vậy ta có thể nhận xét rằng vận tốc truyền u phụ thuộc dạng của sóng đơn.



SỰ LAN TRUYỀN SÓNG ÂM TRONG CÁC CHẤT LƯU

4

MỤC TIÊU

■ Xây dựng một mô hình để khảo sát sự lan truyền sóng âm.

Mở đầu

Cùng với ánh sáng, âm là yếu tố truyền thông tin mà ta sử dụng thông thường nhất : việc khảo sát nó có lợi ích thực tiễn rõ ràng.

Hơn nữa, chúng ta nhận xét rằng cho tới nay chúng ta mới chỉ khảo sát các hiện tượng lan truyền mô tả bởi phương trình d'ALEMBERT, đối với chúng các đặc trưng của môi trường hạn chế sự lan truyền trong chỉ một chiều của không gian.

Sự khảo sát các sóng âm sẽ cho phép chúng ta đề cập một hiện tượng lan truyền trong ba chiều.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

■ Giáo trình năm thứ hai.

■ Những nguyên tắc khảo sát dòng chảy của một chất lưu.

■ Phương trình lan truyền, phương trình d'ALEMBERT.

■ Sóng, trở kháng sóng, phản xạ và truyền qua.

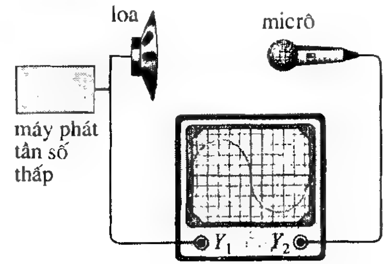
1 Phương trình lan truyền sóng âm

1.1. Âm

1.1.1. Thí nghiệm

Chúng ta lặp lại một thí nghiệm đã làm ở lớp Đệ nhị.

Một chiếc loa nối với một máy phát tần số thấp phát ra một âm mà ta có thể nghe được. Để phân tích hiện tượng âm, chúng ta dùng thêm một micrô và hiển thị các tín hiệu phát ra từ máy phát và từ micrô, nối với các đường dây của một máy hiện sóng. Bằng cách chọn chính xác các tỉ xích, chúng ta sẽ thu được trên màn hình máy hiện sóng hai đường sin (*h*.1).



H.1. *Âm truyền từ loa đến micrô.*

1.1.2. Hiện tượng lan truyền

Micrô bắt được một tín hiệu dạng sin do loa phát ra : *một sóng âm lan truyền trong không khí* giữa máy phát và máy thu.

Khi đồng bộ hóa sự quét của máy hiện sóng theo tín hiệu truyền đi từ loa, các tín hiệu đó có cùng tần số và xuất hiện ổn định đồng thời trên màn hình nhưng lệch pha. Nếu ta đưa micrô ra xa loa, ta thấy rằng sự trễ pha φ của tín hiệu của micrô so với tín hiệu mộc tăng lên : thời gian truyền tín hiệu từ máy phát đến máy thu tăng theo khoảng cách giữa chúng.

Cũng có thể nhận xét rằng khi ta di chuyển micrô (từ từ để tránh nhiễu, thì tín hiệu dạng sin mà nó tạo ra lại trở lại vị trí cũ một cách tuần hoàn trên màn hình của máy hiện sóng : sóng âm phát hiện được không những có một chu kì thời gian T là nghịch đảo của tần số ν của máy phát, mà còn có một chu kì không gian λ. Mỗi khi chúng ta đưa micrô ra xa (hoặc lại gần) loa một đoạn λ thì sự chậm pha φ tăng (hoặc giảm) 2π.

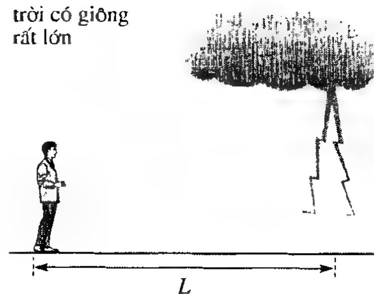
Như vậy sóng tâm dạng sin cũng có những đặc trưng giống như những đặc trưng ta đã rút ra đối với các nghiệm dạng sin của phương trình d'ALEMBERT ở *chương* 2.

1.1.3. Vận tốc âm

Chúng ta biết rằng các chu kì thời gian và không gian của một SPCĐS là nghiệm của phương trình d'ALEMBERT thì gắn với nhau ở mọi tần số ν bởi hệ thức $\lambda = cT$, trong đó c là vận tốc truyền của các sóng là nghiệm của phương trình d'ALEMBERT.

Chúng ta có thể biến đổi tần số của tín hiệu điện gửi tới loa và lặp lại những thao tác mà ta vừa thực hiện, mỗi lần lại đo tỉ số $\dfrac{\lambda}{T}$ của sóng âm (các hiện tượng sóng dừng cho phép đo chính xác được λ). Thực nghiệm chứng tỏ rằng tỉ số đó đồng nhất với một vận tốc và không biến đổi : $\left(\dfrac{\lambda}{T}\right)_{\text{sóng âm}} = c_s$, ở đây vận tốc đặc trưng c_s vào khảng 340 m.s^{-1} (sau này ta sẽ thấy rằng vận tốc đó phụ thuộc nhiệt độ mà ta thực hiện các phép đo). c_s biểu thị vận tốc âm trong không khí.

Vận tốc đó là khá lớn so với các vận tốc có thể gặp hàng ngày : một chiếc xe chạy 150 $km.h^{-1}$, tức là khoảng 40 $m.s^{-1}$, rõ ràng là có vận tốc hạ âm. Tuy nhiên những hiệu ứng trễ khi lan truyền vẫn dễ được phát hiện, nếu ta có thể gắn một quan sát thị giác với việc cảm nhận một âm. Thời gian truyền một thông tin bằng ánh sáng (nó truyền đi với vận tốc khoảng 300000 $km.s^{-1}$) đúng là hoàn toàn có thể bỏ qua so với thời gian truyền của âm gắn với nó.



H.2. *Sự lan truyền ánh sáng hầu như là tức thời. Sự truyền âm diễn ra với vận tốc khoảng* 340 $m.s^{-1}$. *Vậy sự chênh lệch giữa lúc tiếp nhận tín hiệu sáng và âm là* $\frac{L}{340}$, *tức là khoảng* 0,3 $s.km^{-1}$.

Thí dụ khi ta nhìn thấy ánh chớp của một cơn giông, ta có thể xác định thời gian cần thiết để cảm nhận tiếng sấm gắn với nó (*h*.2). Nếu ta đếm được 3 giây giữa hai thời điểm đó, nghĩa là sét đã đánh ở cách ta khoảng 1 km.

1.1.4. Môi trường truyền

Tín hiệu âm truyền đi thế nào từ một máy phát đến một máy thu ? Bằng cách sử dụng một tần số khá nhỏ (tần số nhỏ hơn thời gian lưu ảnh trên võng mạc, vào cỡ $\frac{1}{20}$ giây), ta có thể quan sát được những dao động của màng loa, nó biến đổi một tín hiệu điện thành tín hiệu cơ (sự chuyển đổi điện - cơ ; xem *H–Prépa, Điện từ học, lớp Đệ nhị*). Ở những tần số nghe được cao hơn (20 Hz đến 20 kHz), hiện tượng vẫn là thế (khi đó có thể quan sát được bằng một máy hoạt nghiệm) và chuyển động của màng loa tạo ra những rung động nhỏ của không khí.

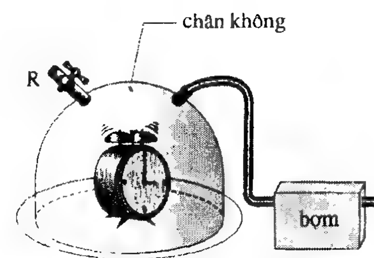
Hiện tượng lan truyền có thể được hiểu như sau : không khí, một môi trường khí, có những tính chất vĩ mô đàn hồi. Chuyển động của màng loa nén nhẹ không khí ở liền kề nó ; áp suất của không khí đó hơi tăng, và đến lượt nó, không khí đó lại đẩy lớp không khí lân cận, v.v...

Chúng ta lại thấy ở đây sự liên kết giữa dịch chuyển và "áp suất dư" trong lòng chất lưu, nằm ở nguyên nhân của hiện tượng lan truyền.

Để chứng tỏ sự can thiệp của môi trường lan truyền (chất khí) trong sự truyền âm, ta đặt một đồng hồ báo thức đang rung chuông dưới một cái bình thủy tinh (*h*.3). Ta dần dần tạo chân không dưới cái bình : tiếng chuông của đồng hồ như là lịm dần. Cái chuông của đồng hồ vẫn rung, nhưng không còn truyền được dao động của nó cho chất khí... Không khí, một *môi trường vật chất*, là một chỗ tựa không thể thiếu cho sự truyền âm.

Các sóng âm là những dao động nhỏ của môi trường vật chất trong đó chúng lan truyền với vận tốc c_s.

1.2. Các phương trình liên kết



H.3. *Đồng hồ báo thức rung chuông dưới cái bình chân không : chỉ cần mở khóa R để trả lại áp suất cho bình và lại nghe thấy tiếng chuông đồng hồ !*

1.2.1. Mô tả bài toán

Chúng ta biết rằng chuyển động của một chất lưu được mô tả bởi hệ đủ các phương trình say đây :

- phương trình bảo toàn khối lượng (một phương trình động học) ;
- phương trình chuyển động (ba phương trình vô hướng) ;
- phương trình cân bằng năng lượng (một phương trình thể hiện sự áp dụng nguyên lí thứ nhất của nhiệt động lực học vào chất lưu) ;

• phương trình trạng thái, có dạng $f(P, \rho, T) = 0$, trong đó P, ρ và T lần lượt chỉ áp suất, mật độ khối lượng và nhiệt độ của chất lưu.

Hệ sáu phương trình vô hướng đó nói chung là phức tạp, khó giải. Vài giả thuyết hợp lí sẽ cho phép chúng ta đơn giản hóa nó.

1.2.2. Giả thuyết nhiệt động lực học

■ Các chuyển động đẳng entrôpi

Thực nghiệm chứng tỏ rằng sự truyền sóng âm thường được đặc trưng bởi một sự tắt dần yếu trong lòng chất lưu nơi nó lan truyền. Vậy chúng ta sẽ bỏ qua các hiện tượng tiêu tán (sự dẫn nhiệt, sự nhớt), điều đó nghĩa là giả thiết rằng sự chảy có tính *đẳng entrôpi.*

Giả thuyết nhiệt động lực học "hợp lí" này có thể thay thế cho hai phương trình cuối ở trên. Khử được nhiệt độ nhờ giả thuyết đó, ta có thể *diễn đạt mật độ khối lượng của chất lưu theo áp suất của nó.*

Giả thử ρ_o, P_o và T_o là các đặc trưng của chất lưu ở trạng thái nghỉ. Sự có mặt của các sóng, ứng với những biến thiên tỉ đối nhỏ của các đại lượng đó, cho phép kí hiệu :

• $\mu = \rho - \rho_0$ là biến thiên mật độ khối lượng của chất lưu ($|\mu| \ll \rho_o$) ;

• $p = P - P_0$ là biến thiên áp suất của nó, cũng gọi là áp suất dư âm học ($|p| \ll P_0$).

Sử dụng hệ số nén đẳng entrôpi :

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S \approx \frac{1}{\rho}\frac{\rho - \rho_0}{P - P_0},$$

chúng ta sẽ viết ở bậc nhất

$$\mu = \rho_0 \chi_s p .$$

■ Biện luận giả thuyết đoạn nhiệt trong trường hợp chất khí

NEWTON là người đầu tiên đã đề nghị một biểu thức của vận tốc âm trong không khí. Tuy nhiên ông đã biểu đạt các biến thiên áp suất bằng cách coi rằng tích PV của một hạt chất lưu không đổi trong quá trình chuyển động của nó. Giả thuyết đó ứng với những chuyển động đẳng nhiệt của chất khí. Sử dụng hệ số nén đẳng nhiệt χ_T thay cho hệ số nén đẳng entrôpi χ_s, không may lại chẳng dẫn đến một giá trị của vận tốc âm phù hợp với thực nghiệm.

LAPLACE đã sửa lại sự chênh lệch bằng số đó bằng cách thừa nhận rằng các chuyển động nhỏ của chất lưu là đoạn nhiệt "vì rằng" chúng là nhanh (sự trao đổi nhiệt "không có thời giờ" để xảy ra) : sự sử dụng χ_s cho phép thu được giá trị đúng của vận tốc thực nghiệm của âm.

Chúng ta có thể thử phân tích giả thuyết về tính đoạn nhiệt của các chuyển động, chấp nhận được nếu ảnh hưởng của sự khuếch tán nhiệt trong chất khí là không đáng kể.

Hiện tượng dẫn nhiệt về mặt vi mô gắn với sự va chạm giữa các phân tử : các phân tử nhanh hơn mất năng lượng cho các phân tử chậm nhất, và thông lượng nhiệt ứng với một sự vận chuyển nhiệt từ những vùng nóng đến những vùng lạnh. Vận tốc (vi mô) của các phân tử khí là vào bậc vận tốc trung bình toàn phương u cho bởi :

$$\frac{1}{2}mu^2 = \langle \mathscr{E}_K \rangle = \frac{3}{2}kT_0, \quad \text{tức là} \quad u = \sqrt{\frac{3kT_0}{m}} = \sqrt{\frac{3RT_0}{M}} .$$

Đối với một nhiệt độ T_0 gần với 300K, và với những phân tử đinitơ và điôxi, vận tốc đó vào khoảng $480\,\text{m.s}^{-1}$. Như vậy nó so sánh được với vận tốc âm.

Kết quả này có vẻ như bác bỏ giả thuyết đoạn nhiệt. Vì các phân tử di chuyển nhanh xấp xỉ như sóng âm, chúng phải "có đủ thời giờ" để di dời giữa các miền nóng nhiều hay nóng ít của chất lưu, và bằng va chạm của chúng mà thực hiện một sự đồng nhất hóa nhiệt độ nhanh chóng. Thực ra điều này chỉ có thể hình dung được nếu như giữa hai lần va chạm nối tiếp nhau các phân tử chuyển động được một khoảng cách so sánh được với khoảng cách đặc trưng cho sự không đồng nhất về nhiệt độ gắn với sóng : hiện tượng dẫn nhiệt là quan trọng nếu quãng đường tự do trung bình l ít nhất là vào cỡ bước sóng λ.

Đối với các sóng âm trong không khí, có tần số $\nu = 20$ kHz (giới hạn trên của miền mà tai người nghe được) và với $c_s = 340\ \text{m.s}^{-1}$, ta được :

$$\lambda = \frac{c_s}{\nu} = 1{,}7\ \text{cm}.$$

Ta biết rằng quãng đường tự do trung bình l của các phân tử khí là vào cỡ vài phần mười micrômet ở nhiệt độ và áp suất thông thường. Các bậc độ lớn đó khẳng định giả thuyết đoạn nhiệt.

Chú ý rằng bất đẳng thức $\lambda \gg l$ cũng được viết là $\nu \ll \nu_c = \dfrac{c_s}{l} \approx 10^9\,\text{Hz}$.

Nó vẫn còn có giá trị rộng rãi đối với các sóng siêu âm do một tinh thể thạch anh dao động ở 40 kHz phát ra.

Giả thuyết đoạn nhiệt của LAPLACE là đúng, nhưng ta cũng thấy rằng cách lập luận của ông là chưa đúng. Các chuyển động của chất lưu là đoạn nhiệt vì tần số các sóng âm là "nhỏ" so với $\dfrac{c_s}{l}$, chứ không phải vì hiện tượng này là "nhanh".

Chúng ta chú ý rằng trong chất lỏng thì quãng đường tự do trung bình của các hạt là nhỏ hơn, vậy giả thuyết đoạn nhiệt cũng được nghiệm đúng ở đây.

Sự truyền âm trong một chất lưu có thể được khảo sát bằng cách coi như chất lưu thực hiện những chuyển động nhỏ đẳng entrôpi.

▶ **Để luyện tập : bài tập 4.**

1.2.3. Tuyến tính hóa các phương trình

Những sự thay đổi trạng thái chất lưu do sóng âm gây ra là những nhiễu loạn nhỏ.

Chúng ta sẽ giải các phương trình của bài toán trong khung cảnh một *phép gần đúng tuyến tính*, gọi là *phép gần đúng âm học*. Đó là điều ta đã làm để gắn liền μ và p trong phạm vi giả thuyết đẳng nhiệt.

■ **Phương trình bảo toàn khối lượng**

Phương trình bảo toàn khối lượng viết thành :

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0\,\text{div}(\vec{v}) + \mu\,\text{div}(\vec{v}) + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\mu\,,$$

tức là, khi chỉ giới hạn ở các số hạng bậc một :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_o \operatorname{div}(\vec{v}) = 0.$$

Ta có thể bỏ qua $\mu \operatorname{div}(\vec{v})$ bên cạnh $\rho_o \operatorname{div}(\vec{v})$, vì μ là nhỏ so với ρ.

Bỏ qua $\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\mu$, số hạng "bậc hai" bên cạnh $\frac{\partial \mu}{\partial t}$, số hạng "bậc một", có vẻ là việc đương nhiên. Tuy vậy, phép gần đúng này đáng được phân tích chính xác hơn. Không phải vì một hàm là nhỏ mà các đạo hàm của nó cũng là nhỏ. Để cho rõ ràng, ta hãy xét một sóng âm (hầu như) đơn sắc, có chu kì T, bước sóng $\lambda = c_s T$. Trong điều kiện đó, $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ là vào bậc $\frac{\mu}{T}$, trong khi $\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\mu$ lại vào bậc $v\frac{\mu}{\lambda} = \frac{v}{c_s}\frac{\mu}{T}$. Phép gần đúng được đề nghị ứng với $|v| \ll c_s$. Điều đó cũng có nghĩa là biên độ dao động của chất lưu, vào bậc vT, là nhỏ so với bước sóng λ của sóng âm : *phép gần đúng âm học là một phép gần đúng của bước sóng lớn.*

Sự tuyến tính hóa đã thực hiện có vẻ như dựa trên hai phép gần đúng :

$$|\mu| \ll \rho_0 \quad \text{và} \quad |v| \ll c_s.$$

Tuy nhiên ta sẽ thấy rằng hai bất đẳng thức này thực ra là hai mặt của cùng một phép gần đúng (xem §**1.4.3**).

■ Phương trình chuyển động

Ảnh hưởng của tính nhớt của chất lưu là không đáng kể trong phạm vi khảo sát của ta, nên phương trình chuyển động rút lại thành phương trình EULER :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \vec{f}_V.$$

Mật độ khối của lực tĩnh (thí dụ, $\vec{f}_V = \rho\vec{g}$) được bù trừ bởi gradiên của áp suất tĩnh P_0. Ảnh hưởng của biến thiên của nó (thí dụ, $\mu\vec{g}$) trong thực tế là không đáng kể so với gradiên của áp suất dư p.

Sau khi tuyến tính hóa, phương trình chuyển động viết thành :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}p.$$

Các phương trình tuyến tính hóa mô tả sự biến thiên của một chất lưu có các sóng âm chạy qua (vậy sự biến thiên là đẳng entrôpi) :

$$\left|\begin{array}{ll} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 & \textbf{(bảo toàn khối lượng)} \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}p & \textbf{(phương trình chuyển động).} \\ \mu = \rho_0 \chi_S p & \textbf{(đẳng entrôpi)} \end{array}\right.$$

1.2.4. Các phương trình liên kết

Khử biến số μ, ta thu được hệ các phương trình liên kết dưới đây.

Sự lan truyền sóng âm trong một chất lưu bị chi phối bởi hệ các phương trình liên kết :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial t} = -\dfrac{1}{\chi_S}\mathrm{div}(\vec{v}) \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho_0}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p \end{vmatrix}.$$

Trong trường hợp lan truyền sóng âm phẳng theo phương trục (Ox) chẳng hạn, thì gradiên áp suất và vận tốc song song với trục đó :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x \text{ và } \vec{v} = v(x,t)\vec{e}_x.$$

Khi đó hệ phương trình liên kết có một dạng đơn giản hóa :

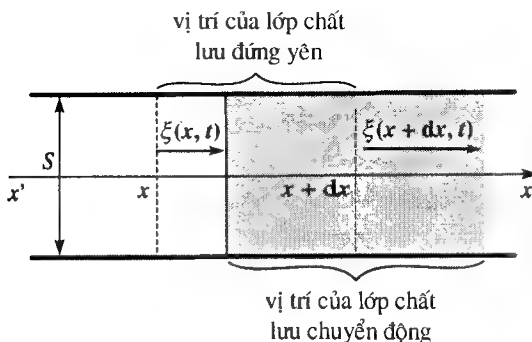
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial t} = -\dfrac{1}{\chi_S}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} \end{vmatrix}.$$

Áp dụng 1

Sự lan truyền sóng âm phẳng - Cách tiếp cận LAGRANGE

Chúng ta đặt vấn đề tìm lại các phương trình trên bằng một cách mô tả LAGRANGE sự lan truyền sóng âm phẳng trong một ống dẫn có tiết diện S không đổi.

Độ dịch chuyển vào lúc t của một hạt chất lưu có hoành độ x khi chất lưu đứng yên được kí hiệu là $\xi(x, t)$ (h.4). Áp suất dư và mật độ khối lượng của lớp đó là $p(x, t)$ và $\rho(x, t)$.



◀ **H.4.** *Lớp chất lưu chuyển động trong ống dẫn.*

Chú ý rằng tọa độ x ở đây đóng vai trò một chỉ số dùng để đánh dấu hạt chất lưu ta xét. x là vị trí của hạt khi chất lưu đứng yên, trong khi vị trí của nó vào lúc t ứng với $x + \xi(x, t)$. Đặc biệt mật độ khối lượng $\rho(x, t)$ chỉ mật độ khối lượng vào lúc t của hạt mà ta theo dõi chuyển động, hoành độ của nó vào thời điểm t là $x + \xi(x, t)$, chứ không phải là x. Đối với $p(x, t)$ ta cũng có nhận xét như vậy. Các cách kí hiệu ở đây ứng với một hệ hình thức LAGRANGE.

Như trước đây, ta sẽ thực hiện một phép gần đúng các sóng dài, với giả định rằng $\xi \ll \lambda$ $\left(\text{và } \left|\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right| \approx \dfrac{\xi}{\lambda} \ll 1\right)$, điều đó cho phép ta thực hiện vài sự đơn giản hóa bằng phép gần đúng tuyến tính.

1) *Xác định biến thiên mật độ khối lượng của một lớp nguyên tố của chất lưu, có tiết diện S và độ dày dx lúc đứng yên.*

2) *Lập phương trình chuyển động của chính lớp chất lưu đó.*

3) *Rút ra hai phương trình liên kết gắn ρ với vận tốc* $v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$.

1) Khối lượng chất lưu ta xét là :

$$dm = \rho_0 S dx.$$

Vào lúc t, thể tích nguyên tố đó là :

$$d\tau = S[dx + \xi(x+dx, t) - \xi(x, t)]$$

$$\approx S dx\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right).$$

Vậy mật độ khối lượng của nó là :

$$\rho = \frac{dm}{d\tau} = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}} \approx \rho_0\left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right),$$

do đó $\mu = \rho - \rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$ (1).

2) Lớp chất lưu đó là một hệ đóng có khối lượng $dm = \rho_0 S dx$, được theo dõi khi nó chuyển động, chịu một áp suất $P_0 + p(x, t)$ ở thượng lưu và áp suất $P_0 + p(x + dx, t)$, ở hạ lưu.

Vậy phương trình chuyển động của nó là :

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S[p(x, t) - p(x + dx, t)]$$

$$\approx -S\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) dx,$$

và cuối cùng là :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2).$$

3) Khi sử dụng hệ thức $\mu = \rho_0 \chi_S p$ và vận tốc $v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, các phương trình (1) và (2) lại cho ta hệ phương trình liên kết đã thành lập, ở đây nó được rút gọn cho sự lan truyền một chiều :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{và} \quad \chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

1.2.5. Dòng không xoáy

Rôta của một gradiên bằng không, phương trình liên kết thứ hai $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p$, khẳng định rằng :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}, \quad \text{tức là} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}) = \vec{0}$$

Như vậy rôta của vận tốc cũng không phụ thuộc thời gian, tức là bằng trung bình theo thời gian của nó. Đối với các chuyển động dao động, trung bình này bằng không :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \langle \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \rangle_t = \vec{0}.$$

Từ đó, suy ra sự tồn tại một thế vận tốc ϕ :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\, \phi.$$

Khi đó phương trình chuyển động viết thành :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{p}{\rho_0},$$

$$\text{vậy } p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(t).$$

Thế vận tốc được xác định sai khác một hàm không phụ thuộc thời gian (chọn cỡ). Chúng ta có thể chọn nó mà không thay đổi biểu thức của vận tốc, sao cho có được :

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

1.3. Phương trình lan truyền

1.3.1. Phương trình d'ALEMBERT

Đưa những biểu thức của áp suất dư và vận tốc chất lưu vào phương trình bảo toàn khối lượng, ta được :

$$0 = \operatorname{div}(\vec{v}) + \chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\phi) - \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \Delta\phi - \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2},$$

trong đó Δ là toán tử laplaxiên (xem *phụ lục*).

Lấy đạo hàm theo không gian hoặc thời gian phương trình lan truyền thế, ta có thể kiểm tra rằng các trường vận tốc và áp suất dư cùng thỏa mãn phương trình lan truyền đó.

Sự lan truyền các sóng âm trong một chất lưu được mô tả bởi phương trình lan truyền (ba chiều) d'ALEMBERT, nghiệm đúng bởi thế vận tốc và các trường vận tốc và áp suất dư :

$$\Delta\phi - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0\,; \quad \Delta\vec{v} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} = \vec{0}\,; \quad \Delta p - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

với $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\phi$.

Vận tốc đặc trưng của sự truyền âm được biểu diễn theo các đặc trưng của chất lưu bởi :

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S}.$$

1.3.2. Vận tốc âm

■ **Trong chất khí**

Ta có thể tính vận tốc truyền âm trong một chất khí bằng cách coi nó, theo một sự gần đúng ban đầu, như một khí lí tưởng có hệ số đặc trưng γ. Đối với một sự biến thiên đẳng entrôpi, ta có :

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cte}, \quad \text{do đó } \chi_S = \frac{1}{\gamma P_0}.$$

Khi đó vận tốc âm trong một chất khí là :

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}.$$

Đối với không khí ($M = 29\ \text{g.mol}^{-1}$) coi như (ở áp suất bình thường) một chất khí lí tưởng lưỡng nguyên tử $\left(\gamma = \frac{7}{5}\right)$, ta thu được $c_s = 331\ \text{m.s}^{-1}$ ở $T_0 = 273\text{K}\ (0^\circ\text{C})$. Giá trị đó phù hợp với thực nghiệm.

Vận tốc âm tăng tỉ lệ với căn bậc hai của nhiệt độ chất khí. Như vậy, âm truyền nhanh hơn trong không khí ở 25°C ($T_0 = 298$ K) :

$$c_s = 346\ \text{m.s}^{-1}.$$

Vận tốc âm giảm tỉ lệ với căn bậc hai của khối lượng mol chất khí trong đó nó lan truyền. Đối với đihiđrô ($M = 2$ g.mol^{-1}), vận tốc âm ở 273K lớn hơn rất nhiều vận tốc trong không khí : $c_s = 1260$ m.s^{-1}.

Đáng chú ý là biểu thức ta đã thu được đối với vận tốc âm không làm xuất hiện áp suất của chất khí. Thực vậy, điều này chỉ được nghiệm đúng với những áp suất so sánh được với áp suất khí quyển.

• Khi áp suất tăng, sự gần đúng khí lí tưởng phải được xem xét lại, vì hành vi của chất khí gần giống như hành vi của một chất lỏng (*h*.5), và vận tốc âm tăng.

• Ở những áp suất thấp, âm không truyền đi nữa : khi đó không phải là cần xem lại sự gần đúng khí lí tưởng, mà phải xem lại sự gần đúng *môi trường liên tục*, mà ta đã giả định rằng hành vi của nó được mô tả bởi những phương trình của cơ học chất lưu.

môi trường	vận tốc âm ($m.s^{-1}$)
chất khí	
điôxi	317
không khí	331
đinitơ	339
đihiđrô	1270
chất lỏng	
nước	1500
thủy ngân	1450
chất rắn	
chì	1230
đồng	3750
sắt	5130
đá hoa cương	6000

H.5. *Vận tốc âm trong vài môi trường vật chất.*

■ **Trong chất lỏng**

Ta có thể so sánh vận tốc âm trong chất lỏng và vận tốc âm trong chất khí bằng cách viết :

$$\frac{c_{s(\text{lỏng})}}{c_{s(\text{khí})}} = \sqrt{\frac{\rho_{0(\text{khí})}}{\rho_{0(\text{lỏng})}}}\sqrt{\frac{\chi_{S(\text{khí})}}{\chi_{S(\text{lỏng})}}}.$$

Mật độ một chất lỏng lớn hơn mật độ một chất khí khoảng một nghìn lần, trong điều kiện nhiệt độ và áp suất thông thường. Ngược lại tính chịu nén của nó nhỏ hơn của chất khí rất nhiều :

$$\chi_{(\text{khí})} \approx \frac{1}{P_0} \approx 10^{-5}\ \text{Pa}^{-1} \gg \chi_{(\text{lỏng})} \approx 10^{-10}\ \text{Pa}^{-1}.$$

Vậy vận tốc âm trong chất lỏng lớn hơn trong chất khí (*h*.5).

■ **Trong chất rắn**

Trường hợp các chất rắn không nằm trong phạm vi sự khảo sát mà ta tiến hành ở đây. Mô hình chuỗi các nguyên tử liên kết bởi các lò xo phản ảnh khá tốt sự truyền âm trong một chất rắn đẳng hướng. Vì các bước sóng lớn hơn rất nhiều các khoảng cách giữa các nguyên tử, phép gần đúng các bước sóng lớn (xem *chương* 1, §**3.2.5**) có thể được áp dụng, và ta có thể viết vận tốc âm trong chất rắn :

$$c_s = \sqrt{\frac{Ka^2}{M}}.$$

Hình 5 chỉ rõ rằng vận tốc âm trong chất rắn thường còn lớn hơn trong chất lỏng.

1.4. Sự lan truyền sóng âm phẳng

1.4.1. Dạng của các nghiệm sóng phẳng

Đối với một sóng phẳng $\phi(x, y, z, t) = \phi(x, t)$ (và cũng như thế, $\vec{v} = v(x, t)\vec{e}_x$, $p = p(x, t)$) truyền song song với trục (Ox), phương trình lan truyền rút lại là :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0,$$

ta đã biết dạng tổng quát các nghiệm của nó là :

$$\phi(x, t) = F\left(t - \frac{x}{c_s}\right) + G\left(t + \frac{x}{c_s}\right).$$

Bằng cách kí hiệu $f\left(t - \frac{x}{c_s}\right) = -\frac{\partial F}{\partial x}$ và $g\left(t - \frac{x}{c_s}\right) = \frac{\partial G}{\partial x}$, ta thu được trường vận tốc và trường áp suất của một sóng phẳng :

$$\begin{cases} v(x, t) = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}\vec{e}_x = \left(f\left(t - \dfrac{x}{c_s}\right) + g\left(t + \dfrac{x}{c_s}\right)\right)\vec{e}_x \\ p(x, t) = -\rho_0 \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \rho_0 c_s \left(f\left(t - \dfrac{x}{c_s}\right) - g\left(t + \dfrac{x}{c_s}\right)\right) \end{cases}.$$

Chú ý rằng, vectơ vận tốc và độ dịch chuyển của chất lưu song song với phương truyền của sóng phẳng.

Sóng âm là *sóng dọc*.

1.4.2. Sóng phẳng chạy đơn sắc

Các SPCĐS là những trường hợp riêng của SPC. Xét một SPCĐS có tần số ω và vectơ sóng $\vec{k} = k\vec{e}_x$, thế của nó trong cách kí hiệu phức là :

$$\underline{\phi} = \underline{\phi}_0 e^{j(\omega t - kx)}.$$

Các trường vận tốc và áp suất dư là :

$$\begin{cases} \underline{\vec{v}} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\underline{\phi} = -jk\underline{\phi}_0 e^{j(\omega t - kx)}\vec{e}_x \\ \underline{p} = -\rho_0 \dfrac{\partial \underline{\phi}}{\partial t} = -j\omega\rho_0\underline{\phi}_0 e^{j(\omega t - kx)} \end{cases}.$$

Một cách tổng quát hơn, phương truyền sóng được chỉ bởi vectơ sóng có phương bất kì, và thế vận tốc của nó được viết thành :

$$\underline{\phi} = \underline{\phi}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})},$$

tức là :

$$\begin{cases} \underline{\vec{v}} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\underline{\phi} = -jk\underline{\phi}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \\ \underline{p} = -\rho_0 \dfrac{\partial \underline{\phi}}{\partial t} = -j\omega\rho_0\underline{\phi}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \end{cases}.$$

Phương trình lan truyền :

$$0 = \Delta\underline{\phi} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 \underline{\phi}}{\partial t^2} = \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c_s^2}\right)\underline{\phi}$$

đòi hỏi có hệ thức tán sắc :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2}.$$

▶ **Để luyện tập : bài tập 1 và 2.**

1.4.3. Trở kháng suất âm

Các biểu thức trên chỉ ra rằng áp suất và vận tốc của các SPC truyền song song với trục (Ox) thì tỉ lệ với nhau : $p = \pm\rho_0 c_s v$, dấu ở đây gắn với chiều truyền của SPC.

Trong điện động lực học, một trở kháng $\left(Z=\frac{U}{I}\right)$ thì bằng tỉ số của một điện áp với dòng điện (lưu lượng) tương ứng. Đối với một sóng âm, chúng ta có thể định nghĩa một trở kháng là tỉ số của một lực (pS) với lưu lượng khối tương ứng (Sv).

Chúng ta định nghĩa (đối với một ống dẫn có tiết diện S không đổi) *trở kháng suất âm* Z_c của chất lưu là tỉ số $\frac{p}{v}$ của một sóng phẳng chạy di chuyển theo chiều tăng của x (trong một ống dẫn có tiết diện biến thiên, tốt hơn là nên dùng tỉ số $\left.\frac{p}{Sv}\right)$:

$$Z_c = \rho_0 c_s = \frac{1}{\chi_S c_s} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}}$$

(trở kháng suất âm này đo bằng $kg.m^{-2}.s^{-1}$).

<u>*Chú ý :*</u>

Đối với một sóng loại "f", ta biết rằng $p = \rho_0 c_s v$. Sử dụng hệ thức giữa biến thiên mật độ khối lượng và áp suất $\mu = \rho_0 \chi_S p$, ta rút ra :

$$\frac{\mu}{\rho_0} = \frac{v}{c_s}.$$

Chúng ta kiểm tra thấy rằng các bất đẳng thức $\mu \ll \rho_0$ và $v \ll c_s$ là hệ quả của cùng một phép gần đúng, như ta đã thừa nhận ở §**1.2.3.**

Áp dụng 2

Sóng cầu

Về mặt lí thuyết, các mặt phẳng sóng của một sóng phẳng mở rộng ra vô hạn, nhưng quan niệm sóng phẳng chỉ có thể được xét một cách tiên nghiệm trong những miền mở rộng có giới hạn vì năng lượng của một sóng không thể là vô hạn. Các sóng cầu, có biên độ biến thiên trong quá trình lan truyền, cho phép mô tả các sóng phát ra bởi, chẳng hạn, một nguồn âm có kích thước nhỏ đặt tại một điểm O.

1) *Hãy xác lập dạng tổng quát của các sóng cầu mà biên độ chỉ phụ thuộc t và khoảng cách r = OM tới điểm gốc O :*

$$\phi(x, y, z, t) = \phi(r, t),$$

là các nghiệm của phương trình lan truyền d'ALEMBERT.

2) *Hãy giải thích hai số hạng có mặt trong biểu thức đó.*

3) *Hãy nêu đặc trưng của các mặt sóng và bình luận sự có mặt của một hệ số giảm dần theo $\frac{1}{r}$ trong biên độ của sóng.*

Cho biết : Laplaxiên trong tọa độ cầu của một hàm $f(r, \theta, \varphi) = f(r)$ là :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf(r)).$$

1) Phương trình d'ALEMBERT ba chiều :

$$\Delta\phi - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

trong trường hợp một sóng cầu thì thu về phương trình lan truyền một chiều :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0,$$

được hàm $F(r, t) = r\phi(r, t)$ nghiệm đúng. Vậy các sóng cầu là nghiệm của phương trình lan truyền có dạng :

$$\phi(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c_s}\right)}{r} + \frac{g\left(t + \frac{r}{c_s}\right)}{r}$$

(tất nhiên biểu thức này là không chấp nhận được ở lân cận điểm mà từ đó biên độ phát ra).

2) Hai số hạng có thể được giải thích như là hai sóng cầu lan truyền xuyên tâm với vận tốc c_s. Sóng thứ nhất là một sóng cầu phân kì xuất phát từ điểm O. Sóng thứ hai là một sóng cầu hội tụ tại điểm O.

3) Các mặt sóng của sóng cầu là các mặt cầu đồng tâm tại O. Diện tích của chúng tăng tỉ lệ với bình phương khoảng cách $r = OM$. Các đại lượng về năng lượng gắn với sóng thì gắn với biên độ của nó theo bậc hai (xem § **2**). Vậy chúng sẽ giảm tỉ lệ với $\frac{1}{r^2}$, điều đó có tác dụng là cho phép bảo toàn năng lượng do sóng truyền tải trên những mặt tăng tỉ lệ với r^2.

2 Khía cạnh năng lượng

2.1. Mật độ năng lượng khối của một sóng âm

Trong trường hợp sự truyền sóng trên một sợi dây (xem *bài tập* 6, *chương* 3), chúng ta đã làm nổi rõ hai số hạng năng lượng : một mật độ động năng dài và một mật độ thế năng dài. Chúng ta hãy cũng làm như vậy đối với một sóng âm.

2.1.1. Mật độ khối của động năng

Mật độ động năng khối gắn với chuyển động (vĩ mô) của chất lưu là $e_K = \frac{1}{2}\rho v^2$. Sóng âm là một nhiễu loạn yếu của môi trường, chúng ta sẽ viết biểu thức đó ở bậc hai : $e_K = \frac{1}{2}\rho_0 v^2$.

2.1.2. Mật độ khối của thế năng

Sự dịch chuyển của chất lưu có kèm theo một biến thiên nhỏ của mật độ khối lượng, do tác dụng của áp suất dư. Tương tự như thế năng đàn hồi tích lũy bởi một lò xo mà độ dài đã biến đổi so với giá trị của nó ở trạng thái nghỉ, công đã thu được có thể được trả lại dưới dạng động năng.

Thể tích của một khối lượng đơn vị chất lưu bằng $\frac{1}{\rho}$, chúng ta có thể tính được mật độ thế năng khối tích lũy bởi chất lưu khi áp suất dư chuyển từ 0 đến p dưới dạng :

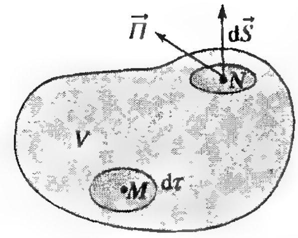
$$\int_{p'=0}^{p} -(P_0 + p')d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \int_{p'=0}^{p} (P_0 + p')\frac{d\mu'}{\rho_0^2}$$

$$= \int_{p'=0}^{p} \frac{\chi_S}{\rho_0}(P_0 + p')dp' = \frac{\chi_S}{\rho_0}P_0 p + \frac{1}{2}\frac{\chi_S}{\rho_0}p^2.$$

Đối với các dao động, giá trị trung bình của số hạng thứ nhất $\frac{\chi_S}{\rho_0} P_0 p$ bằng không : công trung bình của P_0 bằng không, và số hạng này không cho ta biết gì về sự truyền tải năng lượng.

Vậy mật độ thế năng *khối* gắn với sóng âm sẽ được xác định bởi :

$$e_P = \rho_0 \left(\frac{1}{2} \frac{\chi_s}{\rho_0} p^2 \right), \quad \text{tức là } e_P = \frac{1}{2} \chi_s p^2 .$$



H.6. *Thể tích V nhận công suất khi tích vô hướng $\vec{\Pi}.d\vec{S}$ là âm, vì theo quy ước pháp tuyến của mặt kín S(V) hướng ra ngoài.*

2.1.3. Mật độ khối của năng lượng âm

Mật độ khối của năng lượng một sóng âm là $e_s = e_K + e_P$, trong đó $e_K = \frac{1}{2}\rho_0 v^2$ và $e_P = \frac{1}{2}\chi_S p^2$ là mật độ động năng khối và mật độ thế năng khối gắn với sóng.

2.2. Sự cân bằng năng lượng

Lấy đạo hàm e_s đối với thời gian, ta được :

$$\frac{\partial e_s}{\partial t} = \rho_0 \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \chi_S p \frac{\partial p}{\partial t} = -\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}} p - p \text{div} \vec{v} = -\text{div}(p\vec{v})$$

Xét năng lượng $\mathscr{E}_s$ gắn với một sóng âm chứa trong một thể tích cố định V của chất lưu, vào thời điểm t (*h*.6), tức là :

$$\mathscr{E}_s = \iiint_V e_s(M,t) d\tau .$$

Biến thiên của $\mathscr{E}_s$ trong đơn vị thời gian được viết thành :

$$\frac{d\mathscr{E}_s}{dt} = \iiint_V \frac{\partial e_s}{\partial t}(M,t) d\tau = -\iiint_V \text{div}(p\vec{v})_{(M,t)} d\tau ,$$

tức là, bằng cách vận dụng định lí GREEN - OSTROGRADSKI :

$$\frac{d\mathscr{E}_s}{dt} = -\iint_S (p\vec{v})_{(N,t)}.d\vec{S} = -\mathscr{P} .$$

Thông lượng (đi ra) của vectơ $\vec{\Pi} = p\vec{v}$ xuyên qua mặt S giới hạn thể tích V, thì bằng công suất $\mathscr{P}$ xuyên qua mặt S, tức là bằng độ giảm (đại số) của năng lượng âm $\mathscr{E}_s$ chứa trong thể tích V trong đơn vị thời gian.

Chú ý :

Trong sự cân bằng năng lượng trên đây, ta đã giả định rằng trong thể tích V không có nguồn âm, và không có khả năng hấp thụ năng lượng trong lòng chất lưu.

Sự cân bằng năng lượng địa phương gắn với một sóng âm, được viết thành :

$$\text{div}(\vec{\Pi}) + \frac{\partial e_s}{\partial t} = 0 ,$$

trong đó vectơ mật độ mặt của công suất (hay mật độ lưu lượng năng lượng) là $\vec{\Pi} = p\vec{v}$ (đo bằng $W.m^{-2}$).

Chú ý :

Chú ý rằng số hạng $\chi_s P_0 p$ mà ta đã "quên đi" để định nghĩa mật độ thế năng khối, nghiệm đúng $-\frac{\partial}{\partial t}(\chi_s P_0 p) = P_0 \mathrm{div}(\vec{v})$. Chúng ta nhận thấy rằng áp suất tĩnh không tham gia vào sự truyền sóng âm, nó chỉ tham gia vào một sự cân bằng năng lượng "đầy đủ" dưới dạng hai số hạng giản ước lẫn nhau.

Áp dụng 3

Cân bằng năng lượng địa phương đối với một sóng phẳng

Đối với một sóng phẳng truyền song song với trục (Ox), hãy biểu thị các mật độ động năng, thế năng và năng lượng sóng cũng như vectơ mật độ lưu lượng năng lượng. Hãy kiểm tra lại sự cân bằng năng lượng địa phương trong trường hợp riêng này.

Đối với một sóng phẳng truyền song song với trục (Ox), ta biết rằng vận tốc và áp suất dư có dạng :

$$\vec{v}(x,t) = \left(f\left(t - \frac{x}{c_s}\right) + g\left(t + \frac{x}{c_s}\right)\right)\vec{e}_x \; ;$$

$$p(x,t) = \rho_0 c_s \left(f\left(t - \frac{x}{c_s}\right) - g\left(t + \frac{x}{c_s}\right)\right).$$

Chúng ta có thể biểu thị :

- mật độ động năng khối :

$$e_K = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 = \frac{1}{2}\rho_0 (f^2 + 2fg + g^2) \; ;$$

- mật độ thế năng khối :

$$e_P = \frac{1}{2}\chi_S p^2 = \frac{1}{2}\rho_0 (f^2 - 2fg + g^2) \; ;$$

- mật độ khối của năng lượng sóng :

$$e_s = e_K + e_P = \rho_0 (f^2 + g^2) \; ;$$

- vectơ mật độ mặt của công suất :

$$\vec{\Pi} = p\vec{v} = \Pi \vec{e}_x = \rho_0 c_s (f^2 - g^2)\vec{e}_x \, .$$

Các sóng "f" và "g" đã bị tách rời. Có thể dễ dàng kiểm tra sự cân bằng năng lượng :

$$\frac{\partial e_s}{\partial t} = 2\rho_0 (ff' + gg') = -\rho_0 c_s \frac{\partial (f^2 - g^2)}{\partial x}$$

$$= -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\mathrm{div}(\vec{\Pi}).$$

2.3. Cường độ âm

2.3.1. Cường độ âm

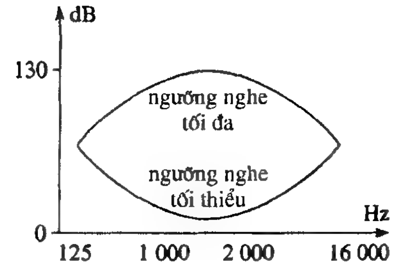
Xét một sóng phẳng chạy loại "f", tức là truyền song song với trục (Ox), theo chiều tăng của x.

Cường độ âm của sóng đó, kí hiệu là I, theo định nghĩa là giá trị của công suất trung bình mà sóng âm truyền tải qua một diện tích đơn vị vuông góc với phương truyền. Đó cũng là thông lượng trung bình của vectơ $\vec{\Pi}$ qua diện tích đó, nghĩa là :

$$I = \langle pv \rangle = \rho_0 c_s \langle v^2 \rangle = \rho_0 c_s \left\langle f^2\left(t - \frac{x}{c_s}\right)\right\rangle.$$

2.3.2. Mức âm

Miền tần số mà tai người tiếp nhận được trải ra khoảng từ 20Hz đến 20kHz. Dải cường độ âm tiếp nhận được là rất rộng. Ngưỡng nghe ứng với một cường độ âm (đối với tai trung bình, với tần số khoảng 1500Hz) $I_0 = 10^{-12}\text{W.m}^{-2}$; ngưỡng đau nằm ở 1W. m^{-2}. Như vậy cần dùng một thang lôga để đánh dấu các cường độ âm. Mức âm được xác định bằng đêxiben bởi $L = 10\log\frac{I}{I_0}$ với $I_0 = 10^{-12}\,\text{W. m}^{-2}$.



H.7a. *Các ngưỡng nghe tùy theo tần số.*

Ta hãy kể ra vài thí dụ về các mức âm cổ điển : đồng hồ báo thức điện tử = 20dB ; căn phòng yên tĩnh = 30dB ; máy rửa bát chạy êm = 50dB ; đường phố náo nhiệt = 75dB ; cháu bé khóc = 80dB ; xe gắn máy (đang tăng tốc) = 90dB ; căng tin trường học = 100dB ; máy tăng âm mở hết cỡ = 105dB ; xe gắn máy đang tăng tốc không có ống giảm thanh = 115dB ; máy bay = 120dB ; công trường máy búa chèn = 130dB ; hộp đêm = 130dB ; tên lửa = 180dB.

Ngưỡng nghe của tai cũng phụ thuộc tần số (*h.*7a), mức âm tối đa là 130dB, ở khoảng 1500Hz.

■ **Vài bậc độ lớn**

Ta hãy khảo sát vài bậc độ lớn : cho một mức âm rất cao, L = 120dB, gây ra bởi một sóng phẳng dạng sin, tần số ν = 1000Hz. Cường độ âm I của nó bằng 1W. m^{-2}. Biết rằng :

$$I = \langle pv \rangle = \frac{1}{2}p_0 v_0 = \frac{1}{2}\rho_o c_s v_0^2 = \frac{1}{2}\frac{p_0^2}{\rho_0 c_s},$$

chúng ta được (với $c_s = 337\text{m.s}^{-1}$ và $\rho_0 = 1{,}28\text{kg.m}^{-3}$) :

$$v_0 = 6{,}9.10^{-2}\text{m.s}^{-1} \ll c_s$$

$$p_0 = 29\text{Pa} \ll P_0 .$$

Chú ý rằng $v_0 = 2\pi\nu\xi_0$ (ξ_0 biểu thị độ dịch chuyển của một lớp chất lỏng), ta được $\xi_0 = 11\mu\text{m} \ll \lambda = \frac{c_s}{\nu} = 33{,}1\text{cm}$.

Cũng như vậy, ta có $\mu_0 = \rho_0 \chi_s p_0 = \frac{p_0}{c_s^2}$, tức là :

$$\mu_0 = 2{,}7.10^{-4}\text{kg.m}^{-3} \ll \rho_0 .$$

Tai là một cái máy dò cộng hưởng.

Hình 7b chỉ ra những miền cường độ âm, có biên độ áp suất dư biến thiên trong miền nghe được, giữa ngưỡng nghe và ngưỡng đau, đối với một tai trung bình cảm thụ những âm lan truyền trong không khí.

	cường độ âm I **(W.m^{-2})**	**biên độ áp suất dư (Pa)**
ngưỡng nghe	10^{-12}	3.10^{-5}
cường độ lớn	10^{-4}	0,3
ngưỡng đau	1	30

H.7b. *Tai nhạy cảm đối với những biến thiên áp suất rất nhỏ.*

■ **Mức âm khi có nhiều nguồn**

Ta xét xem điều gì xảy ra đối với những giá trị khác nhau của N.

Nếu chúng ta đứng trước N xe gắn máy đang tăng tốc thì có điều gì xảy ra ?

Các "nguồn" của ta không phải là nguồn kết hợp (các tiếng động do nhiều xe gắn máy phát ra không đồng pha với nhau : *xem H–Prépa, Quang học sóng, lớp đệ nhị*), cường độ âm do N xe gắn máy phát ra bằng N lần cường độ âm của một xe : $I_N = NI_1$.

Chú ý :

Chú ý rằng số hạng $\chi_s P_0 p$ mà ta đã "quên đi" để định nghĩa mật độ thế năng khối, nghiệm đúng $-\frac{\partial}{\partial t}(\chi_s P_0 p) = P_0 \mathrm{div}(\vec{v})$. Chúng ta nhận thấy rằng áp suất tĩnh không tham gia vào sự truyền sóng âm, nó chỉ tham gia vào một sự cân bằng năng lượng "đầy đủ" dưới dạng hai số hạng giản ước lẫn nhau.

Áp dụng 3

Cân bằng năng lượng địa phương đối với một sóng phẳng

Đối với một sóng phẳng truyền song song với trục (Ox), hãy biểu thị các mật độ động năng, thế năng và năng lượng sóng cũng như vectơ mật độ lưu lượng năng lượng. Hãy kiểm tra lại sự cân bằng năng lượng địa phương trong trường hợp riêng này.

Đối với một sóng phẳng truyền song song với trục (Ox), ta biết rằng vận tốc và áp suất dư có dạng :

$$\vec{v}(x,t) = \left(f\left(t - \frac{x}{c_s}\right) + g\left(t + \frac{x}{c_s}\right)\right)\vec{e}_x \ ;$$

$$p(x,t) = \rho_0 c_s \left(f\left(t - \frac{x}{c_s}\right) - g\left(t + \frac{x}{c_s}\right)\right).$$

Chúng ta có thể biểu thị :

- mật độ động năng khối :

$$e_K = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 = \frac{1}{2}\rho_0 (f^2 + 2fg + g^2) \ ;$$

- mật độ thế năng khối :

$$e_P = \frac{1}{2}\chi_S p^2 = \frac{1}{2}\rho_0 (f^2 - 2fg + g^2) \ ;$$

- mật độ khối của năng lượng sóng :

$$e_s = e_K + e_P = \rho_0 (f^2 + g^2) \ ;$$

- vectơ mật độ mặt của công suất :

$$\vec{\Pi} = p\vec{v} = \Pi \vec{e}_x = \rho_0 c_s (f^2 - g^2)\vec{e}_x .$$

Các sóng "f" và "g" đã bị tách rời. Có thể dễ dàng kiểm tra sự cân bằng năng lượng :

$$\frac{\partial e_s}{\partial t} = 2\rho_0 (ff' + gg') = -\rho_0 c_s \frac{\partial (f^2 - g^2)}{\partial x}$$

$$= -\frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial x} = -\mathrm{div}(\vec{\Pi}).$$

2.3. Cường độ âm

2.3.1. Cường độ âm

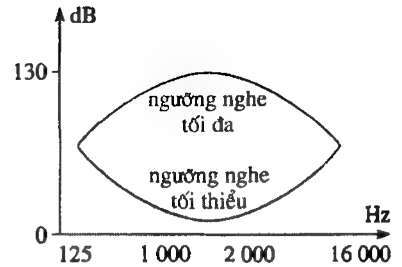
Xét một sóng phẳng chạy loại "f", tức là truyền song song với trục (Ox), theo chiều tăng của x.

Cường độ âm của sóng đó, kí hiệu là I, theo định nghĩa là giá trị của công suất trung bình mà sóng âm truyền tải qua một diện tích đơn vị vuông góc với phương truyền. Đó cũng là thông lượng trung bình của vectơ $\vec{\Pi}$ qua diện tích đó, nghĩa là :

$$I = \langle pv \rangle = \rho_0 c_s \langle v^2 \rangle = \rho_0 c_s \left\langle f^2\left(t - \frac{x}{c_s}\right)\right\rangle.$$

2.3.2. Mức âm

Miền tần số mà tai người tiếp nhận được trải ra khoảng từ 20Hz đến 20kHz. Dải cường độ âm tiếp nhận được là rất rộng. Ngưỡng nghe ứng với một cường độ âm (đối với tai trung bình, với tần số khoảng 1500Hz) $I_0 = 10^{-12}\,\text{W.m}^{-2}$; ngưỡng đau nằm ở 1W. m^{-2}. Như vậy cần dùng một thang lôga để đánh dấu các cường độ âm. Mức âm được xác định bằng đêxiben bởi $L = 10\log\frac{I}{I_0}$ với $I_0 = 10^{-12}\,\text{W. m}^{-2}$.



H.7a. *Các ngưỡng nghe tùy theo tần số.*

Ta hãy kể ra vài thí dụ về các mức âm cổ điển : đồng hồ báo thức điện tử = 20dB ; căn phòng yên tĩnh = 30dB ; máy rửa bát chạy êm = 50dB ; đường phố náo nhiệt = 75dB ; cháu bé khóc = 80dB ; xe gắn máy (đang tăng tốc) = 90dB ; căng tin trường học = 100dB ; máy tăng âm mở hết cỡ = 105dB ; xe gắn máy đang tăng tốc không có ống giảm thanh = 115dB ; máy bay = 120dB ; công trường máy búa chèn = 130dB ; hộp đêm = 130dB ; tên lửa = 180dB.

Ngưỡng nghe của tai cũng phụ thuộc tần số (*h.*7a), mức âm tối đa là 130dB, ở khoảng 1500Hz.

■ **Vài bậc độ lớn**

Ta hãy khảo sát vài bậc độ lớn : cho một mức âm rất cao, $L = 120\text{dB}$, gây ra bởi một sóng phẳng dạng sin, tần số $\nu = 1000\text{Hz}$. Cường độ âm I của nó bằng 1W. m^{-2}. Biết rằng :

$$I = \langle pv \rangle = \frac{1}{2}p_0 v_0 = \frac{1}{2}\rho_o c_s v_0^2 = \frac{1}{2}\frac{p_0^2}{\rho_0 c_s},$$

chúng ta được (với $c_s = 337\text{m.s}^{-1}$ và $\rho_0 = 1{,}28\text{kg.m}^{-3}$) :

$$v_0 = 6{,}9.10^{-2}\,\text{m.s}^{-1} \ll c_s$$

$$p_0 = 29\text{Pa} \ll P_0 .$$

Chú ý rằng $v_0 = 2\pi\nu\xi_0$ (ξ_0 biểu thị độ dịch chuyển của một lớp chất lỏng), ta được $\xi_0 = 11\mu\text{m} \ll \lambda = \frac{c_s}{\nu} = 33{,}1\text{cm}$.

Cũng như vậy, ta có $\mu_0 = \rho_0 \chi_s p_0 = \frac{p_0}{c_s^2}$, tức là :

$$\mu_0 = 2{,}7.10^{-4}\,\text{kg.m}^{-3} \ll \rho_0 .$$

Tai là một cái máy dò cộng hưởng.

Hình 7b chỉ ra những miền cường độ âm, có biên độ áp suất dư biến thiên trong miền nghe được, giữa ngưỡng nghe và ngưỡng đau, đối với một tai trung bình cảm thụ những âm lan truyền trong không khí.

	cường độ âm I (W.m^{-2})	biên độ áp suất dư (Pa)
ngưỡng nghe	10^{-12}	3.10^{-5}
cường độ lớn	10^{-4}	0,3
ngưỡng đau	1	30

H.7b. *Tai nhậy cảm đối với những biến thiên áp suất rất nhỏ.*

■ **Mức âm khi có nhiều nguồn**

Ta xét xem điều gì xảy ra đối với những giá trị khác nhau của N.

Nếu chúng ta đứng trước N xe gắn máy đang tăng tốc thì có điều gì xảy ra ?

Các "nguồn" của ta không phải là nguồn kết hợp (các tiếng động do nhiều xe gắn máy phát ra không đồng pha với nhau : *xem H–Prépa, Quang học sóng, lớp đệ nhị*), cường độ âm do N xe gắn máy phát ra bằng N lần cường độ âm của một xe : $I_N = NI_1$.

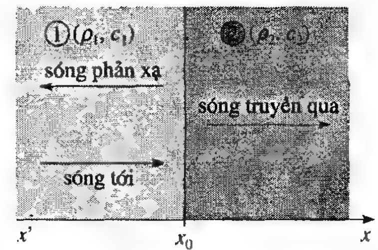
Đặt $L_N = 10\log\frac{I_N}{I_0} = 10\log\frac{I_1}{I_0} + 10\log N = 90\text{dB} + 10\log N$.

Như vậy, ta có : $L_2 = 90 + 10\log 2 = 93$ dB ;
$L_4 = 90 + 10\log 4 = 96$ dB ;
$L_8 = 90 + 10\log 8 = 99$ dB ; ...

$L_{30} = 90 + 15 = 105$ dB : mức âm của một máy tăng âm mở hết cỡ tương đương mức âm của 30 xe gắn máy bình thường !

$L_{300} = 90 + 25 = 115$ dB : mức âm của một xe gắn máy không có ống giảm thanh bằng mức âm của 300 xe gắn máy bình thường !

$L_{10^4} = 90 + 40 = 130$ dB : mức âm trong một hộp đêm tương ứng mức âm của 10 000 xe gắn máy đang tăng tốc !



H.8. *Sự phản xạ và sự truyền qua trong sự tới vuông góc, của một sóng âm ở giao diện phân cách hai môi trường.*

3 Sự phản xạ và sự truyền qua của các sóng âm

Chúng ta hãy xét các sóng phẳng lan truyền trong các ống dẫn có tiết diện không đổi.

3.1. Điều kiện biên

Ta khảo sát sự phản xạ của một sóng phẳng tại giao diện phân cách hai chất lưu. Chúng ta sẽ chỉ giới hạn ở trường hợp sự tới vuông góc : sóng tới truyền vuông góc với mặt phẳng phân cách môi trường ① (mật độ khối lượng ρ_1 và vận tốc truyền c_1) và môi trường ② (mật độ khối lượng ρ_2 và vận tốc truyền c_2) (*h*.8).

Sóng tới $f_1\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$ làm phát sinh một sóng phản xạ $g_1\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$ và một sóng truyền qua $f_2\left(t - \frac{x}{c_2}\right)$. Có thể xác định được chúng bằng cách chỉ rõ những điều kiện biên mà các vận tốc và các áp suất dư của các sóng đó nghiệm đúng trên giao diện.

• Với cách kí hiệu $Z_{c_1} = \rho_1 c_1$ và $Z_{c_2} = \rho_2 c_2$, ta đặt :

$$v_1(x,t) = f_1(x,t) + g_1(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + g_1\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$$

và $$p_1(x,t) = Z_{c_1}[f_1(x,t) - g_1(x,t)] = Z_{c_1}\left[f_1\left(t - \frac{x}{c_1}\right) - g_1\left(t + \frac{x}{c_1}\right)\right] ;$$

$$v_2(x,t) = f_2(x,t) = f_2\left(t - \frac{x}{c_2}\right)$$

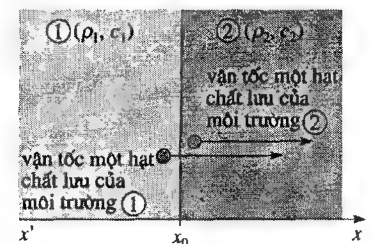
và $$p_2(x,t) = Z_{c_2} f_2(x,t) = Z_{c_2} f_2\left(t - \frac{x}{c_2}\right).$$

3.1.1. Tính liên tục của vận tốc

Theo định nghĩa giao diện thì các độ dịch chuyển cũng như các vận tốc của các chất lưu vuông góc với giao diện là như nhau (*h*.9) :

$$v_{1x}(x_0,t) = v_{2x}(x_0,t),$$

tức là $f_1(x_0,t) + g_1(x_0,t) = f_2(x_0,t)$.

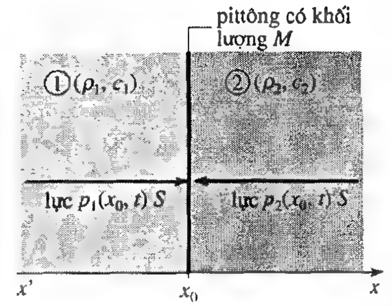


H.9. *Trong trường hợp ống dẫn có tiết diện không đổi, vận tốc các hạt chất lưu của hai môi trường ① và ② là như nhau ở lân cận mặt phẳng $x = x_0$, tức là cũng ở x_0.*

<u>*Chú ý :*</u>

• *Không thể viết được đẳng thức này một cách tiên nghiệm tại $x = x_0$ vì giao diện chuyển động. Tuy nhiên ta biết rằng chuyển động này là vô cùng nhỏ so với bước sóng đặc trưng cho những biến thiên của các hàm f và g. Do đó đẳng thức ở trên vẫn là thích hợp.*

• *Trong trường hợp các sóng âm phẳng truyền trong các ống dẫn có tiết diện biến đổi, chúng ta sẽ thấy ở Áp dụng 5 rằng các hiện tượng phản xạ và truyền qua khi đó được khảo sát bằng cách sử dụng tính liên tục của lưu lượng khối, điều đó làm cho vận tốc của chất lưu và tiết diện của ống dẫn cùng tham dự vào phép tính toán.*



H.10. *Pittông có khối lượng M chịu tác dụng của các áp lực mà hợp lực là* $[p_1(x_0,t) - p_2(x_0,t)]S\vec{e}_x$.

3.1.2. Tính liên tục của áp suất

Xét một pittông có khối lượng M, tiết diện S và độ dày không đáng kể, đặt ở ngang mức của giao diện (h.10). Nó chịu các áp suất dư p_1 và p_2, chuyển động của nó được mô tả bởi phương trình :

$$Ma(t) = S[p_1(x_0,t) - p_2(x_0,t)].$$

Khi khối lượng M của pittông dần tới số không, ta thu được tính liên tục của áp suất, vì gia tốc của nó là hữu hạn (đó là gia tốc của các chất lưu ở ngang mức của giao diện) :

$$p_1(x_0,t) = p_2(x_0,t),$$

tức là $$\rho_1 c_1[f_1(x_0,t) - g_1(x_0,t)] = \rho_2 c_2 f_2(x_0,t).$$

3.2. Hệ số phản xạ và hệ số truyền qua của các sóng âm

3.2.1. Hệ số phản xạ và hệ số truyền qua về biên độ

Hệ số phản xạ (truyền qua) là tỉ số giữa biên độ của sóng phản xạ (truyền qua) và biên độ sóng tới *ở ngang mức giao diện.*

Các điều kiện biên được diễn đạt bởi :

$$f_1(x_0,t) + g_1(x_0,t) = f_2(x_0,t)$$

và $$\rho_1 c_1[f_1(x_0,t) - g_1(x_0,t)] = \rho_2 c_2 f_2(x_0,t),$$

chúng ta rút ra từ đó các hệ số phản xạ về vận tốc $r_{12(v)}$ và về áp suất dư $r_{12(p)}$:

$$r_{12(v)} = \frac{g_1\left(t + \frac{x_0}{c_1}\right)}{f_1\left(t - \frac{x_0}{c_1}\right)} = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} = r_{12(p)}$$

và các hệ số truyền qua $\tau_{12(v)}$ và $\tau_{12(p)}$:

$$\tau_{12(v)} = \frac{f_2\left(t - \frac{x_0}{c_2}\right)}{f_1\left(t - \frac{x_0}{c_1}\right)} = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}\tau_{12(p)}.$$

3.2.2. Hệ số phản xạ và hệ số truyền qua về năng lượng

Hệ số phản xạ về năng lượng R là tỉ số (về giá trị tuyệt đối) giữa công suất phản xạ và công suất tới ở giao diện. Hệ số truyền qua về năng lượng T là

tỉ số (về giá trị tuyệt đối) giữa công suất truyền qua và công suất tới ở giao diện :

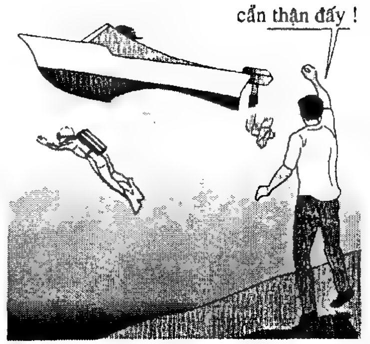
$$R = \left|\frac{\vec{\Pi}_{r}.\vec{e}_x S_r}{\vec{\Pi}_{i}.\vec{e}_x S_i}\right| \quad \text{và} \quad T = \left|\frac{\vec{\Pi}_{t}.\vec{e}_x S_t}{\vec{\Pi}_{i}.\vec{e}_x S_i}\right|$$

với $\vec{\Pi}_{i} = \rho_1 c_1 f_1^2(x_0, t)\vec{e}_x$,

$$\vec{\Pi}_{r} = -\rho_1 c_1 g_1^2(x_0, t)\vec{e}_x \quad \text{và} \quad \vec{\Pi}_{t} = \rho_2 c_2 f_2^2(x_0, t)\vec{e}_x .$$

Vậy ta được (trong trường hợp này, $S_i = S_r = S_t$) :

$$\begin{cases} R = \left|r_{12(v)} r_{12(p)}\right| = \left(\dfrac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}\right)^2 \\ T = \left|\tau_{12(v)} \tau_{12(p)}\right| = \dfrac{4\rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2} = 1 - R \end{cases}$$



H.11. *Người đang lặn nghe thấy những nhiễu loạn do cánh quạt của xuồng máy gây ra rõ hơn người du khách đứng trên bờ.*

Chú ý :

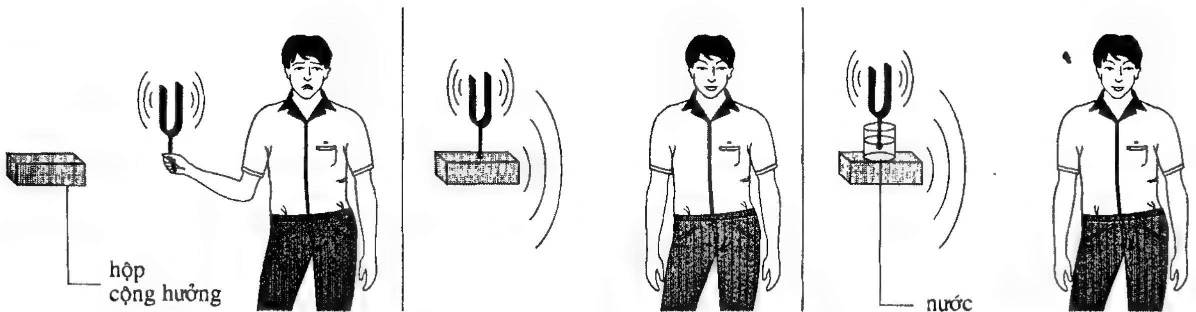
Sự khó khăn gắn với những hệ số phản xạ và truyền qua về biên độ phức, đã nêu lên ở chương 3, không xuất hiện ở đây trong chừng mực mà các hệ số r và τ là thực.

Thí dụ, ta xét một giao diện chất lỏng - chất khí. Khi đó ta được $R \approx 1$ và $T \ll 1$. Sự truyền qua của sóng âm giữa chất lỏng và chất khí là rất kém hiệu quả. Thí dụ, một người đang lặn nghe rõ ràng tiếng cánh quạt của một chiếc xuồng máy đang quay trong nước, nhưng một người đứng trên bờ nghe khó hơn nhiều (*h.*11).

Chúng ta có thể mở rộng kết quả này cho sự phản xạ hầu như hoàn toàn trong trường hợp một giao diện chất rắn - chất khí. Khi hình học của vật rắn phản xạ cũng tham gia vào, chúng ta có một hiện tượng tiếng vang. Ngược lại, sự phản xạ có thể bị giảm rất mạnh khi ta dùng một "vật rắn" rất mềm và rất nhẹ : chất bần, chất mút.

Một cách tổng quát hơn, ta có được một sự cách âm tốt bằng cách xếp tiếp nối nhau một vật liệu nặng và cứng : bêtông, ... với một vật liệu nhẹ và mềm : bần, pôlime xốp (không khí bị giam trong lòng các vật liệu này).

Chúng ta có thể thực hiện vài thao tác đơn giản vẽ trên *hình 12*, với một âm thoa bằng kim loại, để minh họa các kết luận mà ta đã phát biểu.



H.12. *Vài thí nghiệm về sự truyền qua của sóng âm, thực hiện bằng một âm thoa.*

• Cái âm thoa được kích thích bởi một va chạm ban đầu, trước hết được cầm trong không khí. Rất khó nghe thấy âm do âm thoa phát ra, nó vô cùng yếu, ngay cả khi âm thoa được đặt ở gần hộp cộng hưởng.

Sự truyền qua của sóng âm giữa một chất rắn và một chất khí là rất kém hiệu quả.

• Nếu âm thoa được nối với hộp cộng hưởng của nó (xem *Áp dụng 5*), âm nghe được hoàn toàn rõ. Các dao động của nó được truyền cho hộp cộng hưởng, và hộp lại truyền cho không khí.

Sự truyền qua của sóng âm giữa hai chất rắn là có hiệu quả.

• Bây giờ ta đặt một bình đầy nước lên trên hộp cộng hưởng. Nếu giao thoa được cho tiếp xúc với nước, âm lại nghe thấy được. Như vậy sự truyền qua của các dao động là có hiệu quả trong trường hợp sự tiếp xúc chất nước - chất rắn.

Sự truyền qua của sóng âm giữa một chất rắn và một chất lỏng là có hiệu quả.

Chú ý :

Khi âm thoa được đặt trên hộp cộng hưởng của nó, âm nghe càng rõ hơn, vì có một hiện tượng cộng hưởng ! Chiều dài của hộp bằng $\frac{\lambda}{4}$, λ ứng với bước sóng của sóng âm do âm thoa phát ra. Có một hiện tượng sóng đứng trong hộp. Chiếc hộp cộng hưởng có một hệ số phẩm chất Q cao. Biên độ các dao động "đi ra" khỏi hộp xấp xỉ bằng Q lần biên độ các dao động "đi vào" hộp (xem §**4.2**, *hình* 18*).*

Áp dụng 4

Sự phản xạ và truyền qua của các sóng âm ở ngang mức chỗ nối của hai ống dẫn

*Ta khảo sát sự phản xạ và sự truyền qua của các sóng âm phẳng ở ngang mức chỗ nối của hai ống dẫn có tiết diện S_1 và S_2 (h.*13a *và* b*).*

1) *Chứng tỏ rằng có sự liên tục áp suất tại $x = x_0$:*

$$p_1(x_0,t) = p_2(x_0,t).$$

2) *Chứng tỏ rằng có sự liên tục lưu lượng khối ở ngang mức chỗ nối :*

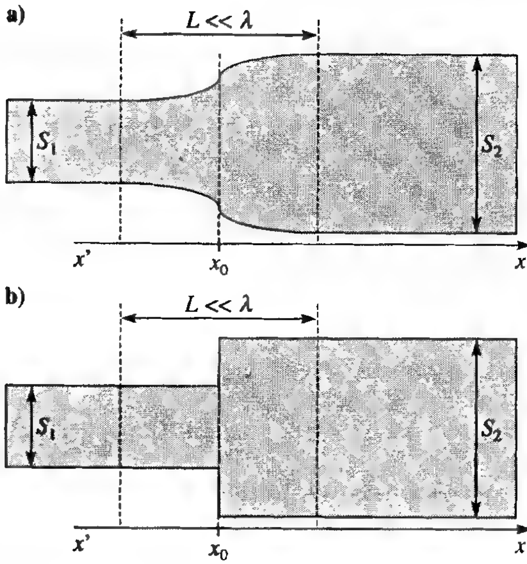
$$D_{V_1}(x_0,t) = S_1 v_1(x_0,t) = D_{V_2}(x_0,t) = S_2 v_2(x_0,t).$$

Cho biết : *trở kháng âm của một ống dẫn có tiết diện S được xác định bởi tỉ số $Z = \frac{\rho_0 c_s}{S}$.*

3) *Thiết lập biểu thức các hệ số phản xạ và truyền qua về biên độ (đối với lưu lượng khối và áp suất dư) tùy theo các trở kháng âm của các ống dẫn nối với nhau.*

4) *Từ đó rút ra các hệ số phản xạ và truyền qua về năng lượng.*

5) *Giản ước các biểu thức thu được khi các ống dẫn chứa cùng một chất lưu, và chỉ khác nhau do tiết diện của chúng. Bình luận các trường hợp giới hạn $S_2 = \infty$ và $S_2 = 0$ bằng cách chỉ ra các tương tự điện của chúng.*



H.13a. *Sự ghép nối hai ống dẫn. Trường hợp thực.*

H.13b. *Sự ghép nối hai ống dẫn : sự mô hình hóa.*

1) Như đã biết ở §**3.1.2**, nếu ta áp dụng nguyên lí cơ bản của động lực học cho một pittông khối lượng bằng không, ta thu được sự bằng nhau của các áp suất ở hai bên pittông. Vậy ta có sự liên tục của áp suất tại $x = x_0$:

$$p_1(x_0,t) = p_2(x_0,t).$$

2) Độ dài L của nhiễu loạn là nhỏ so với bước sóng λ, như vậy có thể bỏ qua những biến đổi khối lượng của một lớp chất lưu chuyển động dựa vào nhiễu loạn đó. Ta có sự liên tục của lưu lượng khối ở ngang mức chỗ ghép nối :

$$D_{V_1}(x_0,t) = S_1 v_1(x_0,t) = D_{V_2}(x_0,t) = S_2 v_2(x_0,t).$$

3) Các điều kiện biên được viết thành :

$$D_{V_1}(x_0,t) = D_{V_2}(x_0,t)$$

và $p_1(x_0,t) = p_2(x_0,t)$,

ta có ngay :

$$r_{12(D_V)} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = -r_{12(p)}$$

$$\tau_{12(D_V)} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_1}{Z_2}\tau_{12(p)}.$$

Chú ý rằng các hệ số này là thực.

4) Thông lượng năng lượng gắn với sóng âm đi qua ống dẫn là $P = S\Pi = pSv = pD_V$.

Vậy ta có :

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \text{ và } T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}.$$

Ta kiểm tra được rằng $R + T = 1$.

5) Trong trường hợp $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{S_2}{S_1}$, ta được :

$$\begin{cases} r_{12(D_V)} = \dfrac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1} = -r_{12(p)} \\ \tau_{12(D_V)} = \dfrac{2S_2}{S_2 + S_1} = \dfrac{S_2}{S_1}\tau_{12(p)} \end{cases}$$

và
$$\begin{cases} R = \left(\dfrac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1}\right)^2 \\ T = \dfrac{4S_1S_2}{(S_2 + S_1)^2} \end{cases}.$$

• Nếu $S_2 = \infty$: $r_{12(D_V)} = +1 = -r_{12(p)}$.

Đầu ống 1 ứng với một nút áp suất dư. Trở kháng Z_2 bằng không, tương tự như trường hợp một đường dây điện bị đóng trên một đoản mạch.

• Nếu $S_2 = 0$: $r_{12(D_V)} = -1 = -r_{12(p)}$.

Đầu ống 1 ứng với một nút lưu lượng. Trở kháng Z_2 là vô cùng, tương tự trường hợp một đường dây điện mở ở đầu.

Hai trường hợp này ứng với những trở kháng đầu cuối lí tưởng.

Chú ý rằng nếu $S_2 \gg S_1$, ta sẽ có một hệ số truyền qua $T \ll 1$. Miệng một diễn giả nói vào không khí tự do không tạo được một trường hợp thích ứng trở kháng đặc biệt tốt ! Khi đó ta có thể dùng một cái loa, có tiết diện loe rộng ra, để làm cho tiết diện chuyển dần sang một giá trị lớn (sự phát ra âm cũng được định hướng hơn) điều đó đòi hỏi phải mất sức ít hơn hẳn để làm người khác nghe được (*h.*14).



H.14. *Không có cái loa thì diễn giả không làm cho người khác nghe được mình.*

Chiếc loa miệng loe gắn vào một cái máy hát (*h.*15) là một trường hợp đặc sắc về sự thích ứng từng bước của trở kháng.

Bao giờ ta cũng phải ngạc nhiên khi nhận thấy độ lớn của mức cường độ âm của chiếc máy như vậy. Máy này không có tăng âm như những dàn Hi-Fi, trong khi nguồn dao động chỉ là một cái đầu kim, nó rung lên khi cọ sát vào những rãnh của đĩa hát, và truyền thông tin đó cho một cái màng đặt ở miệng dưới của cái loa.

Các nhạc cụ hơi (kèn trompet, kèn trombon, ...) cũng được trang bị một cái loa miệng loe.



H.15. *Máy hát.* ▶

▶ **Để luyện tập : bài tập 3 và 5.**

4 Sóng âm dừng

Ở *chương* 2, ta đã quan sát một số mặt của hiện tượng sóng dừng. Ở đây ta sẽ nhắc lại vài kết quả, và nếu cần sẽ nêu lên vài đặc điểm ứng với trường hợp các sóng âm.

4.1. Tạo sóng dừng bằng sự phản xạ của một SPCĐS

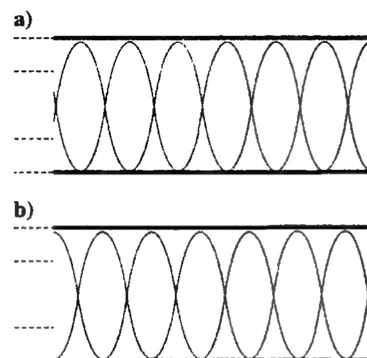
Chúng ta biết rằng sự phản xạ của một SPCĐS trên một đầu cuối lí tưởng dẫn đến sự tạo thành các sóng dừng mà các nút và các bụng xen kẽ nhau và cách nhau $\frac{\lambda}{4}$ (hai nút hoặc hai bụng liên tiếp thì cách nhau $\frac{\lambda}{2}$).

Trong thực tế, để tạo ra một sự truyền thẳng của các sóng âm (hầu như) phẳng, ta thường phải giam chúng trong một ống dẫn mà ta chọn có tiết diện không đổi, để sự khảo sát được đơn giản.

Các trở kháng âm đầu cuối Z lí tưởng mà ta có thể thực hiện được dễ dàng ứng với (xem *Áp dụng 4*) :

- $Z = 0$: một ống có đầu ống mở vào không khí tự do (nút áp suất dư) ;
- $Z = +\infty$: một ống có đầu ống đóng kín (nút lưu lượng).

Các sóng dừng được tạo thành trong các ống dẫn đó được sơ đồ hóa trên *hình 16*.

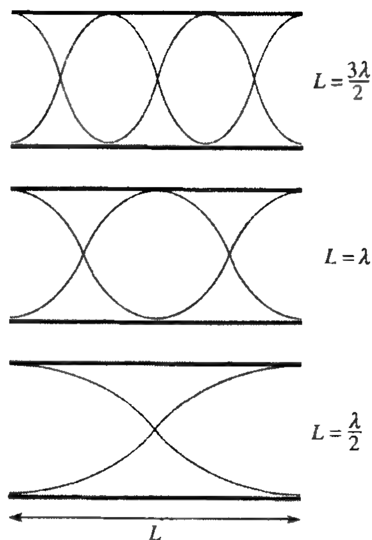


H.16. *Sự phản xạ của một SPCĐS ở đầu ống dẫn – nút và bụng lưu lượng.*
a. *Đầu mở* ($Z = 0$).
b. *Đầu đóng* ($Z = +\infty$).

4.2. Các kiểu dao động riêng của một cái hốc

Chúng ta cũng biết rằng sóng dừng có thể xuất hiện khi ta khảo sát dao động của một hệ có hai điều kiện biên. Ở *chương 2*, chúng ta đã biết rằng dao động tự do của một sợi dây rung có độ dài L, cố định ở hai đầu, có thể được khai triển thành một chuỗi các họa ba mà các tần số là bội nguyên của tần số $\nu = \frac{c}{2L}$ của kiểu dao động cơ bản.

Trong trường hợp một ống dẫn có tiết diện không đổi, ta có thể xét nhiều trường hợp.



H.17. *Nút và bụng lưu lượng của các họa ba 1, 2 và 3 của một ống dẫn mở.*

4.2.1. Hai đầu ống cùng loại

■ **Hai đầu ống bịt kín (các thành cố định)**

Trường hợp này là cái tương tự của một sợi dây dao động giữ cố định ở hai đầu. Các nút lưu lượng từng đôi một cách nhau $\frac{\lambda}{2}$, và có một nút ở mỗi đầu của ống dẫn có độ dài L, do đó $L = n\frac{\lambda}{2} = n\frac{c}{2\nu}$ là điều kiện lượng tử hóa áp đặt bởi những điều kiện biên.

Dao động tự do của chất khí trong ống dẫn được khai triển thành một chuỗi các họa ba có tần số :

$$\nu_1 = \frac{c}{2L}, \ \nu_2 = 2\nu_1, \ldots \ \nu_n = n\nu_1, \ldots$$

■ **Hai đầu ống tự do**

Chỉ cần hoán vị các nút (và các bụng) áp suất và lưu lượng so với trường hợp trên, điều đó không thay đổi điều kiện lượng tử hóa các tần số.

Ta thấy rằng các kiểu dao động riêng của một ống dẫn có hai đầu giống nhau ứng với các tần số là bội nguyên của tần số cơ bản $\frac{c}{2L}$ (*h.*17).

4.2.2. Hai đầu ống khác loại

Nói cách khác, một đầu ống tự do, đầu kia đóng.

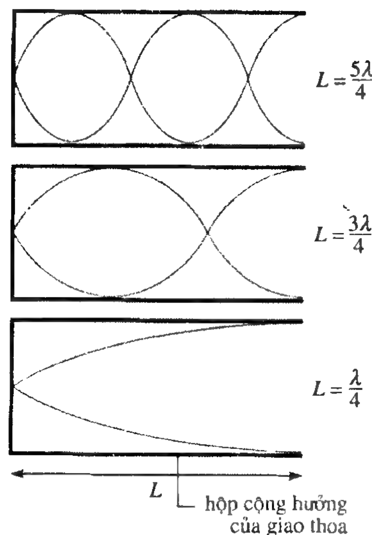
Các nút và bụng lưu lượng (hoặc áp suất dư) từng đôi một cách nhau $\frac{\lambda}{4}$. Có một bụng ở một đầu, một nút ở đầu kia. Điều kiện lượng tử hóa trở thành :

$$L = n\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{c}{2\nu}.$$

Các họa ba có mặt trong chuỗi FOURIER của các dao động tự do của chất khí có tần số bằng :

$$\nu'_1 = \frac{c}{4L}, \ \nu'_2 = 3\nu'_1, \ \nu'_3 = 5\nu'_1, \ldots, \ \nu'_n = (2n-1)\nu'_1, \ldots$$

Ta nhận thấy rằng các kiểu dao động riêng của ống có hai đầu khác loại ứng với các tần số là bội nguyên của tần số cơ bản $\frac{c}{4L}$ (*h.*18).



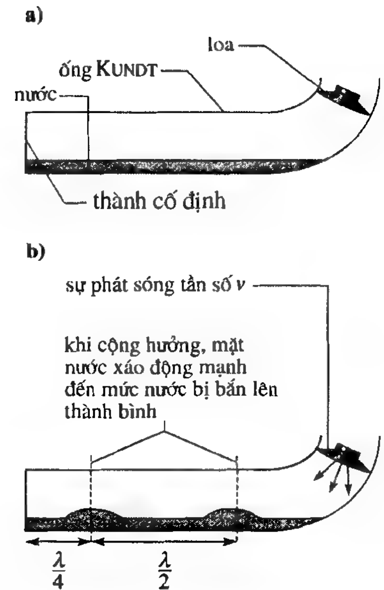
H.18. *Nút và bụng lưu lượng của các họa ba 1, 3 và 5 của một ống nửa đóng.*

4.3. Những cái hốc cộng hưởng

Ta biết rằng một hệ bắt đầu cộng hưởng khi nó được kích thích ở một tần số gần với một tần số riêng của nó. Ta đã nhận thấy điều đó ở *chương 1*, khi quan sát đáp ứng của một tập hợp các khối lượng liên kết bởi các lò xo, và ở *chương 2* khi giải thích những cộng hưởng của sợi dây MELDE.

Khi chịu một kích thích bất kì (thí dụ, một phổ liên tục và rộng) một hệ cộng hưởng giữ vai trò một bộ lọc, nó chọn ra những tần số gần với các tần số riêng của nó.

Như vậy một ống dẫn có thể dùng làm một bộ lọc cộng hưởng : ta nghe thấy ống đó phát ra một âm mà phép phân tích phổ làm lộ rõ những tần số riêng của bộ cộng hưởng đó.



H.19. *Ống* KUNDT.
a. *Lúc nghỉ.*
b. *Lúc cộng hưởng.*

4.3.1. Thí nghiệm : ống KUNDT

Có thể "hiển thị" các sóng âm dừng trong một ống dẫn (thường làm bằng thủy tinh, nên trong suốt) có tiết diện không đổi, gọi là "ống KUNDT".

Không khí chứa trong ống có tiết diện không đổi đó được kích thích ở tần số ν nhờ một cái loa đặt ở một đầu ống, và ta tìm cách dò ra sự bắt đầu cộng hưởng của không khí (*h.*19).

■ **Khảo sát định tính**

Có thể đặt một lớp nước mỏng (khoảng 5mm) ở đáy ống (tiết diện tròn, đường kính khoảng 8 cm) đặt nằm ngang. Xuất phát từ ν = 0, ta tăng dần tần số.

• Tai ta nghe thấy những cực đại cường độ do ống phát ra ; các cực đại đó ứng với các lần không khí trong ống lần lượt bắt đầu cộng hưởng.

• Ở từng chỗ, mực nước thay đổi khi ta tiến đến gần cộng hưởng. Trong hai cộng hưởng đầu tiên, mực nước rất bị xáo động, đến mức bắn lên khắp thành ống ở từng chỗ (*h.*19).

Những chỗ mà mực nước bị xáo động mạnh ứng với các bụng dao động của vận tốc.

■ **Khảo sát định lượng**

• **Dụng cụ**

Một cái micrô (*h.*20) cho phép khảo sát định lượng trạng thái dao động của cái hốc. Cái micrô đó có thể nhậy hoặc với vận tốc, hoặc với áp suất dư. Kích thước của nó là nhỏ để không làm nhiễu loạn trạng thái dao động của cái hốc.

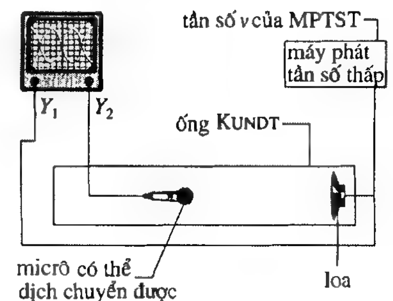
• **Cách vận hành**

Với một vị trí đã cho của micrô, phải thu được một cực đại của tín hiệu bằng cách thay đổi tần số. Nếu không đạt được cực đại đó, có thể là micrô đã nằm ở một nút.

Khi đã đạt được cực đại của tín hiệu, chúng ta đang đứng trước hiện tượng cộng hưởng : như vậy trong ống KUNDT có các sóng dừng.

Bằng cách di chuyển cái micrô, chúng ta hiển thị các bụng và các nút dao động hầu như bằng không, nếu cộng hưởng là hoàn hảo.

Khoảng cách giữa hai bụng (hoặc hai nút) liên tiếp bằng $\frac{\lambda}{2}$.



H.20. *Ống* KUNDT *: đo vận tốc âm trong không khí.*

• **Phép đo**

Khoảng cách d giữa $(n+1)$ nút liên tiếp (xác định vị trí các cực tiểu gần bằng không thì dễ hơn vị trí các cực đại) cho phép ta tính được bước sóng $\lambda = 2\frac{d}{n}$.

Biết tần số ν, vận tốc truyền âm trong không khí là $c = \frac{\lambda}{\nu}$.

Phép đo này có thể thực hiện được với các siêu âm ; vận tốc âm luôn luôn giữ nguyên một giá trị.

Áp dụng 5

Độ dài hộp cộng hưởng của một âm thoa

Sự phân tích sóng hài của âm phát ra bởi một âm thoa đặt trên hộp cộng hưởng của nó (h.12 và 18) chứa đựng chủ yếu một hợp ba có tần số $\nu = 440$Hz (đó là một nốt la).

Hộp cộng hưởng là một hình hộp rỗng mà kích thước lớn nhất là 19,5cm ; một đầu đóng kín, đầu kia mở.

Giải thích thế nào sự lựa chọn kích thước đó ?

Một đầu hộp bịt kín, đầu kia tự do. Kiểu dao động cơ bản của các sóng âm phẳng truyền theo phương của các cạnh có kích thước lớn nhất, có một tần số bằng :

$$\nu'_1 = \frac{c_s}{4L}.$$

Đối với $c_s = 340\text{m.s}^{-1}$ (vận tốc âm trong không khí của khí quyển ở 20°C) và $L = 19{,}5$cm, ta có $\nu'_1 = 436$ Hz, rất gần với tần số của âm phát ra, mà tần số được xác định bởi những dao động của âm thoa. Cái hộp của âm thoa đúng là một hộp cộng hưởng. Trạng thái dao động của không khí trong hộp có dáng vẻ cho trên *hình 18*, đối với họa ba thứ nhất :

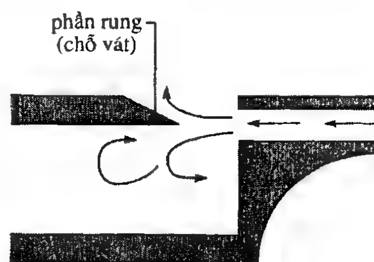
$$L = \frac{\lambda}{4}.$$

4.3.2. Ứng dụng cho các nhạc cụ hơi

Ta có thể sử dụng những kết quả trên để giải thích một cách sơ lược sự hoạt động của các nhạc cụ gọi là "nhạc cụ hơi".

Người nhạc sĩ thổi vào nhạc cụ tạo ra những dao động ở một trong hai đầu của ống cộng hưởng của nhạc cụ. Nhiều kĩ thuật khác nhau cho phép tạo ra ở đầu ống một bộ phận rung, nó duy trì những dao động riêng của cột khí chứa trong thân nhạc cụ.

• Đối với các nhạc cụ có đầu sáo, dòng chảy xáo động của không khí ở hai bên chỗ vát (*h.*21) gây ra sự tách tuần hoàn các dòng xoáy của không khí, tạo thành những dao động kích thích mà cái hốc cộng hưởng (cái ống của nhạc cụ) lọc ra. Lỗ hở ở ngang mức chỗ vát là khá lớn, đầu đó của cái ống gần đúng như một đầu tự do.



H.21. *Nhạc cụ có đầu sáo.*

• Các nhạc cụ khác có một cái lưỡi gà (kèn ôboa, kèn clarinet, ...) mà người thổi kèn làm rung lên. Trong các nhạc cụ khác nữa (kèn clerông, kèn co, ...) thì môi của người nhạc sĩ dao động. Đầu kích thích khi đó được coi như một đầu bị đóng.

Đầu kia của các nhạc cụ hơi thường là mở, chúng ta coi nó như một đầu tự do.

Trong điều kiện đó, âm do các nhạc cụ có đầu sáo phát ra bao gồm các tần số :

$$\nu_1 = \frac{c}{2L}, \ \nu_2 = 2\nu_1, \ \nu_3 = 3\nu_1, \dots \ \nu_n = n\nu_1, \dots$$

trong khi đó thì một nhạc cụ có lưỡi gà chỉ tạo ra các họa ba lẻ :

$$\nu'_1 = \frac{c}{4L}, \ \nu'_2 = 3\nu'_1, \ \nu'_3 = 5\nu'_1, \dots \ \nu'_n = (2n-1)\nu'_1, \dots$$

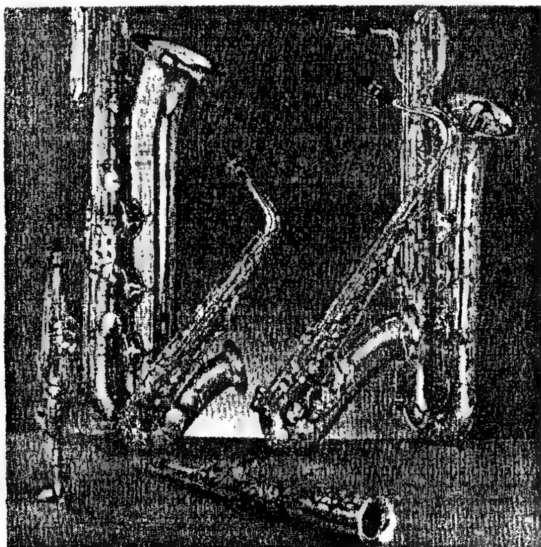
Các âm sắc (sự phân bố các họa ba) của hai loại nhạc cụ này là rất khác nhau.

<u>Chú ý</u> :

Các âm sắc cũng phụ thuộc nhiều tham số khác nữa mà sự khảo sát sơ đẳng của ta (sóng phẳng, tiết diện không đổi, sự mô hình hóa các đầu, ...) còn chưa thể bao quát được.

Chúng ta hãy ghi nhận rằng âm cơ bản càng trầm (tần số càng nhỏ) khi độ dài L càng lớn : chiếc sáo nhỏ và chiếc kèn tuba đúng là không tấu lên cùng một nốt nhạc ! Chúng ta cũng nhận xét rằng đối với cùng một loại nhạc cụ như chiếc kèn xăcxô thì thứ tự baritôn, ... xôpranô, đi từ các nốt nhạc trầm nhất đến các nốt cao nhất thực sự ứng với một sự tiến triển từ chiếc kèn dài nhất đến chiếc ngắn nhất (*h*.22). Cuối cùng, đối với cùng một nhạc cụ, âm phát ra có thể làm cho cao hơn bằng cách làm ngắn bớt chiều dài của ống, tức là bằng cách mở ra một vài cái lỗ.

Chú ý rằng vận tốc âm cũng tham dự vào biểu thức của tần số do các nhạc cụ phát ra, nó nhạy cảm đối với nhiệt độ của không khí.



◀ **H.22.** *Các kèn xăcxô trong bộ sưu tập* SELMER.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ SỰ LAN TRUYỀN CÁC SÓNG ÂM

Sóng âm là những dao động nhỏ của môi trường trong đó sóng truyền với vận tốc c_S. Sự truyền âm trong một chất lưu có thể được khảo sát bằng cách coi rằng chất lưu thực hiện những chuyển động nhỏ đẳng entrôpi.

• *Phương trình liên kết - Phương trình lan truyền*

Những phương trình tuyến tính hóa mô tả biến thiên của một chất lưu có các sóng âm chạy qua (sự biến thiên là entrôpi) là :

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 & \text{(bảo toàn khối lượng)} \\ \rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} p & \text{(phương trình chuyển động)} \\ \mu = \rho_0 \chi_S p & \text{(đẳng entrôpi)} \end{array}\right.$$

Sự lan truyền sóng âm trong một chất lưu tuân theo một hệ phương trình liên kết gắn vận tốc với áp suất dư của chất lưu :

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial t} = -\dfrac{1}{\chi_S} \operatorname{div}(\vec{v}) \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho_0} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p \end{array}\right.$$

Sự lan truyền sóng âm trong một chất lưu được mô tả bởi phương trình lan truyền (ba chiều) d'ALEMBERT, phương trình đó được nghiệm đúng bởi thế vận tốc, trường vận tốc và trường áp suất dư :

$$\Delta \phi - \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 ; \quad \Delta \vec{v} - \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \vec{0} ; \quad \Delta p - \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 .$$

Vận tốc đặc trưng của sự truyền sóng được biểu đạt theo các đặc trưng của chất lưu bởi :

$$c_S = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S} .$$

■ SỰ TRUYỀN TẢI NĂNG LƯỢNG GẮN VỚI MỘT SÓNG ÂM

• Mật độ khối của năng lượng một sóng âm là $e_s = e_K + e_P$, trong đó $e_K = \frac{1}{2} \rho_0 v^2$ và $e_P = \frac{1}{2} \chi_S p^2$ là mật độ khối của động năng và thế năng gắn với sóng.

• Sự cân bằng năng lượng địa phương gắn với một sóng âm được viết thành :

$$\operatorname{div}(\vec{\Pi}) + \frac{\partial e_s}{\partial t} = 0 ,$$

trong đó vectơ mật độ mặt của công suất là $\vec{\Pi} = p\vec{v}$.

■ SỰ PHẢN XẠ VÀ TRUYỀN QUA CỦA CÁC SÓNG ÂM

Khi thay đổi môi trường lan truyền, một sóng âm tới làm phát sinh một sóng truyền qua và một sóng phản xạ. Có thể xác định các sóng này bằng cách biểu đạt những điều kiện biên ở giao diện của hai môi trường : sự liên tục của áp suất dư âm học, sự liên tục của vận tốc pháp tuyến đối với giao diện (hay của lưu lượng khối trong trường hợp các ống dẫn có tiết diện khác nhau).

■ SÓNG ÂM DỪNG

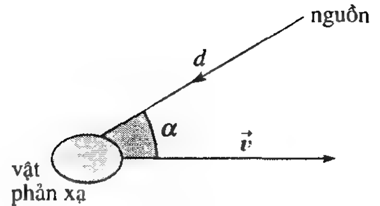
Sự phản xạ của một sóng âm lan truyền trong một ống dẫn giới hạn bởi một đầu cuối lí tưởng gây ra sự hình thành một sóng dừng. Nếu ống dẫn có hai đầu lí tưởng, nó có tính chất như một cái hốc cộng hưởng, trong hốc đó các kiểu dao động riêng của chất lưu là những sóng âm duy nhất tương thích với hai điều kiện biên tương ứng. Đặc điểm này là cơ sở của sự thiết kế các nhạc cụ hơi.

Bài tập giải sẵn

Phép đo lưu lượng máu nhờ hiệu ứng DOPPLER

ĐẦU BÀI

Âm hưởng kí là một phương pháp có thể cho hình ảnh các cơ quan bên trong cơ thể người. Một miếng gốm giữ vai trò bộ biến đổi, nó biến đổi một kích thích điện thành một sóng siêu âm (các siêu âm được phát ra thành các đoàn sóng nối tiếp nhau, có thời gian ngắn).



Bộ biến đổi cũng dùng làm máy dò các tín hiệu dội (các sóng phản xạ trên các cơ quan khác nhau).

Phương pháp này cũng cho phép đo lưu lượng máu nhờ hiệu ứng DOPPLER.

Bộ biến đổi cố định phát ra một sóng siêu âm đơn sắc có tần số ν_0, nó phản xạ trên một vật di động mà vận tốc là $\vec{v}$.

Trong một chu kì của sóng, khoảng cách mà vật đi được là rất nhỏ hơn khoảng cách d giữa nguồn và vật, và $v \ll c$, vận tốc âm trong môi trường.

1) Trong hệ quy chiếu gắn với vật, khoảng thời gian giữa các lần thu được hai cực đại liên tiếp nhau của sóng, phụ thuộc thế nào vào ν_0, v, c và góc α giữa chùm do nguồn phát ra và vận tốc $\vec{v}$?

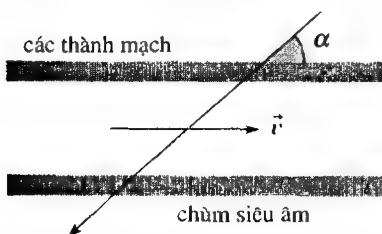
2) Các hồng cầu trong động mạch có vận tốc khoảng 30cm.s^{-1}. Người ta dùng một sóng có tần số $\nu_0 = 3\text{MHz}$. Các phép gần đúng có là chính đáng không ?

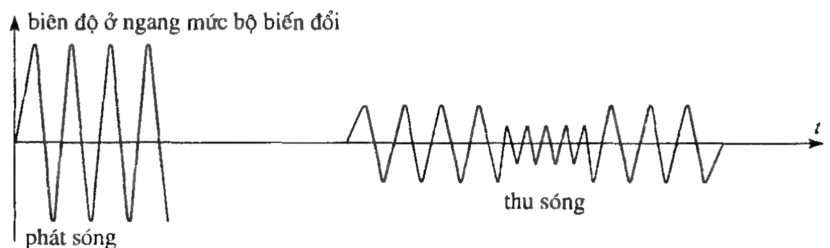
3) Sóng được phát lại không thay đổi tần số trong hệ quy chiếu của vật di động.

Khoảng thời gian giữa hai lần bộ biến đổi thu được hai cực đại liên tiếp nhau của sóng là bao nhiêu ?

Tìm hệ thức giữa ν_0 và ν_r, tần số của sóng phản xạ mà bộ biến đổi thu được.

4) Để phát hiện một số bất bình thường, người ta mong muốn đo được lưu lượng máu chảy qua một động mạch. Sự quan sát bằng âm hưởng kí với một chùm hội tụ, tạo thành một góc α với động mạch, phát ra dưới dạng xung cho ta một tín hiệu là hàm của thời gian, vẽ trên sơ đồ dưới đây.





a) Giải thích thế nào một mặt hai tín hiệu với biên độ lớn, và mặt khác tín hiệu trung gian ?

b) Những thông báo này có đủ để xác định lưu lượng máu không ?

5) Trong trường hợp động mạch, $v = 30\text{cm.s}^{-1}$ và người ta chọn $\alpha = 10^{\circ}$.

Vận tốc trung bình của sự truyền âm trong các mô sinh học là 1500m.s^{-1}.

Người ta có thể chờ đợi một sự biến đổi tỉ đối về tần số như thế nào ?

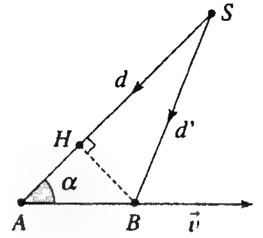
LỜI KHUYÊN

Xác định cẩn thận các thời điểm phát sóng và thu sóng.

Hiệu ứng DOPPLER xuất hiện dưới dạng một hiệu giữa tần số một sóng (âm, điện từ) do một máy phát phát ra và sóng do một máy thu chuyển động so với máy phát thu được. Hiệu ứng đó xuất hiện khi một ôtô đi qua trước mặt một người đi bộ : âm mà người đi bộ thu được thì cao hơn khi xe tiến lại gần người đó (tần số cao hơn) ; nó trầm hơn khi xe tiến ra xa (tần số thấp hơn).

Tương tự như vậy, một rađa của trạm cảnh sát dùng hiệu ứng DOPPLER để kiểm tra vận tốc các xe ôtô đang chạy trong phạm vi hoạt động của trạm.

BÀI GIẢI



1) Sóng mà nguồn S phát ra lúc t_{01} được động tử thu lúc $t_1 = t_{01} + \frac{d}{c}$ (động tử nằm ở A sao cho $SA = d$). Sóng phát ra lúc $t_{02} = t_{01} + T_0$ (với $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$) được động tử thu lúc $t_2 = t_{02} + \frac{d'}{c}$ (động tử nằm ở B sao cho $SB = d'$).

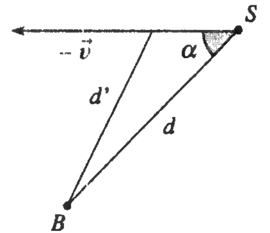
Nếu giả định $AB = v(t_{02} - t_{01}) = vT_0$ rất nhỏ so với d ($v > 0$), ta có $d - d' \approx AH = vT_0 \cos\alpha$ và ta rút ra chu kì T của sóng trong hệ quy chiếu gắn với vật :

$$T = t_2 - t_1 = (t_{02} - t_{01}) + \frac{d' - d}{c} \approx T_0\left(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha\right).$$

2) Có thể kiểm tra được rằng $vT_0 = \frac{v}{\nu_0} = 10^{-7}$ m, tức là $0{,}1\mu m$, là rất nhỏ so với d (vào bậc ít nhất là vài mm).

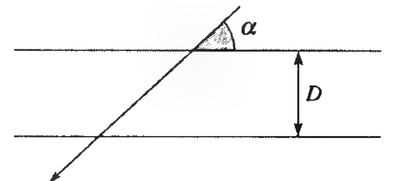
3) Trong hệ quy chiếu gắn với vật, thì vật phản xạ một sóng có chu kì T về phía bộ biến đổi đang chuyển động với vận tốc $-\vec{v}$.

Một phép tính tương tự như trên dẫn đến chu kì T_r mà bộ biến đổi đo được : $T_r = T\left(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha\right)$, từ đó ta rút ra $T_r \approx T_0\left(1 - 2\frac{v}{c}\cos\alpha\right)$ và $\nu_r \approx \nu_0\left(1 + 2\frac{v}{c}\cos\alpha\right)$.



4) a) Khi thu sóng, tín hiệu có biên độ nhỏ bị các hồng cầu phản xạ, tín hiệu có biên độ lớn bị các thành mạch phản xạ.

b) Phép đo hiệu tỉ đối các tần số $\frac{\nu_r - \nu_0}{\nu_0} = 2\frac{v}{c}\cos\alpha$ giữa tín hiệu phát ra và tín hiệu thu được có biên độ nhỏ cho phép tính vận tốc các hồng cầu.



Phép đo hiệu thời gian giữa hai gốc của hai tín hiệu có biên độ lớn mà bộ biến đổi thu được cho phép xác định đường kính của động mạch :

$$\Delta t = \frac{D}{2c\sin\alpha}.$$

Có thể từ đó rút ra lưu lượng máu (lưu lượng khối) : $v\frac{\pi D^2}{4}$.

5) *Áp dụng bằng số :* $\frac{\nu_r - \nu_0}{\nu_0} = 6{,}9.10^{-5}$.

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Gió tải âm thanh

Xét một dòng không khí có vận tốc không đổi u_0 (theo phương và chiều trục (Ox) ; $u_0 > 0$), tại mọi điểm. Trong dòng chảy đó có một sóng âm phẳng chạy truyền theo phương của trục (Ox).

1) Lấy lại các cách kí hiệu của giáo trình (§**1.2**), hãy tìm phương trình lan truyền của áp suất dư âm học $p(x, t)$, trong phạm vi phép gần đúng âm học.

2) Một SPCĐS lan truyền trong dòng chảy. Trong phép kí hiệu phức, p được viết là $\underline{p} = \underline{p_0} e^{j(\omega t - kx)}$.

Hãy tìm hệ thức tán sắc giữa k và ω và giải thích kết quả thu được.

Phải hiểu câu nói "gió tải âm thanh" là gì ?

2 Ảnh hưởng của môi trường đối với sự lan truyền sóng âm

Cách định nghĩa hệ số chịu nén đẳng entrôpi χ_s dưới dạng một hằng số giả định rằng những biến thiên μ của mật độ khối lượng ρ là đồng pha với những biến thiên p của áp suất.

Thực ra, đáp ứng của môi trường đối với một biến thiên áp suất không phải là tức thời, và nó có thể được mô hình hóa bởi phương trình biến thiên gắn các biến thiên của μ với các biến thiên của p :

$$p = \frac{1}{\chi_s \rho_0}\left(\mu + \tau \frac{\partial \mu}{\partial t}\right),$$

trong đó τ là một thời gian tích thoát.

1) Nếu cho rằng ta áp đặt một cách đột ngột một áp suất dư không đổi p_0 cho một môi trường lúc đầu đứng yên, hãy chứng tỏ rằng phương trình trên thực sự diễn tả một đáp ứng trễ của môi trường đối với kích thích đó.

2) Chứng tỏ rằng khi tính đến sự trễ của đáp ứng của môi trường, phương trình lan truyền của áp suất dư p thu được trong giáo trình sẽ có ở đây dạng :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\chi_s \rho_0}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2}\right) = 0 .$$

3) Bằng cách tìm một nghiệm dưới dạng một SPCĐS có tần số ω và vectơ sóng $\vec{k} = k\vec{e}_x$, trong cách kí hiệu phức là $\underline{p} = \underline{p_0} e^{j(\omega t - kx)}$, hãy xác định hệ thức gắn ω và k. Chứng tỏ rằng hệ thức đó dẫn đến một sự lan truyền sóng tắt dần theo hàm mũ, và tính hệ số tắt dần. Ta sẽ giả định rằng $\omega\tau = \varepsilon \ll 1$, và sẽ chỉ hạn chế trong các phép tính với các số hạng bậc một đối với ε.

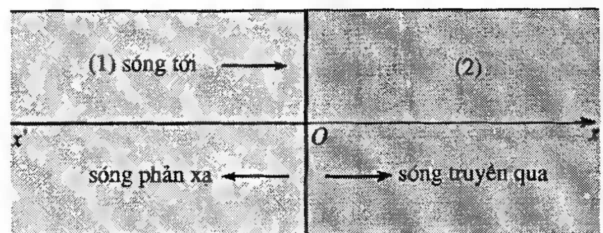
Trong phép gần đúng đó, vận tốc pha của các sóng âm trong môi trường là bao nhiêu ?

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

3 Truyền sóng qua vách ngăn

Một ống hình trụ rất dài, có trục $(x'Ox)$ và tiết diện không đổi S, chứa không khí trong điều kiện nhiệt độ và áp suất bình thường. Trong những điều kiện đó, vận tốc c của các sóng âm trong không khí và mật độ khối lượng ρ_0 của không khí lần lượt là $c = 340 \text{m.s}^{-1}$ và $\rho_0 = 1,29 \text{kg.m}^{-3}$. Tại $x = 0$ có đặt một tấm rất mỏng (một cái màng, một tấm kính thủy tinh, một cái thành bêtông, ...) có mật độ khối lượng mặt đồng đều σ, có khả năng rung lên dưới tác dụng của các sóng âm được tạo thành trong ống.

Một SPC dạng sin, có tần số ω, lan truyền trong miền (1) theo chiều dương, về phía cái vạch. Khi tới vạch, nó tạo ra một sóng phản xạ trong miền (1) và một sóng truyền qua trong miền (2). Dưới tác dụng của các sóng đó, cái vạch thu được một chuyển động tịnh tiến cưỡng bức dạng sin theo phương (x', x), mà ta đặt là $\xi(0,t) = a_0 \cos\omega t$.



1) Bằng cách viết các điều kiện truyền qua đối với sóng âm toàn thể tại $x = 0$, hãy xác định các biên độ phức $\underline{a_t}$ của sóng $\xi_t(0,t)$ truyền qua, $\underline{a_r}$ của sóng $\xi_r(0,t)$ phản xạ tại $x = 0$, tùy theo biên độ phức $\underline{a_i}$ của sóng tới $\xi_i(0,t)$ tại $x = 0$, theo ω và theo các hằng số khác nhau đã đưa vào ở trên.

2) Cái màng giữ vai trò một bộ lọc tần số. Bản chất của bộ lọc đó là gì, và mạch số cắt ω_0 của nó ở -3dB là bao nhiêu ?

Khảo sát các đặc điểm của các sóng có mặt khi ω nằm trong giải tần truyền qua, và ngược lại khi ω cách rất xa giải tần truyền qua.

3) Biểu đạt bước sóng cắt λ_0, tùy theo ρ_0, theo độ dày d và mật độ khối ρ_d của vạch.

Cái vạch bằng bêtông ($\rho_d = 2300\text{kg.m}^{-3}$). Tính bề dày d để thu được một độ giảm 50dB ở 300Hz. Rút ra các giá trị của tần số cắt f_0 và của λ_0.

Các độ giảm ở 100Hz và 500Hz là bao nhiêu đêxiben ? Rút ra kết luận về độ giảm của âm giữa hai căn phòng liền kề, đối với một âm trầm hoặc một âm cao.

Hãy chỉ rõ có thể sử dụng ở đây đến mức độ nào mô hình mật độ khối lượng mặt đối với cái vách.

4 ★★ Hấp thụ âm bằng sự dẫn nhiệt

Trong phạm vi phép gần đúng âm học, sự lan truyền các sóng âm (sóng có áp suất dư p) trong lòng một chất lỏng bị chi phối bởi phương trình :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial P}{\partial \rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0.$$

Đối với một sự biến thiên đẳng entrôpi, vận tốc âm c_s được cho bởi :

$$c_s^2 = \frac{1}{\chi_s \rho_0} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S.$$

Ở đây ta dự định đánh giá thừa số $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ đứng trước những trao đổi năng lượng do truyền nhiệt.

Ta nhắc lại rằng nếu δQ là lượng nhiệt cung cấp cho một đơn vị thể tích của chất lưu trong thời gian dt và K là độ dẫn nhiệt, thì định luật FOURIER đối với sự dẫn nhiệt dẫn đến (Xem H-Prépa, Nhiệt động lực học, năm thứ hai) : $\delta Q = K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\partial t$.

Phương trình trạng thái của chất lưu được coi như phương trình trạng thái của một chất khí lí tưởng có hệ số γ.

1) Sự trao đổi nhiệt được giả định là chuẩn tĩnh (giả thuyết cân bằng nhiệt động lực học địa phương, cho phép xác định các tham số trạng thái của chất lưu), hãy thành lập hệ thức $\delta Q = \left[\rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{P_0}{\rho_0}\frac{\partial \mu}{\partial t}\right]\delta t$, trong đó c_v chỉ nhiệt dung đẳng tích.

2) Ta giả định rằng sóng âm là một SPCĐS, và ta có thể viết theo cách kí hiệu phức :

$$\underline{P} - P_0 = \underline{p} = \underline{p}_0 e^{j(\omega t - kx)};$$

$$\underline{\rho} - \rho_0 = \underline{\mu} = \underline{\mu}_0 e^{j(\omega t - kx)};$$

$$\underline{T} - T_0 = \underline{\theta} = \underline{\theta}_0 e^{j(\omega t - kx)}.$$

Hãy rút ra hệ thức :

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\underline{p}_0}{\underline{\mu}_0} = \frac{P_0}{\rho_0}\frac{c_p - jk^2 W}{c_v - jk^2 W} \text{ với } W = \frac{K}{\omega \rho_0}.$$

3) Hãy thành lập hệ thức tán sắc $k = k(\omega)$ của các sóng ta đang xét. Bằng cách đặt k dưới dạng $k = k_1 - j\alpha$, hãy cho biểu thức của α trong giới hạn $k_1 \gg \alpha$, $Wk_1\alpha \ll c_v$ và $Wk_1^2 \ll c_v$.

Cho biết : đối với không khí, ở điều kiện bình thường :

$$P_0 = 10^5\text{Pa} \; ; \quad c_v = 717\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1};$$

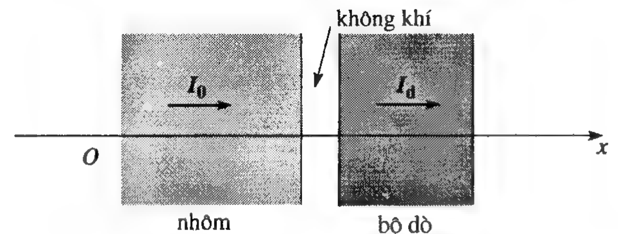
$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4; \quad \rho_0 = 1,18\text{kg.m}^{-3};$$

$$K = 0,026W.\text{m}^{-1}.\text{K}^{-1}.$$

Hãy biện minh cho các phép gần đúng đã thực hiện và bình luận các kết quả thu được đối với các tần số $f_1 = 100$ Hz (âm trầm) và $f_2 = 40\,000$ Hz (siêu âm).

5 ★★ Sử dụng glixêrin cho siêu âm truyền qua

Một sóng siêu âm phẳng lan truyền trong một mẫu nhôm dọc theo trục (Ox). Người ta muốn khảo sát sóng đó bằng một bộ dò (miếng gốm áp điện nối với một tăng âm) đặt sát vào mẫu. Mặc dù tiếp xúc là tốt, vẫn còn có một lớp không khí.



1) Giả thử các môi trường không hấp thụ, hãy xác định cường độ âm I_d do bộ dò thu được, tùy theo các âm trở suất r_n, r_k, r_d của mẫu nhôm, của không khí và của bộ dò, và theo cường độ tới I_0. Ta sẽ lưu ý các phản xạ nhiều lần, và sẽ giải thích sơ bộ tại sao khi đã lưu ý các thăng giáng độ dày dọc theo lớp

không khí, mà trong các phép tính ta vẫn có thể chỉ cần thêm vào các cường độ của các sóng ló.

Ta nhắc lại rằng các hệ số phản xạ và truyền qua về năng lượng giữa hai môi trường có âm trở suất r_1 và r_2 là :

$$R = \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}\right)^2 \text{ và } T = 1 - R = \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}.$$

2) Tính tỉ số $\frac{I_d}{I_0}$.

Cho biết : $r_n = 16,9.10^6 \text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$;

$r_d = 31.10^6 \text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$;

$r_k = 428 \text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$.

3) Để giới hạn sự mất mát cường độ, người ta đặt giữa miếng nhôm và bộ dò một lớp glixêrin để bảo đảm một sự tiếp xúc tốt. Hãy xác định giá trị mới I'_d của cường độ âm trong bộ dò, tùy theo r_n, r_g, r_d và I_0.

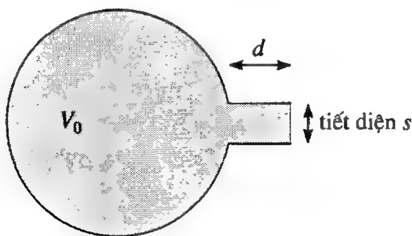
4) Hãy tính giá trị mới của tỉ số $\frac{I'_d}{I_0}$. Hãy bình luận.

Cho biết : $r_g = 24,2.10^5 \text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$.

6 ★ Cái cộng hưởng HELMHOLTZ

Cái cộng hưởng là một cái hốc, khi được kích thích bởi âm của một nhạc cụ, nó cho phép tăng cường một trong những họa ba tạo thành âm đó.

Cái cộng hưởng HELMOLTZ gồm một cái hốc hình cầu, thể tích V_0, thông ra ngoài bằng một ống rất ngắn, độ dài d, tiết diện s, chứa không khí (có thể coi như một chất khí lí tưởng) có mật độ khối lượng ρ_0, có áp suất khí quyển P_0. Thể tích V_0 được giả định là rất lớn so với thể tích của ống.



Một sóng âm lan truyền gần lỗ hở làm không khí trong hốc dao động, bằng cách áp đặt một áp suất ngoài $P_e = P_0 + p_0 \cos\omega t$. Ta giả định rằng bước sóng của sóng âm là khá lớn so với kích thước của cái cộng hưởng để vào mỗi lúc đều có thể coi như áp suất là đồng đều trong cái hốc. Khi đó áp suất này là $P = P_0 + y(t)$.

Dao động của không khí trong cái hốc được giả định là đoạn nhiệt và thuận nghịch. Người ta cho $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$.

1) Viết phương trình vi phân mà áp suất dư $y(t)$ nghiệm đúng.

2) Tìm cho $y(t)$ một nghiệm điều hòa có tần số ω, và chứng tỏ rằng biên độ y_0 của nó trở nên rất lớn đối với một giá trị ω_0 của mạch số ω.

3) Tính tần số riêng $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ của một cái cộng hưởng HELMHOLTZ gồm một quả cầu bán kính 7cm và một ống hình trụ dài d = 1cm và bán kính r = 1cm. Trong điều kiện thí nghiệm, vận tốc âm trong không khí là $c_s = 346 \text{m.s}^{-1}$.

BÀI CHỮA

1 1) *Vận tốc một hạt chất lưu được kí hiệu :*

$$u_0 + v(x,t) \quad \text{với} \quad |v(x,t)| \ll u_0.$$

Hệ thức bảo toàn khối lượng dẫn đến :

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + u_0\frac{\partial\mu}{\partial x} + \rho_0\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Phương trình EULER cho ta $\rho_0\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u_0\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}$.

Hệ thức $\mu = \rho_0\chi_s p = \frac{1}{c^2}p$ *(bằng cách đặt* $\frac{1}{c^2} = \rho_0\chi_s$*) giữ nguyên không đổi.*

Khử μ *và* v *trong ba phương trình trên, ta được :*

$$(c^2 - u_0^2)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2u_0\frac{\partial^2 p}{\partial t\partial x}.$$

2) Nghiệm $\underline{p} = \underline{p}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ *là thích hợp nếu :*

$$\omega^2 - 2\omega u_0 k - k^2(c^2 - u_0^2) = 0,$$

từ đó, ta rút ra $\omega = k(u_0 \pm c)$.

Ta lại tìm thấy một hệ thức kiểu $\omega = kc'$ *với* $c' = u_0 \pm c$.

Nếu sóng truyền theo chiều dòng chảy, $c' = u_0 + c$ *lớn hơn c và sóng âm lan truyền nhanh hơn trong không khí đứng yên : "gió tải âm thanh".*

Chú ý : Cũng có thể khảo sát sóng âm trong một hệ quy chiếu gắn với dòng chảy và lan truyền với vận tốc u_0 đối với hệ quy chiếu Trái Đất. Trong hệ quy chiếu đó, sóng âm truyền với vận tốc c và định luật cộng vận tốc cho ta, trong hệ quy chiếu Trái Đất : $c' = u_0 \pm c$ (tùy theo chiều truyền của sóng âm).

2 1) Áp suất dư p là không đổi, $p = p_0$. Nghiệm của phương trình vi phân :

$$p_0 = \frac{1}{\chi_s \rho_0}\left(\mu + \tau\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)$$

được viết thành : $\mu = \chi_s \rho_0 ps(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.

Vậy μ chỉ lấy lại giá trị $\chi_s \rho_0 p_0$ (sử dụng trong giáo trình, xem §1.2) sau một thời gian nào đó (vào cỡ vài τ).

2) Khi lấy lại các phương trình tuyến tính hóa trong giáo trình (xem §1.2) trong *trường hợp sóng phẳng truyền theo phương (Ox)*, tức là :

- phương trình chuyển động : $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$;
- phương trình bảo toàn khối lượng :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} ;$$

và khi phối hợp chúng với phương trình gắn p và μ : $p = c^2\left(\mu + \tau\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)$, ta được các phương trình lan truyền (với $c^2 = \frac{1}{\chi_s \rho_0}$) :

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \tau\frac{\partial^3 \mu}{\partial t \partial x^2}\right) = 0$$

và

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \tau\frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2}\right) = 0 .$$

3) Áp suất dư $\underline{p} = p_0 e^{j(\omega t - kx)}$ thỏa mãn phương trình lan truyền nếu $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{1 + j\omega\tau}$, tức là $k \approx \frac{\omega}{c}\left(1 - j\frac{\omega\tau}{2}\right)$ với giả định rằng $\omega\tau \ll 1$ và $\mathcal{R}e(k) > 0$ (truyền theo chiều x tăng).

Ta đặt $\alpha = \frac{\omega^2 \tau}{2c}$; khi đó $\underline{p}$ viết thành $\underline{p} = p_0 e^{-\alpha x_c}{}^{\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)}$

Trong cách kí hiệu thực, biểu thức của p trở thành $p = p_0 e^{\alpha x}\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$.

Ta thấy rằng biên độ của áp suất dư (và do đó của các tham số khác : vận tốc v, biến thiên mật độ khối lượng μ, ...) giảm theo hàm mũ của x : sóng giảm dần trong quá trình lan truyền. Ngoài ra, việc tính đến sự trễ của đáp ứng của môi trường đối với kích thích không làm thay đổi vận tốc xuất hiện trong pha của sóng (vận tốc pha) : vận tốc này bao giờ cũng bằng c (kết quả này chỉ có giá trị với điều kiện $\omega\tau \ll 1$).

3 1) Đối với một sóng chạy dạng sin, áp suất dư $\underline{p}$ và vận tốc $\underline{v}$ (trong cách kí hiệu phức) gắn với nhau bằng hệ thức :

- $\underline{p} = \rho_0 c \underline{v}$ đối với một SPCĐS truyền theo chiều tăng của x ;
- $\underline{p} = -\rho_0 c \underline{v}$ đối với một SPCĐS truyền theo chiều giảm của x.

Ta viết các điều kiện biên ở ngang mức cái màng.

Có sự liên tục của các dịch chuyển, tức là vận tốc chất lưu ở hai bên màng bằng nhau :

$$\dot{\xi}(0,t) = v_i(0,t) + v_r(0,t) = v_t(0,t) ,$$

hệ thức cơ bản của động lực học áp dụng với cái màng cho ta :

$$\sigma S \ddot{\xi}(0,t) = S(p_i(0,t) + p_r(0,t) - p_t(0,t)) ,$$

do đó, khi sử dụng cách kí hiệu phức :

$$\begin{cases} a_0 = \underline{a}_i + \underline{a}_r = \underline{a}_t \\ \sigma j\omega a_0 = \rho_0 c(\underline{a}_i - \underline{a}_r - \underline{a}_t) \end{cases}$$

và ta rút ra biên độ các sóng phản xạ và truyền qua, cũng như biên độ chuyển động của pittông :

$$\underline{a}_r = \frac{-j\omega\frac{\sigma}{2\rho_0 c}}{1 + j\omega\frac{\sigma}{2\rho_0 c}}\underline{a}_i \text{ và } a_0 = \underline{a}_t = \frac{1}{1 + j\omega\frac{\sigma}{2\rho_0 c}}\underline{a}_i .$$

2) Biên độ truyền qua có dạng : $\underline{a}_t = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}\underline{a}_i$ với $H_0 = 1$ và $\omega_0 = \frac{2\rho_0 c}{\sigma}$. Vậy màng giữ vai trò một bộ lọc lấy tần số thấp bậc một, có tần số cắt ω_0 ở −3dB.

Đối với $\omega \ll \omega_0$, sóng tới được truyền qua hầu như không bị giảm, không lệch pha : $\underline{a}_t \approx \underline{a}_i$, sóng phản xạ có biên độ rất nhỏ và trễ một phần tư chu kì so với sóng tới :

$$\underline{a}_r \approx -j\frac{\omega}{\omega_0}\underline{a}_i .$$

Đối với $\omega \gg \omega_0$, sóng tới hầu như phản xạ hoàn toàn : $\underline{a}_r \approx -\underline{a}_i$, sóng truyền qua có biên độ rất nhỏ, và trễ một phần tư chu kì so với sóng tới :

$$\underline{a}_t \approx -j\frac{\omega_0}{\omega}\underline{a}_i .$$

3) Đối với tần số f = 300Hz, cần phải có :

$$20\log\frac{1}{\sqrt{1 + \left(2\pi f\frac{\rho_d d}{2\rho_0 c}\right)^2}} = -50 ,$$

từ đó ta rút ra d = 6,4cm.

Tần số cắt f_0 và bước sóng cắt λ_0 lần lượt là :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{2\rho_0 c}{\rho_d d} = 0{,}95\ Hz \approx 1\ Hz$$

$$\text{và} \quad \lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \pi\frac{\rho_d}{\rho_0}d = 358\text{m} .$$

Đối với $f = 100Hz$, ta thấy một sự giảm bớt bằng $-40dB$, và đối với $f = 500$ Hz là một sự giảm bớt bằng -54 dB. Sự giảm bớt giữa hai căn phòng liền kề là rất mạnh, và hơi mạnh hơn đối với các âm cao.

Trong cái vách có bề dày d, thực ra có các sóng phản xạ và sóng truyền qua (xem bài tập 5) mà ta không tính đến ở đây. Các kết quả thu được vẫn chấp nhận được, vì bề dày d của cái vách là hết sức nhỏ so với các bước sóng của sóng âm trong bêtông.

4 1) Ta áp dụng nguyên lí thứ nhất cho một hạt chất lưu (khí lí tưởng) có khối lượng đơn vị, lúc nghỉ nằm giữa các hoành độ x và x + dx.

$$dU = c_v dT = \delta Q' - P dV = \delta Q' + \frac{P}{\rho^2} d\mu \approx \delta Q' + \frac{P}{\rho_0^2} d\mu ,$$

do đó, trong đơn vị thời gian, với $\delta Q' = \frac{1}{\rho_0}\delta Q$:

$$\delta Q = \left[\rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{P_0}{\rho_0}\frac{\partial \mu}{\partial t}\right]\delta t = K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\delta t$$

2) Sử dụng phương trình trạng thái của một khí lí tưởng $P = \rho\frac{RT}{M}$, ta có ở trạng thái cân bằng :

$$P_0 = \rho_0 \frac{RT_0}{M}$$

và khi lấy đạo hàm : $\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$, tức là $\frac{\underline{p}_0}{P_0} = \frac{\underline{\mu}_0}{\rho_0} + \frac{\underline{\theta}_0}{T_0}$.

Trong phạm vi sự gần đúng âm học ($|\underline{p}_0| \ll P_0$, $|\underline{\theta}_0| \ll T_0$, $|\underline{\mu}_0| \ll \rho_0$) và đối với một SPCĐS, hệ số $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ bằng :

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\underline{p}}{\underline{\mu}} = \frac{\underline{p}_0}{\underline{\mu}_0} = \frac{P_0}{\rho_0}\left(1 + \frac{\rho_0}{\underline{\mu}_0}\frac{\underline{\theta}_0}{T_0}\right).$$

Trong trường hợp một SPCĐS, hệ thức thu được ở câu 1) cho ta :

$$j\omega\rho_0 c_v \underline{\theta}_0 - j\omega\frac{P_0}{\rho_0}\underline{\mu}_0 = -Kk^2\underline{\theta}_0 ,$$

do đó $(c_v - jk^2W)\underline{\theta}_0 = \frac{P_0}{\rho_0^2}\underline{\mu}_0$.

Phối hợp hai phương trình trên, và với $\frac{P_0}{\rho_0} = \frac{TR_0}{M}$ và $c_p = c_v + \frac{R}{M}$, cuối cùng ta rút ra :

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{P_0}{\rho_0}\left(\frac{c_p - jk^2W}{c_v - jk^2W}\right).$$

3) SPCĐS $\underline{p} = \underline{p}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ nghiệm đúng phương trình lan truyền :

$$\frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)\frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial x^2}$$

nếu k và ω gắn với nhau bằng hệ thức tán sắc : $\omega^2 = k^2\frac{P_0}{\rho_0}\left(\frac{c_p - jk^2W}{c_v - jk^2W}\right)$, tức là, khi đặt $k = k_1 - j\alpha$:

$$\omega^2 = (k_1 - j\alpha)^2\frac{P_0}{\rho_0}\frac{c_p - 2k_1\alpha W - jW(k_1^2 - \alpha^2)}{c_v - 2k_1\alpha W - jW(k_1^2 - \alpha^2)}.$$

Sóng $\underline{p} = \underline{p}_0 e^{-\alpha x}e^{j(\omega t - k_1 x)}$ giảm dần trong quá trình lan truyền, vì biên độ của nó giảm theo hàm mũ.

• Khi không có truyền nhiệt thì $W = 0$. Ta thấy lại một sự lan truyền không giảm dần : $\alpha = 0$ và vận tốc âm $c_s = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{k_1} = \sqrt{\frac{P_0 c_p}{\rho_0 c_v}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ thu được ở §**1.3.2** cho một khí lí tưởng.

• Nếu truyền nhiệt là nhỏ, $Wk_1\alpha \ll c_v$ và $Wk_1^2 \ll c_v$, vậy $\alpha \ll k_1$, ta được :

$$k_1^2 - 2j\alpha k_1 \approx \omega^2\frac{\rho_0}{P_0\gamma}\left[1 - jWk_1^2\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\right],$$

do đó : $$k_1^2 \approx \omega^2\frac{\rho_0}{P_0\gamma} = \frac{\omega^2}{c_s^2}$$

và $$\alpha \approx \omega^2\frac{\rho_0}{P_0\gamma}\frac{Wk_1}{2}\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right) = \frac{\gamma - 1}{2c_p}\frac{K\omega^2}{c^3\rho_0}.$$

Áp dụng bằng số : $c_s = 346 m.s^{-1}$:

• đối với $f_1 = 100Hz$: $k_1 = 1,82 m^{-1}$ và $\alpha = 4,18.10^{-8} m^{-1}$;

• đối với $f_2 = 40\,000Hz$: $k_2 = 726,4 m^{-1}$ và $\alpha = 6,69.10^{-3} m^{-1}$;

(dễ dàng kiểm tra được sự đúng đắn của các phép gần đúng đã thực hiện).

Chú ý rằng nếu ở 100Hz hiện tượng dẫn nhiệt là bỏ qua được (α vào bậc $10^{-8} m^{-1}$), thì điều đó không còn là đúng ở 40 000 Hz, vì rằng sau một quãng đường x = 10m biên độ sóng siêu âm giảm theo một hệ số $e^{-\alpha x} = 0,94$.

<u>Chú ý :</u>

Phương trình khuếch tán nhiệt $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho_0 c_v}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ phản ảnh ở thang vĩ mô những sự truyền tải năng lượng ở thang vi mô. Nếu một thang L đặc trưng cho những sự không đồng nhất về nhiệt độ, thì sự phân tích thứ nguyên của phương trình đó (xem H-Prépa, Nhiệt động lực học, lớp đệ nhị) cho phép gán một thời gian đặc trưng τ cho những sự truyền nhiệt, xác định bởi $\frac{L^2}{\tau} = \frac{K}{\rho_0 c_v}$.

Đối với một sóng âm có bước sóng λ, ta có thể so sánh chu kì T của sóng và thời gian τ ước lượng bằng cách lấy $L = \lambda$, tức là :

$$\frac{\tau}{T} = \frac{\frac{\rho_0 c_v L^2}{K}}{\frac{\lambda}{c_s}} = \frac{\rho_0 c_v c_s^2}{Kf},$$ trong đó $f = \frac{c_s}{\lambda}$ là tần số sóng.

Trong hai trường hợp đã xét ($f = f_1$ hoặc f_2), tỉ số đó rất lớn hơn 1 :

$\frac{\tau}{T} \approx 4.10^7$ *ở 100Hz, và* 10^5 *ở 40 000Hz.*

*Bằng cách tiếp cận vĩ mô đó, ta thấy lại được sự có giá trị của giả thuyết đoạn nhiệt đã bàn ở §**1.2.2** theo một quan điểm vi mô, cũng như là việc phải xem xét lại nó trong lĩnh vực các tần số rất lớn.*

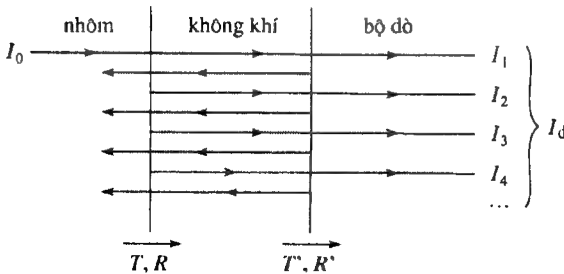
5 1) *Vì có những thăng giáng độ dày của lớp không khí, các sóng khác nhau truyền trong bộ dò không giao thoa, vì chúng có các pha ngẫu nhiên cái nọ đối với cái kia (xem H-Prépa. Quang học sóng : có sự không kết hợp giữa các sóng truyền khác nhau) ; cường độ tổng hợp khi đó bằng tổng các cường độ I_n của mỗi sóng truyền đi, theo như sơ đồ dưới đây :*

$$I_d = I_1 + I_2 + ... + I_n + ... = I_0TT' + I_0TR'RT' + ... \; I_0T(R'R)^nT' + ...$$

bằng cách gọi R và T là các hệ số phản xạ và truyền qua về năng lượng ứng với giao diện nhôm - không khí, và gọi R' và T' là các hệ số đó ứng với giao diện không khí – bộ dò :

$$R = \left(\frac{r_n - r_k}{r_n + r_k}\right)^2 \; ; \; T = \frac{4r_nr_k}{(r_n + r_k)^2} \; ;$$

$$R' = \left(\frac{r_k - r_d}{r_k + r_d}\right)^2 \; ; \; T' = \frac{4r_kr_d}{(r_k + r_d)^2} .$$



Vì hệ số (RR') nhỏ hơn đơn vị, ta có :

$$I_d = I_0TT'\frac{1}{1 - RR'}$$

$$= I_0\frac{16r_nr_k^2r_d}{(r_n + r_k)^2(r_k + r_d)^2 - (r_n - r_k)^2(r_k - r_d)^2} ,$$

tức là :

$$I_d = I_0\frac{4r_nr_kr_d}{r_d(r_n^2 + r_k^2) + r_n(r_k^2 + r_d^2)} .$$

Biết rằng $r_k \ll r_n$ hoặc r_d, ta có thể giản ước biểu thức của I_d và viết :

$$I_d = I_0\frac{4r_k}{r_n + r_d} .$$

2) $\frac{I_d}{I_0} = 3,6.10^{-6}$ *. Ta nhận thấy rằng không khí truyền sóng siêu âm rất kém (xem §**3.2.2**).*

3) *Trong các biểu thức trên, chỉ cần thay r_k bằng r_g để thu được giá trị mới I'_d của cường độ âm trong bộ dò (cũng có thể sử dụng giá trị gần đúng của cường độ đó, vì r_g cũng là nhỏ so với r_n hoặc r_d).*

4) $\frac{I'_d}{I_0} = 0,20$ *. Như vậy glixêrin cho phép nâng cao rõ rệt sự truyền qua của các sóng âm trong bộ dò. Cũng chính vì lí do đó mà khi làm một khảo sát bằng tín hiệu dội, người thày thuốc phết lên da bệnh nhân một lớp gel trước khi đặt bộ biến đổi áp điện.*

6 1) *Ta áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho khối lượng không khí nằm trong cái ống (rất ngắn) của cái cộng hưởng, với giả định rằng lượng không khí này rung động cả khối với vận tốc $v(t)$:*

$$\rho ds\frac{dv}{dt} = (y - p_0\cos\omega t)s .$$

Không khí trong cái hốc rung động một cách đoạn nhiệt và thuận nghịch, do vậy :

$$\frac{P_0 + y(t)}{\rho^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} ,$$

do đó, bằng cách lấy đạo hàm và đặt $\rho = \rho_0 + \mu$ (với $|\mu| \ll \rho_0$) :

$$y = \gamma\frac{P_0}{\rho_0}\mu .$$

Cuối cùng, ta viết hệ thức bảo toàn khối lượng không khí trong cái cộng hưởng :

$$\frac{dm}{dt} = V_0\frac{d\mu}{dt} = -\rho_0 sv$$

với quy ước về dấu đã chọn bởi vận tốc v.

Ba phương trình trên dẫn đến :

$$\frac{\rho_0 dV_0}{\gamma P_0 s}\frac{d^2y}{dt^2} + y = p_0\cos\omega t ,$$

tức là khi đặt $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0 s}{\rho_0 dV_0}}$ *, ta được* $\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2y}{dt^2} + y = p_0\cos\omega t$.

2) *Trong chế độ dạng sin đã thiết lập,* $y = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}p_0\cos\omega t$ *. Hệ bắt đầu dao động (y trở thành vô hạn) đối với $\omega = \omega_0$ (thực ra ma sát hạn chế biên độ của áp suất dư).*

3) *Với* $c_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ *, ta được* $f_0 = \frac{c_s}{2\pi}\sqrt{\frac{s}{dV_0}}$ *tức là $f_0 = 258$Hz (gần như ứng với nốt nhạc do_3).*

Chú ý rằng các phép gần đúng là chính đáng, vì :

- *thể tích V_0 của cái hốc lớn hơn hẳn thể tích của cái ống ;*
- *bước sóng* $\lambda = \frac{c_s}{f_0} = 1,34$m *lớn hơn nhiều kích thước của cái cộng hưởng.*

SỰ LAN TRUYỀN SÓNG ĐIỆN TỪ TRONG CHÂN KHÔNG

5

Mở đầu

Ở chương 4, chúng ta đã triển khai một mô hình mô tả sự lan truyền âm trong một môi trường vật chất như không khí : các sóng âm là sóng dọc truyền theo ba phương của không gian.

Chúng ta sẽ làm rõ ở đây những sự tương tự giữa sự lan truyền ánh sáng và sự lan truyền sóng âm. Hơn nữa, chúng ta sẽ khẳng định bản chất vectơ của ánh sáng, nó có thể lan truyền trong chân không, không có môi trường vật chất.

Sự lan truyền sóng điện từ bao trùm toàn bộ phổ tần số, đi từ các sóng vô tuyến điện đến các tia X và tia γ, và đi qua miền quang học. Các mặt muôn vẻ được gọi ra làm nổi rõ ngay từ đầu tầm quan trọng thực tiễn của sự lan truyền các sóng điện từ.

Trường hợp sự lan truyền trong chân không sẽ được bổ sung trong các chương 7, 8 và 9.

MỤC TIÊU

- Những đặc trưng tổng quát của sự lan truyền sóng điện từ trong chân không
- Sự phân cực của một sóng điện từ.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Các phương trình lan truyền
- Phương trình d'ALEMBERT
- Sóng phẳng và sóng phẳng đơn sắc.

1 Sự lan truyền trường điện từ trong chân không

1.1. Các phương trình MAXWELL

1.1.1. Bốn phương trình MAXWELL

Các phương trình MAXWELL gắn bó sự biến thiên của trường điện từ $(\vec{E}, \vec{B})$ với nguồn gốc của nó là các điện tích và các dòng điện (xem *H–Prépa, Điện từ học, lớp đệ nhị, PC–PSI*).

Các phương trình "MAXWELL - Thông lượng" (kí hiệu là MΦ), bảo đảm sự bảo toàn từ thông và "MAXWELL - FARADAY" (MF), thể hiện hiện tượng cảm ứng điện từ, thì độc lập đối với các điện tích và các dòng điện, là nguồn gốc của trường :

$$\begin{cases} \text{div}\vec{B} = \vec{0} & (\text{M}\Phi) \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (\text{MF}) \end{cases}$$

Các phương trình "MAXWELL - GAUSS" (MG) và "MAXWELL - AMPÈRE" (MA) gắn bó trường điện từ với nguồn gốc của nó :

$$\begin{cases} \text{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & (\text{MG}) \text{ với } \varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi}.10^{-9}\,\text{F.m}^{-1} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (\text{MA}) \text{ với } \mu_0 = 4\pi.10^{-7}\,\text{H.m}^{-1} \end{cases}$$

1.1.2. Các phương trình MAXWELL trong chân không

Trong chân không, tức là nơi không có điện tích và dòng điện, các thông lượng của điện trường và từ trường có tính bảo toàn :

$$\begin{cases} \text{div}\vec{E} = \vec{0} & (\text{MG}) \\ \text{div}\vec{B} = \vec{0} & (\text{M}\Phi) \end{cases}.$$

Các biến thiên trong không gian và thời gian của điện trường và từ trường gắn bó với nhau bằng các phương trình liên kết :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (\text{MF}) \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (\text{MA}) \end{cases}.$$

Sự liên kết các biến thiên trong không gian và thời gian của các trường tương tự như sự liên kết của điện áp và dòng điện trong một đường dây điện, của lực và vận tốc trong một sợi dây dao động, hoặc của áp suất dư và vận tốc trong một chất lưu (*xem các chương* 2, 3 và 4). Chúng ta biết rằng sự liên kết đó là nguồn gốc của hiện tượng lan truyền. Vậy thì các sóng điện từ sẽ lan truyền giống như các sóng điện trong một đường dây, các dao động trên một sợi dây, hay các sóng âm trong một chất lưu. Có một điều mới mẻ và đáng lưu ý, là sự lan truyền đó có thể diễn ra ngay cả trong chân không, tức là khi không có một chỗ dựa vật chất làm nơi truyền sóng.

1.2. Các phương trình lan truyền

Để thu được phương trình lan truyền của điện trường $\vec{E}$, chúng ta khử từ trường $\vec{B}$ khỏi hệ phương trình liên kết, theo như :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Ta sử dụng :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

và sự bảo toàn thông lượng của điện trường trong chân không (MG), ta thu được phương trình lan truyền của điện trường :

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

Bằng cách khử điện trường khỏi hệ phương trình liên kết, ta thu được cũng phương trình lan truyền đó đối với từ trường.

Sự liên kết các biến thiên trong không gian và thời gian của điện trường và từ trường là nguồn gốc của hiện tượng lan truyền các tín hiệu điện từ.

Trong chân không, sự lan truyền đó được mô tả bởi phương trình d'ALEMBERT (ba chiều) :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \text{ và } \Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0},$$

trong đó vận tốc c đặc trưng cho sự lan truyền là $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$.

Vận tốc truyền c của các sóng điện từ trong chân không xấp xỉ bằng $c = 3.10^8\ \text{m.s}^{-1}$ (xem § **5**).

Đôi khi chúng ta dùng toán tử d'ALEMBERT xác định bởi :

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Trong điều kiện đó, phương trình lan truyền được viết dưới một dạng cô đọng hơn :

$$\Box\vec{E} = \vec{0} \quad \text{và} \quad \Box\vec{B} = \vec{0}.$$

Áp dụng 1

Các phương trình thế

1) *Hãy nhắc lại các biểu thức của điện trường và từ trường theo thế vô hướng V và thế vectơ $\vec{A}$.*

2) *Những phương trình nào gắn các thế với các nguồn của trường điện từ ?*

3) *Các phương trình đó trở thành thế nào trong chân không, với phép định cỡ LORENTZ :*

$$\text{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \ ?$$

1) Từ trường có thông lượng bảo toàn : $\text{div}\vec{B} = 0$, vậy nó có dạng $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$.

Nhờ phương trình "MAXWELL - FARADAY", ta rút ra : $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\vec{0}$.

Điện trường khi đó có thể viết thành :

$$\vec{E}=-\overrightarrow{\text{grad}}\,V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

2) Đưa các biểu thức của điện trường và từ trường vào các phương trình "MAXWELL - GAUSS" và "MAXWELL - AMPÈRE", ta được :

$$\Delta V-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)=-\mu_0\vec{j}.$$

3) Trong chân không, với phép định cỡ LORENTZ, thế vô hướng và thế vectơ thỏa mãn phương trình lan truyền d'ALEMBERT :

$$\Box V=0 \quad \text{và} \quad \Box\vec{A}=\vec{0}.$$

2 Sóng phẳng điện từ trong chân không

2.1. Sóng phẳng điện từ

Ta hãy tìm một trường điện từ thỏa mãn các phương trình lan truyền dưới dạng một sóng phẳng lan truyền, chẳng hạn song song với phương trục (Ox) :

$$\vec{E}(x,y,z,t)=\vec{E}(x,t) \qquad \text{và} \quad \vec{B}(x,y,z,t)=\vec{B}(x,t).$$

Khi chiếu xuống một trục, thí dụ trục (Oz), phương trình lan truyền của điện trường viết thành :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}=0,$$

các nghiệm của nó (*xem chương 2*) có dạng tổng quát :

$$E_z(x,t)=f_z\left(t-\frac{x}{c}\right)+g_z\left(t+\frac{x}{c}\right).$$

Kết quả này cũng mở rộng sang các thành phần khác của $\vec{E}$, cũng như sang các thành phần của từ trường $\vec{B}$, ta rút ra rằng dạng tổng quát các nghiệm của các phương trình lan truyền của các trường là :

$$\vec{E}(x,t)=\vec{E}_+\left(t-\frac{x}{c}\right)+\vec{E}_-\left(t+\frac{x}{c}\right)$$

$$\vec{B}(x,t)=\vec{B}_+\left(t-\frac{x}{c}\right)+\vec{B}_-\left(t+\frac{x}{c}\right).$$

Dạng tổng quát của các sóng phẳng lan truyền song song với phương của vectơ đơn vị $\vec{u}$, và là nghiệm của phương trình lan truyền là (với $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$) :

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_+\left(t-\frac{\vec{u}.\vec{r}}{c}\right)+\vec{E}_-\left(t+\frac{\vec{u}.\vec{r}}{c}\right)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_+\left(t-\frac{\vec{u}.\vec{r}}{c}\right)+\vec{B}_-\left(t+\frac{\vec{u}.\vec{r}}{c}\right).$$

Ta biết rằng sự phù hợp của các nghiệm này với phương trình lan truyền chỉ là một điều kiện cần để chúng tồn tại.

Chúng chỉ có thể chấp nhận được về mặt vật lí nếu chúng cũng nghiệm đúng các phương trình MAXWELL, vì các phương trình liên kết áp đặt những hệ thức đặc biệt giữa điện trường và từ trường : $\vec{E}_+$, $\vec{B}_+$, $\vec{E}_-$ và $\vec{B}_-$.

2.2. Cấu trúc của sóng phẳng chạy (SPC) trong chân không

Các phương trình MAXWELL áp đặt những hệ thức tuyến tính gắn bó các trường $\vec{E}_+$, $\vec{E}_-$, $\vec{B}_+$ và $\vec{B}_-$, chúng có giá trị vào mọi lúc và tại mọi điểm. Các hệ thức thu được có thể được viết một cách độc lập đối với các hàm phụ thuộc các biến $\alpha = t - \frac{\vec{u}.\vec{r}}{c}$ và $\beta = t + \frac{\vec{u}.\vec{r}}{c}$, các biến này là độc lập.

Trong điều kiện đó, chúng ta chỉ cần thành lập các hệ thức đặt ra giữa các trường $\vec{E}_+$ và $\vec{B}_+$.

Chú ý :

• *Những trường không đổi, không phụ thuộc thời gian, tức là chỉ phụ thuộc x, có thể là tương thích với các phương trình MAXWELL. Có thể tồn tại những trường này, nhưng chúng không can dự vào hiện tượng lan truyền. Chúng ta sẽ loại trừ các trường này, trong phạm vi sự khảo sát của ta.*

• *Những trường chỉ phụ thuộc t (trường đều, nhưng biến thiên theo thời gian) không tương thích với các phương trình MAXWELL : đối với các trường đều thì dive và rôta bằng không, các trường này chỉ có thể là không đổi.*

Sau đây ta chỉ hạn chế trong sự khảo sát các sóng phẳng chạy, là nghiệm (không tĩnh) của phương trình lan truyền d'ALEMBERT, có dạng :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_+\left(t - \frac{\vec{u}.\vec{r}}{c}\right)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_+\left(t - \frac{\vec{u}.\vec{r}}{c}\right).$$

Đối với một hàm $f(x,y,z,t) = f\left(t - \frac{\vec{u}.\vec{r}}{c}\right)$, chúng ta có thể kiểm tra rằng :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{u_x}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{\text{grad}} f = -\frac{\vec{u}}{c}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Cũng như vậy, đối với một trường vectơ $\vec{A}(x,y,z,t) = \vec{A}\left(t - \frac{\vec{u}.\vec{r}}{c}\right)$, ta có :

$$\text{div}\vec{A} = -\frac{\vec{u}}{c}.\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{rot}\vec{A} = -\frac{\vec{u}}{c}\wedge\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

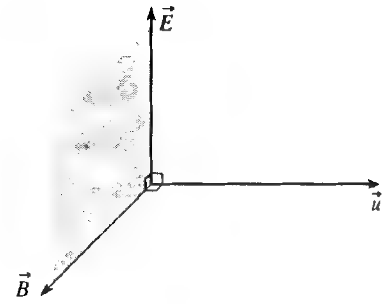
Khi đó các phương trình MAXWELL mà sóng phẳng chạy điện từ $(\vec{E}_+, \vec{B}_+)$ nghiệm đúng được viết thành :

$$\begin{cases} -\frac{\vec{u}}{c}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \text{ (MG)} \\ -\frac{\vec{u}}{c}\wedge\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ (MF)} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} -\frac{\vec{u}}{c}.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \text{ (M}\Phi\text{)} \\ -\frac{\vec{u}}{c}\wedge\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ (MA)} \end{cases}.$$

Tích phân những phương trình này đối với thời gian, ta được, với sự sai khác những trường tĩnh (mà ta đã gạt bỏ) :

$$\left|\begin{array}{l}\vec{u}.\vec{E}=\vec{0}\\ \vec{B}=\dfrac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c}\end{array}\right. \quad \text{và} \quad \left|\begin{array}{l}\vec{u}.\vec{B}=\vec{0}\\ \vec{E}=-c\vec{u}\wedge\vec{B}\end{array}\right.$$

Hai đẳng thức đầu chỉ ra rằng điện trường và từ trường của SPC là trường *ngang*. Hai đẳng thức sau khẳng định điều đó và cho phép biểu diễn tam diện thuận $(\vec{E},\vec{B},\vec{u})$ $(h.1)$.



H.1. *Cấu trúc của SPC điện từ trong chân không.*

Trường điện từ của một sóng phẳng chạy truyền trong chân không với vận tốc *c* theo phương vectơ đơn vị $\vec{u}$, là một trường *ngang* :

$$\vec{u}.\vec{E}=\vec{0} \quad \text{và} \quad \vec{u}.\vec{B}=\vec{0}.$$

Từ trường của sóng gắn với điện trường của sóng bởi *hệ thức cấu trúc* :

$$\vec{B}=\frac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c} \text{ hay } \vec{E}=-c\vec{u}\wedge\vec{B}.$$

Điện trường $\vec{E}$ và từ trường $\vec{B}$ vuông góc với nhau và với phương truyền : tam diện $(\vec{E},\vec{B},\vec{u})$ là *thuận* và *có ba góc vuông*.

3 Sóng phẳng chạy đơn sắc (SPCĐS)

3.1. Cấu trúc của các SPCĐS điện từ

Cho một SPCĐS điện từ, có tần số ω và vectơ sóng $\vec{k}$. Chú ý rằng giá trị trung bình của các trường này bằng không : không có trường tĩnh.

3.1.1. Cách kí hiệu phức

Chúng ta có thể viết điện trường của nó theo cách kí hiệu phức, dưới dạng $\underline{\vec{E}}=\underline{\vec{E}}_0e^{j(\omega t-\vec{k}.\vec{r})}$.

Ở *chương 2*, ta đã biết rằng cách kí hiệu đó đơn giản hóa các phép tính vi phân. Như vậy, ta viết một cách đơn giản :

$$\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}=j\omega\underline{\vec{E}} \text{ và } \frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial x}=-jk_x\underline{\vec{E}}.$$

Các cách tính toán đó cũng có thể được áp dụng cho các phép tính đạo hàm vectơ. Ta có :

$$div\underline{\vec{E}}=-j\vec{k}.\underline{\vec{E}}\ ; \quad rot\underline{\vec{E}}=-j\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}\ ; \quad \Delta\underline{\vec{E}}=-k^2\underline{\vec{E}}.$$

<u>*Chú ý :*</u>

Chú ý rằng các phép tính đạo hàm mà ta vừa viết ở đây được áp dụng cho một SPCĐS. Trong trường hợp một sóng không phẳng, như là $\underline{\vec{E}}=\underline{\vec{E}}_0(y,z)e^{j(\omega t-kx)}$ chẳng hạn, không được bỏ qua sự phụ thuộc của trường đối với các biến số không gian y và z. Khi đó ta sẽ viết :

$$\text{div}\underline{\vec{E}}=\text{div}(\underline{\vec{E}}_0(y,z)\text{e}^{j(\omega t-kx)})=[\text{div}\underline{\vec{E}}_0(y,z)-j\vec{k}.\underline{\vec{E}}_0(y,z)]\text{e}^{j(\omega t-kx)}.$$

3.1.2. Hệ thức cấu trúc của các SPCĐS

Ở đây phương trình "MAXWELL - FARADAY" được viết thành :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}, \qquad \text{do đó} \quad j\omega\vec{B} = j\vec{k} \wedge \vec{E},$$

điều đó cho ta $\vec{B} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$.

Từ trường của một sóng phẳng chạy đơn sắc điện từ có tần số ω và vectơ sóng $\vec{k}$ thì gắn với điện trường bởi hệ thức cấu trúc :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}.$$

Đáng chú ý là hệ thức này chỉ đòi hỏi sử dụng phương trình "MAXWELL - FARADAY" độc lập đối với các nguồn. Nó áp dụng được trong chân không, nhưng cũng áp dụng được trong các môi trường vật chất.

Chú ý :

Tuy nhiên, không được suy ra rằng hệ thức này là tổng quát. Đừng quên rằng nó được áp dụng cho các sóng phẳng, chạy và đơn sắc.

3.2. Sự lan truyền các SPCĐS trong chân không

3.2.1. Hệ thức tán sắc

Ta biết rằng phương trình lan truyền áp đặt hệ thức tán sắc, gắn bó ω với chuẩn k (k cũng được gọi là số sóng) của vectơ sóng $\vec{k}$.

Từ phương trình d'ALEMBERT, ta rút ra ngay rằng hệ thức tán sắc của các sóng phẳng chạy đơn sắc lan truyền trong chân không là $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$.

Như đã nhận xét ở *chương 3*, sự lan truyền mà phương trình d'ALEMBERT mô tả được đặc trưng bởi một vận tốc truyền bằng c, không phụ thuộc tần số của SPCĐS ta khảo sát là bao nhiêu.

Áp dụng 2

Thực hành cách kí hiệu phức cấu trúc SPCĐS trong chân không

1) *Trong trường hợp một SPCĐS và bằng cách sử dụng phép kí hiệu phức* $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$, *hãy diễn tả bốn phương trình MAXWELL trong chân không.*

2) *Từ những phương trình này, hãy thành lập hệ thức tán sắc mà ta vừa nhắc tới.*

3) *Chứng tỏ rằng đối với một SPCĐS các phương trình đó cho phép tìm lại hệ thức cấu trúc của SPC điện từ đã thành lập ở* §**2.2.**

4) *Sử dụng các hệ thức đã thành lập để gán một cấu trúc đặc biệt cho tam diện* $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$.

1) Ứng dụng kĩ thuật tính đạo hàm vectơ (xem §3.1) cho hàm mũ phức của SPCĐS, ta có thể đặt các phương trình MAXWELL dưới dạng :

$$\begin{cases} -j\vec{k}.\underline{\vec{E}} = \vec{0} & \text{(MG)} \\ -j\vec{k}.\underline{\vec{B}} = \vec{0} & \text{(M}\Phi\text{)} \\ -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{B}} & \text{(MF)} \\ -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \varepsilon_0\mu_0 j\omega\underline{\vec{E}} & \text{(MA)} \end{cases}$$

2) Phối hợp hai phương trình liên kết (MF và MA), ta được :

$$-j\vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}\right) = \varepsilon_0\mu_0 j\omega\underline{\vec{E}}.$$

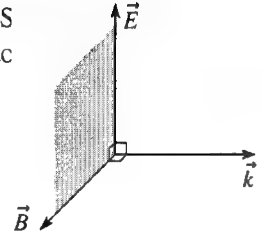
Khai triển tích vectơ kép (nó chẳng qua là toán tử rôta áp dụng hai lần), và chú ý đến tính ngang của trường, ta được :

$$\left(\frac{\vec{k}^2}{\omega}\right)\underline{\vec{E}} = \varepsilon_0\mu_0\omega\underline{\vec{E}}, \quad \text{vậy} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

là hệ thức tán sắc của các SPCĐS điện từ trong chân không.

3) Đối với một SPCĐS truyền theo phương vectơ đơn vị $\vec{u}$, vectơ sóng là :

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}$$



H.2. *Cấu trúc một SPCĐS điện từ.*

Cách viết đặc biệt của hệ thức MAXWELL - FARADAY cho ta :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \frac{\vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}}{c}, \quad \text{tức là} \quad \vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}.$$

Chúng ta đã thấy lại hệ thức cấu trúc gắn bó điện trường và từ trường của một SPC điện từ trong chân không, mà SPCĐS là một trường hợp riêng.

Chú ý rằng điện trường và từ trường của SPCĐS đồng pha với nhau.

4) Hai hệ thức đầu tiên cho phép ta khẳng định tính ngang của trường điện từ của SPCĐS.

Hơn nữa, bằng cách sử dụng hệ thức cấu trúc ở trên, ta có thể khẳng định rằng tam diện $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ là tam diện thuận có ba góc vuông (*h*.2).

3.2.2. Bước sóng

Bước sóng (trong chân không) của một SPCĐS liên kết với tần số của nó bởi :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\frac{c}{\omega} = \frac{c}{\nu}.$$

Miền mà các sóng điện từ đạt tới là rất rộng, như *hình 3* đã chỉ ra : nó đi từ các sóng vô tuyến điện đến các bức xạ gamma, và đi qua một cửa sổ rất hẹp của miền quang học, hay miền nhìn thấy.

3.3. Sự lan truyền năng lượng của một SPCĐS trong chân không

3.3.1. Mật độ khối của năng lượng

Bây giờ ta quan tâm đến sự lan truyền năng lượng đi theo sự lan truyền một SPC theo phương vectơ đơn vị $\vec{u}$. *Mật độ khối* của năng lượng gắn với trường điện từ là :

$$e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Đối với một sóng điện từ phẳng chạy trong chân không, mật độ khối đó của năng lượng đồng nhất với mật độ khối của năng lượng sóng.

Đối với SPCĐS trong chân không, các chuẩn của điện trường và từ trường gắn với nhau một cách đơn giản bởi hệ thức :

$$B = \frac{E}{c}.$$

Khi đó, ta có thể viết được mật độ khối của năng lượng SPCĐS :

$$e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

nó làm hiện rõ sự phân bố năng lượng đều nhau dưới các dạng điện và từ.

Đối với một SPCĐS truyền theo phương trục (Ox), trường điện từ viết theo cách kí hiệu phức có dạng :

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - kx)} \\ \underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{u}_x \wedge \underline{\vec{E}}_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \end{cases}.$$

Ta có thể biểu đạt trung bình theo thời gian của mật độ năng lượng gắn với sóng :

$$\langle e \rangle = \langle \varepsilon_0 E^2 \rangle = \varepsilon_0 \frac{1}{2} \mathcal{R}e(\underline{E}\underline{E}^*) = \frac{\varepsilon_0 |\underline{E}_0|^2}{2}$$

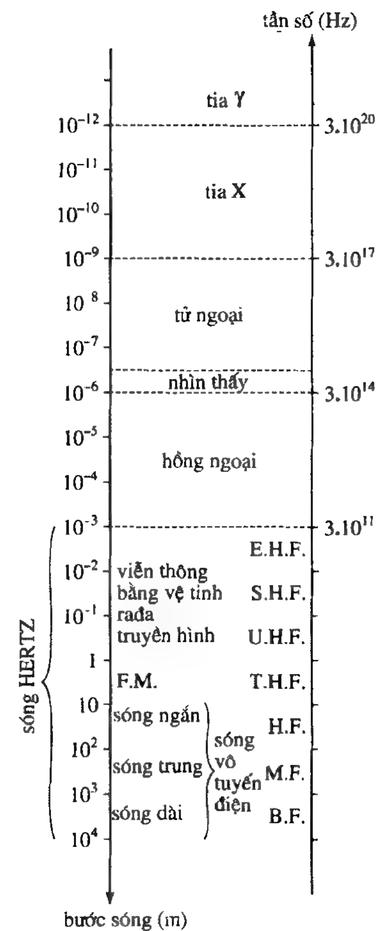
ở đây $\underline{E}^*$ là liên hợp phức của $\underline{E}$.

Chú ý :

Cho số phức $\underline{A}(t) = \underline{A}_m e^{j\omega t}$, *trong đó* $\underline{A}_m(t) = A_m e^{j\varphi_1}$, *ứng với* $A(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi_1)$ *và số phức* $\underline{B}(t) = \underline{B}_m e^{j\omega t}$, *trong đó* $\underline{B}_m = B_m e^{j\varphi_2}$, *ứng với* $B(t) = B_m \cos(\omega t + \varphi_2)$, *chúng ta nhắc lại rằng giá trị trung bình của tích A(t)B(t) bằng :*

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{A}(t)\underline{B}^*(t)) = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{A}_m \underline{B}_m^*)$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{R}e(A_m B_m e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}) = \frac{1}{2} A_m B_m \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$



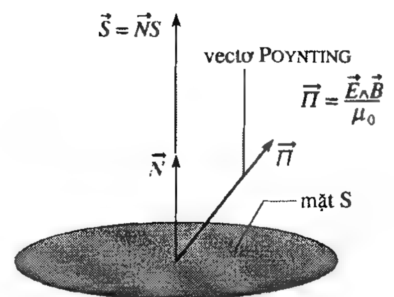
H.3. *Tần số và bước sóng của các sóng điện từ trong chân không.*

3.3.2. Vectơ Poynting

Ta biết rằng (xem H-Prépa, Điện từ học, lớp đệ nhị, PC-PSI) công suất điện từ ϕ (đo bằng oat) đi qua một mặt S thì bằng thông lượng của vectơ Poynting $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ (hay vectơ năng thông đo bằng $W.m^{-2}$) xuyên qua mặt có định hướng đó (h.4).

Đối với một sóng phẳng chạy thì :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E})}{\mu_0 c} = c\varepsilon_0 E^2 \vec{u}.$$



H.4. *Công suất điện từ ϕ xuyên qua mặt S theo chiều $\vec{N}$ thì bằng $\phi = \vec{\Pi}.\vec{N}S$.*

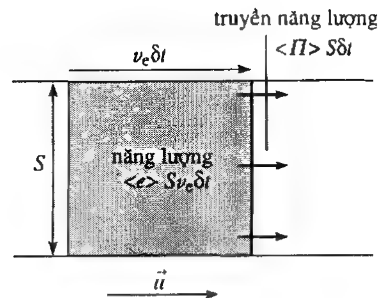
3.3.3. Vectơ Poynting trung bình

Các sóng điện từ thường có tần số cao ($\nu > 10^5$ Hz ; giới hạn này ứng với các sóng Hertz có biến điệu biên độ). Các bộ tách sóng thường chỉ nhạy

với những giá trị trung bình theo thời gian của công suất mà chúng nhận được ; vậy chúng ta chỉ quan tâm đến những giá trị trung bình đó mà thôi.

Đối với một SPCĐS có mạch số $\omega = 2\pi\nu$, giá trị trung bình theo thời gian $\langle\phi\rangle$ của công suất xuyên qua một mặt $\vec{S}$ vuông góc với phương truyền $\vec{u}$ $(\vec{S} = S\vec{u})$ thì bằng :

$$\langle\phi\rangle = \langle\vec{\Pi}\rangle.\vec{S} = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right).\vec{S} = \frac{c\varepsilon_0|\underline{\vec{E}}_0|^2}{2}S.$$



H.5. *Nếu năng lượng di chuyển với vận tốc v_e, thì tại thời điểm t năng lượng xuyên qua mặt S giữa các thời điểm t và t + δ t nằm trong một hình trụ có đáy S và chiều $v_e\delta t$.*

Chú ý :

Chúng ta tổng quát hóa biểu thức giá trị trung bình của tích $\langle A(t)B(t)\rangle$ của hai hàm sin có cùng tần số thành tích của hai vectơ ($\underline{B}^*(t)$ chỉ liên hợp phức của $\underline{B}(t)$).

$$\langle\vec{E}(t) \wedge \vec{B}(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{\vec{E}}(t) \wedge \underline{\vec{B}}^*(t)) = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{\vec{E}}_m \wedge \underline{\vec{B}}_m^*)$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\vec{E}_m \wedge \vec{B}_m e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}) = \frac{1}{2}\vec{E}_m \wedge \vec{B}_m \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

3.3.4. Vận tốc lan truyền năng lượng

Ta có thể định nghĩa vận tốc lan truyền v_e của năng lượng bằng cách đồng nhất hóa năng lượng trung bình xuyên qua một mặt S vuông góc với phương truyền trong thời gian δt, $\langle\Pi\rangle S\delta t$, với năng lượng trung bình gắn với sóng chứa trong nguyên tố thể tích $S(v_e\delta t)$ (*h*.5).

Ta viết được :

$$Sv_e\delta t\langle e\rangle = \langle\Pi\rangle S\delta t,$$

tức là $v_e = \dfrac{\langle\Pi\rangle}{\langle e\rangle}$.

Đối với SPCĐS điện từ lan truyền trong chân không, các biểu thức thu được ở §**3.3.1** và **3.3.3** cho phép ta viết được :

$$v_e = c.$$

Vận tốc c là vận tốc lan truyền các SPCĐS điện từ trong chân không. Nó cũng là vận tốc lan truyền năng lượng gắn với các sóng đó.

Áp dụng 3

Khảo sát những đặc trưng của một laze He-Ne

Một laze He–Ne (năng suất phát xạ trung bình $\langle\phi\rangle = 2\text{mW}$) phát ra từ một chùm sáng (giả định là hình trụ bán kính r = 0,75mm) đơn sắc (có bước sóng λ = 632,6nm) mà ta coi như là một SPCĐS.

1) *Tính giá trị bằng số của các chuẩn của điện trường E_0 và từ trường B_0 do laze này phát ra.*

2) *Xác định số lượng phôtôn n (xem §5) trong mỗi đơn vị thể tích của chùm* $(h = 6{,}62.10^{-34}\text{J.s})$ *?*

3) *Xác định số lượng phôtôn N mà laze này phát ra trong mỗi giây ?*

1) Công suất trung bình $\langle \phi \rangle$ do laze này phát ra là :

$$\langle \phi \rangle = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2}(\pi r^2).$$

Với $\langle \phi \rangle = 2\text{mW}$, ta tìm được :

$$E_0 = 1,85\text{V.m}^{-1}$$

và $$B_0 = \frac{E_0}{c} = 6,16.10^{-6}\text{T}.$$

2) Mỗi phôtôn có một năng lượng $\mathscr{E} = h\nu$. Nếu chùm bao gồm n phôtôn trong mỗi đơn vị thể tích, thì năng lượng trung bình $\delta\mathscr{E}$ xuyên qua một tiết diện $S = \pi r^2$ trong thời gian δt ứng với các phôtôn nằm trong một hình trụ có tiết diện S và chiều dài $c\delta t$, tức là :

$$\langle \phi \rangle \delta t = n(Sc\delta t)h\nu,$$

do đó $n = \frac{\langle \phi \rangle}{Sch\nu} = \frac{\langle \phi \rangle \lambda}{\pi r^2 c^2 h}$, tức là :

$$n = 1,2.10^{13}\,\text{phôtôn.m}^{-3}.$$

3) Số lượng phôtôn xuyên qua một diện tích S, trong thời gian δt, ứng với các phôtôn nằm trong một hình trụ có tiết diện S và chiều dài $c\delta t$, tức là :

$$N\delta t = n(Sc\delta t), \quad \text{do đó } N = nSc,$$

tức là $N = 6,37.10^{15}\,\text{phôtôn.s}^{-1}$.

4 Sự phân cực các sóng điện từ

4.1. Bản chất vectơ của các sóng điện từ

4.1.1. Cách biểu diễn vectơ của một SPCĐS

Chúng ta đã mô tả các SPCĐS đã gặp cho tới nay bằng các cách biểu diễn vô hướng. Điện áp và dòng điện của một sóng điện là những thí dụ. Đối với sóng âm, áp suất dư là một đại lượng vô hướng, vận tốc chất lưu là một đại lượng vectơ, nhưng phương của nó là phương truyền của SPCĐS (sóng dọc), như vậy nó lại quy về một cách mô tả vô hướng.

Xét một SPCĐS điện từ, có tần số ω, truyền trong chân không. Chọn trục (Oz) song song với phương truyền. Vectơ sóng của nó là $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{e}_z$.

Trường điện từ ngang của nó có thể được biểu diễn bằng những vectơ song song với mặt phẳng (xOy). Điện trường của nó biểu diễn trong cách kí hiệu phức bằng :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$$

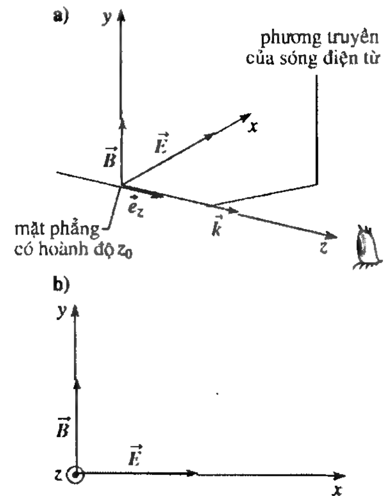
cũng có thể được viết theo cách kí hiệu thực :

$$\begin{cases} E_x = \mathscr{R}e(\underline{E}_{0x}e^{j(\omega t - kz)}) = E_{0x}\cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ E_y = \mathscr{R}e(\underline{E}_{0y}e^{j(\omega t - kz)}) = E_{0y}\cos(\omega t - kz + \phi_y) \end{cases},$$

trong đó E_{0x} và E_{0y} là những hằng số dương (với điều kiện phải lựa chọn tốt giá trị các pha ϕ_x và ϕ_y).

Dữ liệu của điện trường là đủ để mô tả trạng thái của sóng, vì từ trường đồng pha với điện trường có thể được suy ra từ điện trường bằng hệ thức cấu trúc $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$, tức là :

$$\begin{cases} B_x = -\frac{E_{0y}}{c}\cos(\omega t - kz + \phi_y) \\ B_y = +\frac{E_{0x}}{c}\cos(\omega t - kz + \phi_x) \end{cases}$$



H.6. *"Quan sát" sự phân cực của một SPCĐS điện từ : "nhà thực nghiệm thu nhận ánh sáng". Vectơ sóng $\vec{k}$ thỏa mãn $\vec{k} = k\vec{e}_z$, với $k > 0$.*

a. *Mắt nhìn sóng đi tới nó.*

b. *Sóng đi tới bạn.*

4.1.2. Sự phân cực của một SPCĐS

Xét trường hợp rất đơn giản : vectơ điện trường của sóng giữ một phương không đổi theo thời gian, mà ta có thể chọn là đồng phương với trục (Ox). Biểu thức của trường này có dạng :

$$\vec{E} = E_x\vec{e}_x \quad \text{với} \quad E_x = \mathcal{R}e(\underline{E}_{0x}e^{j(\omega t - kz)}) = E_{0x}\cos(\omega t - kz + \phi_x).$$

Chúng ta hình dung một người quan sát tiếp nhận sóng và quan sát (*h.*6) sự biến thiên của vectơ điện trường, trong một mặt phẳng có hoành độ z_0 cho trước. Trong trường hợp này, người quan sát chỉ nhìn thấy đầu mút của điện trường dao động dọc theo trục (Ox). Chúng ta nói rằng sóng ta xét có một *sự phân cực thẳng* (*h.*7).

Một cách tổng quát hơn, nếu điện trường biến thiên trong mặt phẳng (xOy) với một độ lệch pha $\varphi = \phi_x - \phi_y$ cho trước giữa hai thành phần của nó, thì đầu mút của nó cũng vẽ ra một quỹ đạo rất đơn giản trong mặt phẳng quan sát : một elip. Khi đó ta nói đến *sự phân cực elip*.

4.1.3. Trường hợp ánh sáng tự nhiên

Đối với phần lớn các nguồn sáng cổ điển (nguồn nhiệt, đèn quang phổ, điôt phát quang, ...), ánh sáng phát ra ứng với một sự chồng chập các SPCĐS mà các điện trường ngang bị lệch pha một cách ngẫu nhiên : các sóng chồng chập đó được gọi là sóng không kết hợp. Đầu mút của điện trường tổng hợp vẽ ra trong mặt phẳng quan sát (vuông góc với phương truyền) một quỹ đạo ngẫu nhiên, không thể đặc trưng được một cách đơn giản. Khi đó ta nói rằng sóng *không phân cực*.

Chú ý :

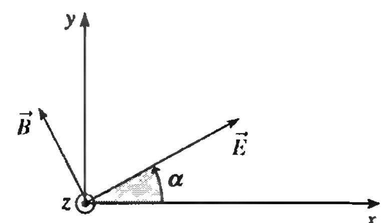
Quá trình tương tác giữa ánh sáng và vật chất có thể tạo ưu tiên cho một vài trạng thái phân cực, tạo thành sự phân cực một phần hoặc toàn phần của ánh sáng được quan sát. Chúng ta sẽ khảo sát vài trường hợp thuộc loại này ở chương 6 (sự tán xạ ánh sáng bởi các phân tử khí quyển) và trong cuốn H–Prépa, Quang học sóng, lớp đệ nhị. Ở đó một chương được dành cho sự phân cực các sóng ánh sáng.

4.2. Mô tả sự phân cực các SPCĐS

4.2.1. Sự phân cực elip

Hãy quan sát sự biến thiên theo thời gian của điện trường một SPCĐS tại $z = z_0$ cố định. Ta có thể viết (với sự sai khác một độ chênh lệch thời gian) :

- theo cách kí hiệu thực : $\begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$;
- theo cách kí hiệu phức : $\begin{cases} \underline{E}_x = E_{0x}e^{j\omega t} \\ \underline{E}_y = E_{0y}e^{-j\varphi}e^{j\omega t} \end{cases}$,

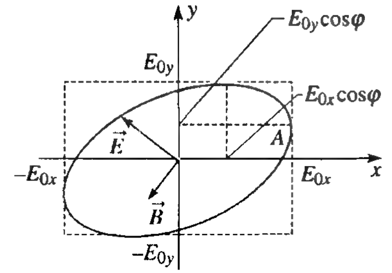


H.7. *Trường điện từ của một SPCĐS phân cực thẳng trong trường hợp $\vec{E}$ không đồng phương với (Ox) : α = cte trong toàn thể mặt phẳng có tọa độ z_0.*

ở đây $\varphi = \phi_x - \phi_y$ là sự trễ pha của thành phần E_y của trường so với thành phần E_x.

Đầu mút của vectơ điện trường chuyển động trên mặt phẳng (xOy) ở bên trong một hình chữ nhật có cạnh $2E_{0x}$ và $2E_{0y}$, trên một đường elip có phương trình trong tọa độ DESCARTES :

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\varphi + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = \sin^2\varphi .$$



H.8. *Phân cực elip (trường hợp* $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$).

Chiều di chuyển trên elip (*h*.8) có thể được xác định bằng cách viết rằng vào lúc $t = 0$, tại điểm A, khi $E_x = E_{0x}$ là cực đại, thì ta có :

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \omega E_{0y}\sin\varphi .$$

Như vậy chiều quay được chỉ ra bởi dấu của $\sin\varphi$.

Người quan sát thu nhận sóng (chú ý vị trí quan sát của người đó trên *hình 6a*) nhìn thấy đầu mút vectơ điện trường chạy trên elip theo chiều lượng giác nếu $\sin\varphi$ là dương : sự phân cực được gọi là *phân cực elip trái*. Sóng này có một tính xoắn dương (một "bức ảnh ở thời điểm t" của điện trường của sóng sẽ biểu diễn hình dáng một đường đinh ốc có đáy elip).

Ngược lại, nếu $\sin\varphi$ là âm, sự phân cực được gọi là *phân cực elip phải*. Sóng này có một tính xoắn âm.

Các trường hợp phân cực elip khác nhau có thể hình dung, được tóm tắt trên *hình* 9.

phân cực elip phải (tính xoắn âm)			**phân cực thẳng**
$-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$	$\varphi = 0$
phân cực elip trái (tính xoắn dương)			**phân cực thẳng**
$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$	$\varphi = \pm\pi$

H.9. *Phân cực elip và phân cực thẳng.*

4.2.2. SPCĐS phân cực thẳng

Trên *hình* 9, chúng ta nhận thấy rằng trong các trường hợp đặc biệt khi $\varphi = 0$ và $\varphi = +\pi$ (hoặc $-\pi$) thì điện trường nhìn thấy trong một mặt phẳng $z = z_0$ dao động mà vẫn giữ một phương cố định : sự phân cực của sóng là *phân cực thẳng*.

4.2.3. SPCĐS phân cực tròn

Nếu $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ hoặc $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, các thành phần E_x và E_y của điện trường được quan sát là vuông góc với nhau. Các trục của elip trùng với các trục (Ox) và (Oy) (*h*.9).

Hơn nữa, nếu các biên độ E_{0x} và E_{0y} là như nhau, đường clip trở thành một đường tròn : sự phân cực của sóng được gọi là phân cực tròn (*h*.10).

phân cực tròn	
tròn trái $\varphi = \frac{\pi}{2}$	tròn phải $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
y, E_0, x, $-E_0$, E_0, $-E_0$	y, E_0, x, $-E_0$, E_0, $-E_0$
kí hiệu thực $\begin{vmatrix} E_x = E_0 \cos(\omega t) \\ E_y = E_0 \sin(\omega t) \end{vmatrix}$	kí hiệu thực $\begin{vmatrix} E_x = E_0 \cos(\omega t) \\ E_y = -E_0 \sin(\omega t) \end{vmatrix}$
kí hiệu phức $\begin{vmatrix} \underline{E}_x = E_0 e^{j\omega t} \\ \underline{E}_y = -j\underline{E}_x = -jE_0 e^{j\omega t} \end{vmatrix}$	kí hiệu phức $\begin{vmatrix} \underline{E}_x = E_0 e^{j\omega t} \\ \underline{E}_y = j\underline{E}_x = jE_0 e^{j\omega t} \end{vmatrix}$

H.10. Phân cực tròn $(E_{0x} = E_{0y} = E_0)$.

Áp dụng 4

Phân tích một sóng phân cực thẳng thành sự chồng chập của hai sóng tròn

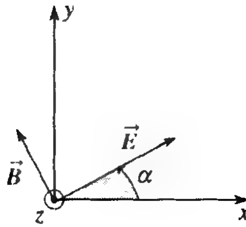
Điện trường của một sóng truyền theo phương (Oz) được cho bởi :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_x = E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - kz) \\ E_z = 0 \end{vmatrix}.$$

1) *Sự phân cực của sóng này là phân cực nào ? Vẽ sơ đồ.*

2) *Phân tích sóng này thành hai sóng phân cực tròn ngược chiều nhau.*

1) Điện trường $\vec{E}$ tạo thành một góc α không đổi với trục (Ox), vậy sóng có một sự phân cực thẳng.



H.11. *Trường điện từ của một SPCĐS phân cực thẳng : α = cte.*

2) Chúng ta có thể viết trường này dưới dạng sau đây :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz + \alpha) + \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz - \alpha) \\ \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kz + \alpha) - \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kz - \alpha) \\ 0 \end{vmatrix}$$

với một sóng tròn trái :

$$\vec{E}_{CG} = \begin{vmatrix} \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz + \alpha) \\ \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kz + \alpha) \\ 0 \end{vmatrix}$$

và một sóng tròn phải :

$$\vec{E}_{CD} = \begin{vmatrix} +\frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz - \alpha) \\ -\frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kz - \alpha) \\ 0 \end{vmatrix} .$$

Trong cách kí hiệu phức, ta có :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_0 \cos\alpha e^{j(\omega t - kz)} \\ E_0 \sin\alpha e^{j(\omega t - kz)} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{E_0}{2} e^{j\alpha} e^{j(\omega t - kz)} \\ -j\frac{E_0}{2} e^{j\alpha} e^{j(\omega t - kz)} \\ 0 \end{vmatrix}}_{\text{sóng tròn trái}} + \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{E_0}{2} e^{-j\alpha} e^{j(\omega t - kz)} \\ j\frac{E_0}{2} e^{-j\alpha} e^{j(\omega t - kz)} \\ 0 \end{vmatrix}}_{\text{sóng tròn phải}} .$$

5 Khúc nhạc mở đầu

5.1. Hằng số phổ biến c

5.1.1. Một vận tốc hữu hạn

Vận tốc c là vận tốc truyền sóng điện từ trong chân không. Vận tốc này rất lớn, thành thử thời gian truyền ánh sáng thường là không nhận thấy được. Nó không phải là vô hạn, và có thể chỉ đo được. Tương tác điện từ đặc trưng bởi lực LORENTZ không thể ứng với một tác dụng tức thời từ xa. Thuyết MAXWELL (1865) mâu thuẫn với nguyên lí tương tác tức thời từ xa (được ẩn chứa trong biểu thức định luật hấp dẫn của NEWTON, chẳng hạn) sử dụng trong cơ học GALILÉE.

5.1.2. Một vận tốc tuyệt đối

Hơn nữa, các phương trình MAXWELL có giá trị trong tất cả các hệ quy chiếu GALILÉE, và các sóng điện từ lan truyền với vận tốc c trong tất cả các hệ quy chiếu đó. Việc này mâu thuẫn rõ ràng với định luật cộng vận tốc GALILÉE.

5.1.3. Thuyết tương đối hẹp

Để giải quyết những khó khăn đó, năm 1905 EINSTEIN đã giới thiệu thuyết tương đối hẹp. Trong thuyết này, nguyên lí quán tính được giữ lại, nhờ một sự sửa đổi động học. Nó được phát biểu lại trong một không gian bốn chiều, một trong những tọa độ của một biến cố được đếm trên trục thời gian.

Từ đó vận tốc *c* xuất hiện như một hằng số phổ biến, bất biến khi thay đổi hệ tọa độ GALILÉE, nó tạo ra một cái giới hạn phía trên đối với mọi vận tốc lan truyền (năng lượng, thông tin) : vận tốc *c* là một "chân trời".

5.1.4. Vận tốc ánh sáng trong hệ mét

Tính chất cơ bản của vận tốc ánh sáng đã dẫn đến việc đo nó càng ngày càng chính xác hơn (hiện nay độ chính xác tương đối là 10^{-15}). Từ khi hằng số *c* được công nhận là một hằng số cơ bản, thực là kì cục nếu còn tiếp tục biểu thị nó tùy theo một mét chuẩn và một giây chuẩn được thực hiện bằng thực nghiệm ; tự bản chất, chúng luôn luôn biến đổi do sự chính xác được nâng cao.

Hệ đơn vị quốc tế đã chọn cách bám chắc vào một trong những hằng số vật lí cơ bản.

Năm 1983, hội nghị quốc tế cân đo đã công nhận đối với mét định nghĩa như sau : mét là chiều dài quãng đường mà ánh sáng đi qua trong chân không trong 1/299 792 458 giây. Điều đó ấn định giá trị của *x* là :

$$c = 299\ 792{,}458 \text{km.s}^{-1}.$$

5.2. Phôtôn, một cách khác để tiếp cận các sóng điện từ

Trường điện từ có một đặc tính kép : tính sóng (tiếp cận trong sách này) và tính hạt.

Ngay từ 1905 EINSTEIN đã giới thiệu khái niệm phôtôn : một sóng điện từ đơn sắc có tần số ν được tạo thành bởi các hạt gọi là "phôtôn", có khối lượng bằng không, truyền đi với vận tốc bằng *c*, giống như sóng, và có năng lượng $h\nu$ (*h* là hằng số PLANCK :

$$h = 6{,}626.10^{-34}\,\text{J.s}).$$

Như vậy, năng lượng do sóng truyền tải được lượng tử hóa và chỉ có thể biến đổi một cách gián đoạn. Sự trao đổi năng lượng giữa vật chất và trường điện từ được thể hiện bằng sự phóng, sự hấp thụ hoặc sự tán xạ các phôtôn.

Ta cũng có thể ghi nhận rằng chuẩn của động lượng một phôtôn gắn với bước sóng λ của sóng bởi :

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}.$$

Thuyết sóng và thuyết hạt là hai lí thuyết bổ sung nhau, chúng cho phép giải thích tất cả các tính chất của trường điện từ.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ SỰ LAN TRUYỀN SÓNG ĐIỆN TỪ TRONG CHÂN KHÔNG

• Sự liên kết các biến thiên trong không gian và thời gian của điện trường và từ trường là nguồn gốc của hiện tượng lan truyền các tín hiệu điện từ.

Trong chân không, sự lan truyền đó được mô tả bởi phương trình d'ALEMBERT (ba chiều) :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{và} \quad \Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0},$$

trong đó vận tốc đặc trưng c của sự lan truyền đó là $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$.

• Các sóng điện từ lan truyền trong chân không với vận tốc c, mặc dù tần số của chúng là bao nhiêu, và trong mọi hệ quy chiếu GALILÉE. Vận tốc c cũng là vận tốc lan truyền của năng lượng gắn với các sóng đó.

■ SÓNG PHẲNG CHẠY ĐIỆN TỪ

Trường điện từ của một sóng phẳng chạy lan truyền trong chân không với vận tốc c theo phương vectơ đơn vị $\vec{u}$, là một trường ngang :

$$\vec{u}.\vec{E} = \vec{0} \quad \text{và} \quad \vec{u}.\vec{B} = \vec{0}.$$

Từ trường của sóng gắn với điện trường của nó bằng hệ thức cấu trúc :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c}.$$

Điện trường $\vec{E}$ và từ trường $\vec{B}$ vuông góc với nhau và với phương truyền : tam diện $(\vec{E},\vec{B},\vec{u})$ là thuận và có ba góc vuông.

■ SÓNG PHẲNG CHẠY ĐƠN SẮC

• *Hệ thức cấu trúc*

Từ trường của một SPCĐS có tần số ω và vectơ sóng $\vec{k}$ gắn với điện trường bởi hệ thức cấu trúc :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega},$$

có giá trị trong chân không và trong các môi trường vật chất.

• *Lan truyền trong chân không*

Hệ thức tán sắc của các sóng phẳng chạy đơn sắc lan truyền trong chân không là $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.

Tam diện $(\vec{E},\vec{B},\vec{k})$ của SPCĐS trong chân không là thuận và có ba góc vuông.

• *Phân cực*

Trạng thái phân cực tổng quát nhất của một SPCĐS ứng với một sự phân cực elip. Các trạng thái phân cực thẳng, tròn trái hay tròn phải là những trường hợp riêng đáng chú ý.

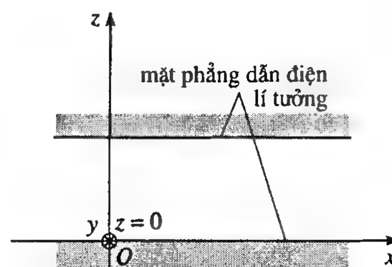
Bài tập giải sẵn 1

Sóng lan truyền giữa hai mặt phẳng

ĐỀ BÀI

Một sóng điện từ lan truyền trong chân không, song song với (Ox), giữa các mặt phẳng $z = 0$ và $z = a$ (ở các chương 7 và 9, ta sẽ thấy rằng các mặt phẳng này nhất thiết phải là các vật dẫn lí tưởng). Điện trường của nó là :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\vec{e}_y .$$



1) Từ trường gắn với sóng này là trường nào ?

2) Sóng đó có phẳng không ? Có ngang không ? Điều đó có mâu thuẫn với những giá trị các dive của điện trường và từ trường trong chân không không ?

3) Với điều kiện nào thì các trường thu được thực sự tương thích với các phương trình MAXWELL trong chân không ? Hệ thức tán sắc của các sóng khảo sát là hệ thức nào ?

4) Có thể gán cho các sóng này vận tốc pha nào ? Vận tốc đó có đặc điểm gì ?

5) Tính năng lượng trung bình chứa trong một hình hộp có thể tích $[\Delta x \Delta y \Delta z]$ với $\Delta x = \Delta y = 1$ và $\Delta z = a$.

6) Năng lượng trung bình mà sóng truyền tải trong đơn vị thời gian qua một tiết diện có chiều cao a và chiều rộng đơn vị vuông góc với phương truyền sóng là bao nhiêu ?

7) Có thể gán cho sóng này vận tốc năng lượng nào ? So sánh nó với vận tốc pha.

LỜI KHUYÊN

Để dựa vào điện trường mà xác định từ trường, phải dùng phương trình MAXWELL – FARADAY (chứ không phải phương trình MAXWELL – AMPÈRE) mà ta chỉ cần lấy tích phân đối với thời gian.

Sóng không phẳng : do đó không áp dụng được hệ thức cấu trúc của các SPCĐS, $\vec{B} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ *với* $\vec{k} = k\vec{e}_x$.

Trong giáo trình, trường của một SPC ngang có dive bằng không. Ở đây từ trường có một dive bằng không, nhưng không phải là trường ngang.

LỜI GIẢI

1) Để xác định từ trường, ta dùng phương trình MAXWELL - FARADAY :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}$$

$$= E_0\left(\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\vec{e}_x - k\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\sin(\omega t - kx)\vec{e}_z\right).$$

Lấy tích phân phương trình này đối với thời gian. Với sự sai khác một trường tĩnh - nó không tham gia sự lan truyền - ta được :

$$\vec{B} = E_0\left(\frac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\sin(\omega t - kx)\vec{e}_x + \frac{k}{\omega}\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\vec{e}_z\right).$$

2) Trong một mặt phẳng x = cte vuông góc với phương truyền sóng, điện từ trường cũng còn phụ thuộc z : sóng này không phẳng.

Điện trường của sóng là trường ngang : $\vec{E}.\vec{e}_x = \vec{0}$. Từ trường không như vậy. Ta có thể kiểm tra dễ dàng rằng cả hai dive của các trường này đều bằng không. Loại sóng này được gọi là sóng ngang điện (sóng T.E.).

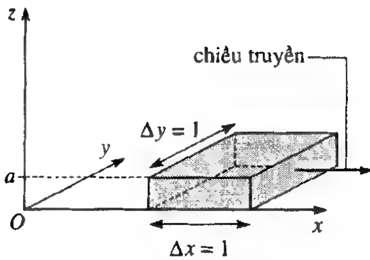
LỜI KHUYÊN

Laplaxiên của $\vec{E} = E_y\vec{e}_y$ *là :*

$$\left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right)\vec{e}_y.$$

Không có bất kì quan hệ trực tiếp nào giữa vận tốc pha và vận tốc ánh sáng. Đối với các sóng dừng, vận tốc pha là vô hạn !

Ở đây các mật độ năng lượng điện và từ không bằng nhau.



*Ở đây ta lặp lại cách lập luận trong giáo trình (§**3.3.4**) để xác định một vận tốc truyền của năng lượng gắn với sóng (ở chương 7 ta sẽ trở lại các kết quả* $v_\varphi > c$ *và* $v_e < c$ *).*

LỜI GIẢI

3) Trường được đề xuất là tương thích với các phương trình MAXWELL nếu phương trình MAXWELL - AMPÈRE cũng được nghiệm đúng, tức là $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Trong chừng mực mà chỉ còn phải kiểm tra phương trình đó thôi, ta cũng có thể dùng phương trình lan truyền $\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ (hoặc phương trình áp dụng cho $\vec{B}$). Ta có hệ thức tán sắc :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}.$$

Chỉ có thể có sự lan truyền đối với $\omega > \omega_0 = \frac{\pi c}{a}$.

4) Vận tốc pha của sóng này, truyền theo phương (Ox), là :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}.$$

Điều kì lạ là nó lớn hơn c.

5) Mật độ năng lượng điện từ là $e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$, tức là :

$$e = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\left(\left(2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos^2(\omega t - kx) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\cos^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)\sin^2(\omega t - kx)\right).$$

Trung bình theo thời gian của nó là :

$$\langle e\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left(\left(2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\cos^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right).$$

Năng lượng chứa đựng trung bình trong hình hộp là $\langle\mathscr{E}\rangle = \frac{\varepsilon_0 E^2}{4}a$.

6) Vectơ POYNTING của sóng là $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$.

Trung bình theo thời gian của nó $\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0}\frac{k}{\omega}\sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)\vec{e}_x$ cho ta thông lượng trung bình của năng lượng xuyên qua một tiết diện $S = \Delta y\Delta z = 1\times a : \langle\Phi\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0}\frac{k}{\omega}\frac{a}{2}$.

7) Vận tốc năng lượng khi đó là $v_e = \frac{\langle\Phi\rangle}{\langle\mathscr{E}\rangle} = c^2\frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$. Vận tốc này nhỏ hơn c (may mắn quá !).

Ở chương 7 ta sẽ thấy rằng vận tốc năng lượng đó đồng nhất với vận tốc nhóm v_g định nghĩa bằng $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

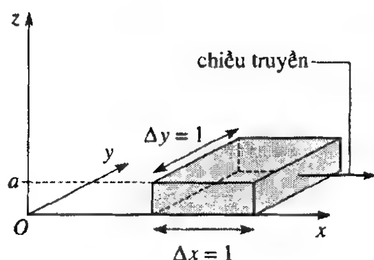
LỜI KHUYÊN

Laplaxiên của $\vec{E} = E_y\vec{e}_y$ *là :*

$$\left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right)\vec{e}_y.$$

Không có bất kì quan hệ trực tiếp nào giữa vận tốc pha và vận tốc ánh sáng. Đối với các sóng dừng, vận tốc pha là vô hạn !

Ở đây các mật độ năng lượng điện và từ không bằng nhau.



*Ở đây ta lặp lại cách lập luận trong giáo trình (§**3.3.4**) để xác định một vận tốc truyền của năng lượng gắn với sóng (ở chương 7 ta sẽ trở lại các kết quả* $v_\varphi > c$ *và* $v_e < c$ *).*

LỜI GIẢI

3) Trường được đề xuất là tương thích với các phương trình MAXWELL nếu phương trình MAXWELL - AMPÈRE cũng được nghiệm đúng, tức là $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. Trong chừng mực mà chỉ còn phải kiểm tra phương trình đó thôi, ta cũng có thể dùng phương trình lan truyền $\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ (hoặc phương trình áp dụng cho $\vec{B}$). Ta có hệ thức tán sắc :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}.$$

Chỉ có thể có sự lan truyền đối với $\omega > \omega_0 = \dfrac{\pi c}{a}$.

4) Vận tốc pha của sóng này, truyền theo phương (Ox), là :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}}.$$

Điều kì lạ là nó lớn hơn c.

5) Mật độ năng lượng điện từ là $e = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0}$, tức là :

$$e = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\left(\left(2-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos^2(\omega t - kx) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\cos^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)\sin^2(\omega t - kx)\right).$$

Trung bình theo thời gian của nó là :

$$\langle e\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left(\left(2-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\cos^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right).$$

Năng lượng chứa đựng trung bình trong hình hộp là $\langle\mathscr{E}\rangle = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{4}a$.

6) Vectơ POYNTING của sóng là $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$.

Trung bình theo thời gian của nó $\langle\vec{\Pi}\rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0}\dfrac{k}{\omega}\sin^2\left(\dfrac{\pi z}{a}\right)\vec{e}_x$ cho ta thông lượng trung bình của năng lượng xuyên qua một tiết diện $S = \Delta y\Delta z = 1\times a : \langle\Phi\rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0}\dfrac{k}{\omega}\dfrac{a}{2}$.

7) Vận tốc năng lượng khi đó là $v_e = \dfrac{\langle\Phi\rangle}{\langle\mathscr{E}\rangle} = c^2\dfrac{k}{\omega} = \dfrac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}$. Vận tốc này nhỏ hơn c (may mắn quá !).

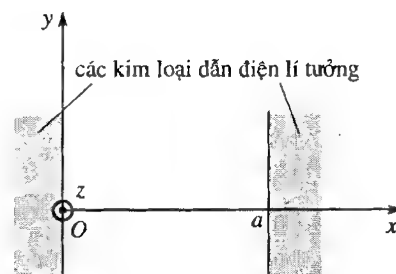
Ở chương 7 ta sẽ thấy rằng vận tốc năng lượng đó đồng nhất với vận tốc nhóm v_g định nghĩa bằng $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$.

Bài tập giải sẵn 2

Sóng phẳng dừng giữa hai mặt phẳng

ĐỀ BÀI

Người ta đặt trong chân không hai mặt phẳng dẫn điện lí tưởng, song song, có phương trình là $x = 0$ và $x = a$.



Người ta dự định khảo sát một sóng điện từ dừng, phẳng, đơn sắc, phân cực thẳng, nằm giữa hai mặt phẳng đó :

$$\vec{E} = E_0 f(x)\cos\omega t\,\vec{e}_y.$$

1) Thừa nhận rằng các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ bằng không trong một kim loại dẫn điện lí tưởng (xem các chương 7 và 9), hãy viết những điều kiện biên mà các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ phải nghiệm đúng trong chân không tại $x = 0$ và $x = a$.

2) Xác định hàm $f(x)$ và chứng tỏ rằng tần số ω nhất thiết phải lượng tử hóa.

3) Tính từ trường $\vec{B}$ của sóng đó.

4) Tính năng lượng điện $\mathscr{E}_E$ và năng lượng từ $\mathscr{E}_B$ tích lũy trong một thể tích hình trụ có trục (Ox), tiết diện S, nằm giữa hai mặt phẳng đó.

Chứng tỏ rằng có sự trao đổi thường xuyên giữa năng lượng điện và năng lượng từ.

LỜI KHUYÊN

Các điều kiện biên khác (thành phần pháp tuyến của $\vec{E}$ và thành phần tiếp tuyến của $\vec{B}$) không đặt ra bất kì điều kiện hạn chế nào phụ thêm : chúng chỉ cho phép tính ra điện tích mặt (ở đây bằng không) và dòng điện mặt trên hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = a$.

Đặc biệt ở đây không được dùng hệ thức cấu trúc $\vec{B} = \dfrac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c}$ vì sóng khảo sát không phải là SPCĐS.

Trong một môi trường hạn chế (ở đây khoảng không nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = a$), tần số của một sóng dừng đơn sắc nhất thiết phải lượng tử hóa (như trong

LỜI GIẢI

1) Ở bề mặt của kim loại có :

• sự liên tục của thành phần tiếp tuyến của $\vec{E}$; vì $\vec{E}$ đồng phương với trục (Oy), nên :

$$\vec{E}(0,t) = \vec{E}(a,t) = \vec{0}$$

• sự liên tục của thành phần pháp tuyến của $\vec{B}$, tức là :

$$\vec{B}_{pt}(0,t) = \vec{B}_{pt}(a,t) = \vec{0}$$

Ta có thể diễn tả trường $\vec{B}$ của sóng, xuất phát từ phương trình MAXWELL - FARADAY $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, nó dẫn đến :

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{\omega}\frac{df}{dx}\sin\omega t\,\vec{e}_z$$

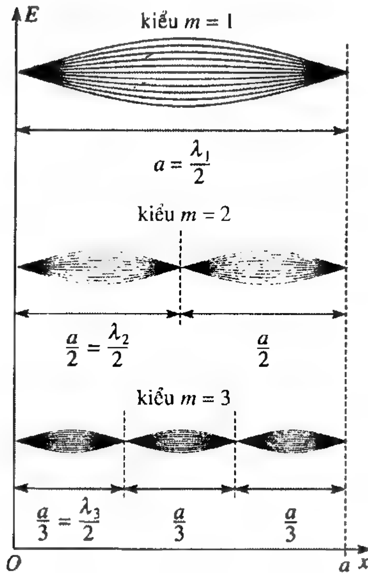
Trường $\vec{B}$ không có thành phần "pháp tuyến" $(B_x = 0)$ vậy nó đương nhiên thỏa mãn các điều kiện biên tại $x = 0$ và $x = a$.

2) Phương trình lan truyền d'ALEMBERT cho ta $\dfrac{d^2 f}{dx^2} = -k^2 f$ khi đặt $k = \dfrac{\omega}{c}$, do đó $f(x) = f_1\cos kx + f_2\sin kx$.

Các điều kiện biên đặt ra $f(0) = f(a) = 0$, do đó :

$$f_1 = 0 \text{ và } \sin ka = 0, \text{ tức là } ka = m\pi \ (m \text{ nguyên}).$$

trường hợp một sợi dây cố định ở hai đầu : xem chương 2) : ta thấy lại các kiểu dao động riêng của "cái hốc" do hai cái gương tạo thành.



Do đó số sóng k và tần số ω của sóng được lượng tử hóa và có các giá trị :

$$k_m = m\frac{\pi}{a} \quad \text{và} \quad \omega_m = m\frac{\pi}{a}c .$$

$\vec{E}$ được viết thành (khi lấy hằng số f_2 bằng 1, điều đó cũng là đưa f_2 vào hằng số E_0).

$$\vec{E} = E_0 \sin k_m x \cos\omega_m t\, \vec{e}_y .$$

3) Ta rút ngay ra được $\vec{B}$ (xem câu hỏi 1) :

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c}\cos k_m x \sin\omega_m t\, \vec{e}_z .$$

Các bụng của trường $\vec{B}$ trùng với các nút của trường $\vec{E}$, và ngược lại. $\vec{E}$ và $\vec{B}$ vuông góc với nhau trong thời gian và trong không gian.

4) Các mật độ năng lượng điện và từ bằng :

$$e_E = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} = \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{2}\sin^2 k_m x \cos^2 \omega_m t$$

$$e_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{2}\cos^2 k_m x \sin^2 \omega_m t ,$$

do đó, trong thể tích hình trụ có tiết diện S và chiều dài a thì :

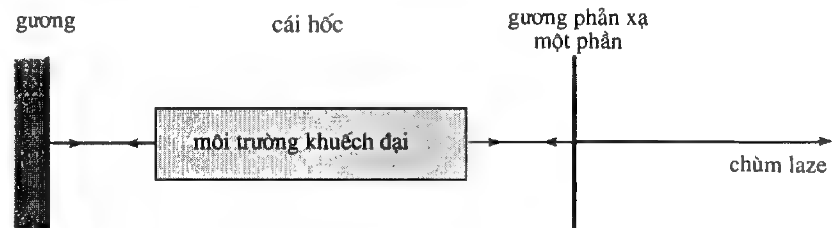
$$\mathscr{E}_E = \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{4} aS\cos^2 \omega t \qquad \text{và} \qquad \mathscr{E}_B = \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{4} aS\sin^2 \omega t .$$

Chúng ta thấy được rằng có sự trao đổi thường xuyên giữa năng lượng điện và năng lượng từ của sóng dừng. Năng lượng điện từ tổng cộng là hằng số :

$$\mathscr{E}_E + \mathscr{E}_B = \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{4} aS = \text{cte} .$$

Chú ý :

Một laze gồm có một nguồn sáng (môi trường nơi sóng điện từ được khuếch đại) đặt trong một "cái hốc" gồm hai gương song song có các lớp đa điện môi (đóng vai trò các gương kim loại trong bài toán này) ; một trong các gương là gương phản xạ một phần để chùm sáng có thể ra khỏi cái hốc !



Trong "cái hốc laze" chỉ có các sóng mà tần số ν nghiệm đúng quy tắc lượng tử hóa $\nu = \nu_m = m\frac{c}{2a}$ (đó là các kiểu dao động riêng của laze) (xem bài tập 3, chương 8).

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Sự chồng chập của hai sóng phẳng chạy đơn sắc

Một S.P.C.Đ.S điện từ có tần số ω lan truyền trong chân không. Vectơ sóng của nó là :

$$\vec{k}_1 = k_1(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_z).$$

Nó được phân cực thẳng, trường $\vec{E}$ song song với (Oy) :

$$\vec{E}_1 = E_0\cos(\omega t - \vec{k}_1.\vec{r})\vec{e}_y.$$

1) Biểu diễn sóng đó bằng đồ thị. k_1 bằng bao nhiêu ? Từ trường gắn với sóng đó là trường nào ?

2) Một sóng thứ hai có cùng tần số, biên độ và tính phân cực, mà vectơ sóng là :

$$\vec{k}_2 = k_2(\cos\alpha\vec{e}_x - \sin\alpha\vec{e}_z),$$

chồng lên sóng thứ nhất. Hai sóng này đồng pha ở gốc hệ tọa độ DESCARTES đang dùng. Vẽ đồ thị sóng đó.

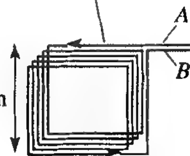
3) Biểu thị điện trường và từ trường của sóng tổng quát. Sự chồng chập của hai SPCĐS đó có phải là một SPCĐS không ?

4) Chứng tỏ rằng trường thu được giống như trường của sóng lan truyền giữa hai mặt phẳng song song khảo sát ở *bài tập giải sẵn 1*.

2 Sự thu sóng điện từ bằng một cái khung "đóng"

Một máy phát có công suất trung bình $\mathscr{P}_m = 3\text{kW}$ phát ra các sóng điện từ đơn sắc có tần số $\nu = 1\text{MHz}$, và đẳng hướng trong toàn không gian.

Ở cách máy phát một khoảng $r = 50\text{km}$ (ở khoảng cách đó, ta thừa nhận rằng sóng có cấu trúc địa phương như một sóng phẳng chạy phân cực thẳng), người ta đặt một cái khung thu sóng hình vuông phẳng, có cạnh $a = 20\text{cm}$, trên có quấn $N = 100$ vòng dây dẫn.



Gọi U là suất điện động xuất hiện ở hai cực A và B của khung khi mạch hở. Hai cực này được giả định là rất gần nhau (vài milimet).

Người ta tìm cách thu được một giá trị hiệu dụng U_{eff} của suất điện động U càng lớn càng tốt : xác định cách định hướng của khung và giá trị tương ứng của U_{eff}.

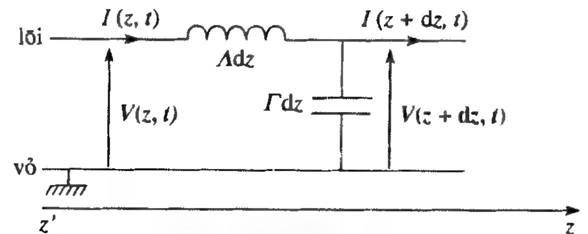
Cho biết : $c = 3.10^8\,\text{m.s}^{-1}$

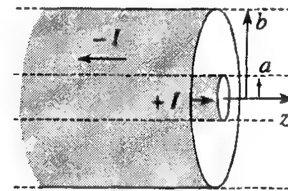
và $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\,\text{H.m}^{-1}$.

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

3 Sự lan truyền một sóng ngang trong một dây cáp đồng trục

Sự lan truyền các sóng điện trong một đường dây đã được khảo sát ở *chương 3*. Trong *Áp dụng 1*, ta đã thành lập biểu thức của điện dung dài Γ và điện cảm dài Λ của một dây cáp đồng trục mà lõi và vỏ có các bán kính a và b : $\Gamma = \dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{b}{a}}$ và $\Lambda = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$ trong đó $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ là độ thẩm điện môi của ống trụ cách điện bằng pôliêtilen ngăn cách hai vật dẫn.





1) Nêu lại phương trình liên kết và phương trình lan truyền mà dòng điện $I(z, t)$ và điện áp $V(z, t)$ nghiệm đúng.

Vận tốc v của các sóng lan truyền trong đường dây điện là bao nhiêu ?

2) Dạng tổng quát của các nghiệm $\underline{I}(z,t)$ và $\underline{V}(z,t)$ của các phương trình đó là thế nào trong cách kí hiệu phức ?

Ta muốn tìm lại các kết quả này bằng một cách tiếp cận điện từ, khi thừa nhận tính ngang của các sóng

khảo sát : điện trường và từ trường truyền theo phương trục (Oz) thì vuông góc với trục đó. Sử dụng các tọa độ trụ.

3) Ta thừa nhận rằng điện trường của sóng đối với $a < r < b$ được viết trong cách kí hiệu phức :

$$\underline{\vec{E}}(r,\theta,z,t) = \underline{E}(r,z)e^{j\omega t}\vec{e}_r .$$

Hãy bình luận sự lựa chọn đó.

4) Chứng tỏ rằng từ trường gắn với sóng trong khoảng giữa lõi và vỏ dây cáp có dạng $\underline{\vec{B}}(r,\theta,z,t) = \underline{B}(r,z)\vec{e}_\theta e^{j\omega t}$ và cho biết giá trị của $\underline{B}(r, z)$ theo $\underline{E}(r, z)$ hoặc các đạo hàm của nó.

5) Nêu liên hệ giữa trường $\vec{B}$ và dòng điện $\underline{I}(z, t)$ trong lõi của dây cáp.

6) Thành lập phương trình vi phân mà hàm $\underline{E}(r, z)$ nghiệm đúng, và dạng tổng quát của các nghiệm của nó.

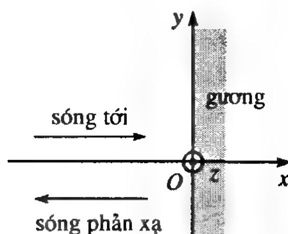
7) Các hệ thức này có cho phép tìm lại được cách mô tả sự lan truyền bằng các hàm $\underline{I}(z, t)$ và $\underline{V}(z, t)$ hay không ?

8) Tính công suất tức thời mà sóng điện từ truyền tải qua một tiết diện có hoành độ z của cái ống trụ điện môi. Hãy giải thích kết quả thu được.

Có thể sử dụng bảng công thức ở phần *Phụ lục* để biểu diễn các toán tử khác nhau trong hệ tọa độ trụ.

4 Phản xạ của một sóng trên một kim loại "lí tưởng" - Áp suất bức xạ

Một SPCĐS phân cực thẳng lan truyền trong chân không theo phương (Ox), theo chiều tăng của x : $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - kx)}\vec{e}_y$ (giả định rằng E_0 là thực và dương). Tại $x = 0$, nó đi tới mặt phẳng của một gương kim loại dẫn điện lí tưởng (ta thừa nhận rằng trong một vật dẫn như vậy thì các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ bằng không : xem *Chương 7*) và làm phát sinh một sóng phản xạ truyền theo chiều giảm của x : $\underline{\vec{E}}_r = \underline{E}_{0r} e^{j(\omega t + kx)}\vec{e}_y$.



1) Bằng cách viết các điều kiện biên mà các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ phải nghiệm đúng tại $x = 0$, hãy xác định.

a) Biên độ $\underline{E}_{0r}$ của trường phản xạ, tùy theo E_0 ;

b) Mật độ điện tích mặt σ và mật độ dòng điện mặt $\vec{j}_s$ có thể tồn tại trên bề mặt kim loại $x = 0$.

2) Xác định trường điện từ là tổng hợp của sóng tới và sóng phản xạ trong nửa không gian $x < 0$. Nêu vắn tắt đặc trưng của sóng tổng hợp.

Tính giá trị trung bình vectơ POYNTING của nó.

3) Trường điện từ tác dụng lên một mặt dS của gương một lực d$\vec{F}$ mà biểu thức trong cách kí hiệu thực là :

$$d\vec{F} = \frac{1}{2}(\sigma\vec{E} + \vec{j}_s \wedge \vec{B})dS .$$

a) Hãy đề xuất một cách giải thích sự có mặt của thừa số $\frac{1}{2}$.

b) Từ đó suy ra rằng sóng tác dụng một áp suất P lên gương, mà ta sẽ tính giá trị trung bình $\langle P\rangle$ tùy theo mật độ khối trung bình của năng lượng $\langle e_i\rangle$ của sóng tới, và tùy theo mật độ khối của năng lượng toàn phần $\langle e_{\text{toàn phần}}\rangle$ ở ngay liền kề mặt phẳng ; P được gọi là áp suất bức xạ.

c) Tính $\langle P\rangle$ đối với một sóng tới cung cấp bởi một laze có công suất trung bình $\langle \mathscr{P}_i\rangle = 3\text{mW}$ và có tiết diện thẳng $s = 0{,}4\text{mm}^2$.

5 Sóng điện từ và phôtôn Sự định hướng của đuôi sao chổi

Bài tập 4 đã chỉ ra rằng sự phản xạ của một sóng điện từ truyền thẳng góc tới một kim loại dẫn điện "lí tưởng" tạo ra một áp suất bức xạ P mà giá trị trung bình $\langle P\rangle$ gắn với mật độ trung bình của năng lượng sóng tới $\langle e_i\rangle$ bởi hệ thức $\langle P\rangle = 2\langle e_i\rangle$. Người ta muốn tìm lại kết quả này, rồi tổng quát hóa nó, bằng cách sử dụng một lí thuyết hạt (xem §5).

1) Với sóng tới, một SPCĐS có tần số ν, truyền theo phương và chiều trục (Ox), người ta gắn một chùm phôtôn truyền đi với vận tốc c, song song với trục (Ox). Ta nhắc lại rằng một phôtôn có tần số ν thì có một năng lượng $h\nu$ và một động lượng có chuẩn $p = \frac{h\nu}{c}$ (h chỉ hằng số PLANCK).

a) Có thể gán cho sóng tới mật độ hạt phôtôn n bằng bao nhiêu ? Hãy biểu thị n là hàm của $\langle e_i \rangle$, h và ν.

b) Hãy tìm lại biểu thức $\langle P \rangle = 2\langle e_i \rangle$ bằng cách xét những va chạm tuyệt đối đàn hồi của các phôtôn trên thành kim loại.

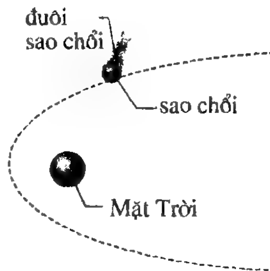
2) Hãy đề xuất một sự tổng quát hóa biểu thức giá trị trung bình của áp suất bức xạ trong trường hợp tia tới xiên góc trên mặt phản xạ, với góc tới θ.

3) Đánh giá lực tác dụng lên một hạt nhờ phản xạ, coi như một quả cầu bán kính a đặt trong một chùm sáng như vậy.

4) Hạt đó có mật độ khối lượng μ, nằm cách tâm Mặt Trời một khoảng cách r. Tính bán kính giới hạn a_0 để cho lực bức xạ do sự bức xạ của Mặt Trời cân bằng với lực vạn vật hấp dẫn của Mặt Trời.

Cho biết : $\mu = 3.10^3\,\text{kg.m}^{-3}$; hằng số hấp dẫn $G = 6{,}67.10^{-11}\,\text{kg}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}$; khối lượng Mặt Trời $M = 2.10^{30}\,\text{kg}$; công suất tổng cộng trung bình do Mặt Trời bức xạ ra : $\langle \mathcal{P} \rangle = 4.10^{26}\,\text{W}$.

Sự khảo sát đó có cho phép giải thích hay không : tại sao đám mây khí, gọi là cái đuôi của sao chổi, lại ở phía sau sao chổi khi nó lại gần Mặt Trời và ở phía trước sao chổi khi nó đi ra xa ? Mỗi chúng ta chắc đã kiểm tra được điều đó khi quan sát sao chổi HALE - BOPP vào tháng tư năm 1997.



6 ★★Khảo sát một chùm laze

Một chùm laze mảnh được biểu diễn một cách không tốt bằng một sóng phẳng, sóng này nhất thiết trải rộng vô hạn theo phương ngang trong không gian tự do. Chúng ta dự kiến tìm một phép gần đúng của phương trình lan truyền thích hợp hơn cho sự khảo sát đặc biệt các sóng ánh sáng giữ một phương gần với trục (Oz) và trải ra hữu hạn theo phương ngang.

Vì sóng nhất thiết phải hướng theo trục (Oz), ta viết điện trường dưới dạng :

$$\vec{\underline{E}}(x,y,z,t) = \underline{u}(x,y,z)e^{j(\omega t - kz)}\vec{e}_y,$$

trong đó $k = \dfrac{\omega}{c}$.

1) Giả định rằng biến thiên của $\underline{u}$ theo z là rất nhỏ so với các biến thiên theo x và y và nó biến thiên ít trên một bước sóng, hãy chứng tỏ rằng $\underline{u}$ thỏa mãn phương trình :

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial y^2} - 2jk\frac{\partial \underline{u}}{\partial z} = 0 \quad (1).$$

2) Cho một sóng cầu phát ra từ điểm trên trục có hoành độ $z = 0$.

a) Hãy cho biểu thức chính xác của biên độ phức $\underline{u}_s$ của sóng tùy theo x, y và z.

b) Trong sự gần đúng $z \gg x, y$ biểu thức đó trở thành thế nào ? Ta sẽ kí hiệu biên độ gần đúng là $\underline{u}'_s$.

c) Chứng tỏ rằng $\underline{u}'_s$ là nghiệm của phương trình (1).

3) Người ta tìm một nghiệm tổng quát hơn của phương trình (1) dưới một dạng gợi ra bởi phương trình của sóng cầu :

$$\underline{u}(x,y,z) = \underline{A}(z)e^{-jk\frac{x^2+y^2}{2\underline{q}(z)}},$$

trong đó $\underline{A}$ và $\underline{q}$ là hai hàm (phức một cách tiên nghiệm) của z.

a) Chứng tỏ rằng phương trình (1) bắt buộc $\underline{q}$ và $\underline{A}$ phải có dạng :

$$\underline{q}(z) = \underline{q}_0 + z \text{ và } \underline{A}(z) = \underline{A}_0\frac{\underline{q}_0}{\underline{q}(z)}.$$

b) Người ta giả định rằng tại $z = 0$ thì u có dạng :

$$u(x,y,0) = \underline{A}_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{a_0^2}}$$

với a_0 là một hằng số thực đã cho.

Hãy viết biên độ dưới dạng

$$\underline{u}(x,y,z) = \underline{u}_0\left(\frac{1}{R(z)} - j\frac{2}{ka^2(z)}\right)e^{-jk\frac{x^2+y^2}{2R(z)}}e^{-\frac{x^2+y^2}{a^2(z)}}$$

và biểu thị các hàm thực $R(z)$ và $a(z)$. Một nghiệm như vậy được gọi là một chùm GAUSS.

c) $a(z)$ biểu diễn cái gì ? Hãy biểu diễn $a(z)$ đối với $z \geq 0$. Chứng tỏ rằng ở một khoảng cách gốc đủ xa, chùm sáng có thể được coi như một chùm hình nón. Tính nửa góc đỉnh θ của hình trụ đó đối với $\lambda = 632{,}8\text{mm}$ và $a_0 = 0{,}3\ \text{mm}$.

d) $R(z)$ biểu diễn cái gì ? Với giá trị z_0 nào của z thì R là cực tiểu ? Tính các giá trị bằng số của z_0 và $R_{\min}$ khi lấy lại các giá trị của λ và a_0 của câu hỏi **3) c)**.

BÀI CHỮA

1 1) *SPCĐS lan truyền trong chân không, và hệ thức tán sắc của nó là* $k_1 = \frac{\omega}{c}$.

Có thể tìm được từ trường của sóng đó bằng hệ thức cấu trúc :

$$\vec{B}_1 = \frac{(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_z) \wedge \vec{E}_1}{c},$$

tức là $\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c}(-\sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_z)\cos\left(\omega\left(t - \frac{x\cos\alpha + z\sin\alpha}{c}\right)\right)$,

có thể kiểm tra điều đó ở sơ đồ trên đây.

2) $k_2 = \frac{\omega}{c}$.

3) *Điện từ trường của SPCĐS thứ hai là :*

$$\vec{E}_2 = E_0\cos\left(\omega\left(t - \frac{x\cos\alpha - z\sin\alpha}{c}\right)\right)\vec{e}_y$$

$$\vec{B}_2 = \frac{E_0}{c}(\sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_z)\cos\left(\omega\left(t - \frac{x\cos\alpha - z\sin\alpha}{c}\right)\right),$$

có thể lại kiểm tra điều đó ở sơ đồ.

Đối với hai sóng chồng chập, ta có một trường tổng cộng :

$$\vec{E} = 2E_0\cos\left(\frac{\omega z\sin\alpha}{c}\right)\cos\left(\omega\left(t - \frac{x\cos\alpha}{c}\right)\right)\vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{2E_0}{c}\left[-\sin\left(\omega\left(t - \frac{x\cos\alpha}{c}\right)\right)\sin\left(\frac{\omega z\sin\alpha}{c}\right)\sin\alpha\vec{e}_x + \cos\left(\omega\left(t - \frac{x\cos\alpha}{c}\right)\right)\cos\left(\frac{\omega z\sin\alpha}{c}\right)\cos\alpha\vec{e}_z\right].$$

4) *Bằng cách kí hiệu* $E_0' = 2E_0$, $\frac{\pi}{a} = \sin\alpha\frac{\omega}{c}$, $k = \cos\alpha\frac{\omega}{c}$ *và* $z' = z + \frac{a}{2}$, *ta có thể viết :*

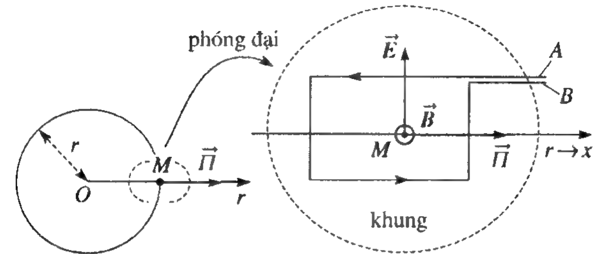
$$\vec{E} = E_0'\sin\left(\frac{\pi z'}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\vec{e}_y$$

$$\vec{B} = E_0'\left[\frac{\pi}{a\omega}\sin(\omega t - kx)\cos\left(\frac{\pi z'}{a}\right)\vec{e}_x + \frac{k}{\omega}\cos(\omega t - kx)\sin\left(\frac{\pi z'}{a}\right)\vec{e}_z\right]$$

trường này giống như trường của sóng lan truyền giữa hai mặt phẳng của bài tập giải sẵn 1.

2 $\mathscr{P}_m$ *chỉ thông lượng của giá trị trung bình* $\langle\vec{\Pi}\rangle = \langle\Pi\rangle\vec{e}_r$ *của vectơ* POYNTING *xuyên qua mặt cầu bất kì có bán kính r, có tâm tại máy phát O (giả định rằng không có sự phân tán năng lượng nào giữa máy phát và nơi có cái khung). Biết rằng* $\langle\Pi\rangle$ *chỉ phụ thuộc r (bức xạ là đẳng hướng, theo giả thiết), ta có :*

$$\mathscr{P}_m = \langle\Pi\rangle 4\pi r^2.$$



Khảo sát các bậc độ lớn : bước sóng λ của sóng điện từ bằng $\lambda = \frac{c}{\nu} = 300\,m$. *Kích thước cái khung là a = 20cm, rõ ràng là* $a \ll \lambda$.

Khung thu sóng tốt nhất nếu nó được định hướng vuông góc với trường $\vec{B}$ *của sóng, vì khi đó thông lượng của* $\vec{B}$ *trong khung là cực đại. Ta áp dụng định luật* FARADAY. *Biết rằng trường* $\vec{B}$ *có dạng :*

$$\vec{B} = \vec{B}_0\cos(\omega t - kx),$$

và có thể được giả định là đều trên tất cả bề mặt của khung (thực vậy, $ka = 2\pi\frac{\nu}{c}a \approx 4.10^{-3}$ *là rất nhỏ), ta có :*

$$U = -\frac{d\phi}{dt} \approx -s\frac{dB}{dt} = Na^2\omega B_0\omega\sin(\omega t - kx)$$

và $$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}Na^2\omega B_0 = \sqrt{2}\pi Na^2\nu B_0.$$

Chỉ còn phải viết hệ thức giữa $\langle\Pi\rangle$ *và* B_0, *tức là (xem* **§3.3.2**):

$$\langle\Pi\rangle = \frac{c\varepsilon_0}{2}E_0^2 = \frac{c}{2\mu_0}B_0^2$$

để rút ra : $U_{eff} = \sqrt{2}\pi Na^2\nu\sqrt{\frac{2\mu_0}{c}\frac{\mathscr{P}_m}{4\pi r^2}}$, *tức là*

$$U_{eff} = 0{,}5\,\text{mV}.$$

Cũng có thể tính trực tiếp e, xuất phát từ lưu số của điện trường của sóng.

3 1) *Các phương trình liên kết là :*

$$\Lambda\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad \text{và} \quad \Gamma\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial z}.$$

Từ đó rút ra các phương trình lan truyền :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \Lambda\Gamma\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0 \quad \text{và} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \Lambda\Gamma\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

Sự lan truyền được đặc trưng bởi vận tốc :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

(đó không phải là vận tốc ánh sáng trong chân không, vì ε khác với ε_0).

2) *Khi đi tìm những nghiệm phức tỉ lệ với* $e^{j\omega t}$ *, ta thu được, chẳng hạn :* $\frac{\partial^2 \underline{I}}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}\underline{I}$.

Khi đó nghiệm của các phương trình liên kết có dạng :

$$\underline{I}(r,z,t) = \underline{I}_0 e^{j(\omega t - kz)} + \underline{I}_0' e^{j(\omega t + kz)} = \underline{I}(z)e^{j\omega t}$$

$$\underline{V}(r,z,t) = Z_c(\underline{I}_0 e^{j(\omega t - kz)} - \underline{I}'_0 e^{j(\omega t + kz)}) = \underline{V}(z)e^{j\omega t}$$

với $k = \frac{\omega}{v}$ *và* $Z_c = \sqrt{\frac{1}{\Gamma}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\ln\frac{b}{a}$.

3) *Nghiệm được đề nghị phù hợp với sự mô hình hóa sự truyền tải tín hiệu điện bởi dây cáp, bằng một sự phân bố điện tích và dòng điện đối xứng tròn xoay. Điện trường được đề nghị đúng là trường ngang và thuộc về các mặt đối xứng chứa trục (Oz), và gắn với cách mô tả này.*

4) *Phương trình* MAXWELL - FARADAY $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ *, lấy tích phân sai khác một trường tĩnh không gắn với sóng đang lan truyền cho ta* $\underline{\vec{B}} = -\frac{1}{j\omega}\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{E}}$. *Có thể tính trực tiếp* $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}$ *bằng cách viết :*

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\underline{E}(r,z)e^{j\omega t}\vec{e}_r) = \overrightarrow{\text{grad}}(\underline{E}(r,z)e^{j\omega t}) \wedge \vec{e}_r + \underline{E}(r,z)e^{j\omega t}\,\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{e}_r),$$

với $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{e}_r) = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(r)) = \vec{0}$ *do đó :*

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\underline{\vec{E}}) = \frac{\partial E}{\partial z}e^{j\omega t}\vec{e}_\theta \, .$$

Bằng phép đồng nhất hóa, ta suy ra $\underline{B}(r,z) = -\frac{1}{j\omega}\frac{\partial E}{\partial z}$.

5) *Để liên kết dòng điện chạy trong lõi với từ trường, ta áp dụng định luật* AMPÈRE *tổng quát hóa :*

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{r} = \iint_{S(C)} \mu_0 \vec{j}.d\vec{S} + \iint_{S(C)} \mu_0\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.d\vec{S} ,$$

bằng cách chọn lưu tuyến là đường tròn có trục (Ox), có bán kính r nằm giữa a và b. Ta được $2\pi r\underline{B}(r,z)e^{j\omega t} = \mu_0\underline{I}(z,t)$ *, tức là* $\underline{B}(r,z) = \frac{\mu_0\underline{I}(z)}{2\pi r}$.

6) *Trong một điện môi tuyến tính có độ thẩm ε, phương trình* MAXWELL - AMPÈRE *được viết thành* $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Trong hệ trục tọa độ trụ (xem phụ lục), ta được :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{B}} = \overrightarrow{\text{rot}}(\underline{B}(r,z)e^{j\omega t}\vec{e}_\theta) = \left(-\frac{\partial B}{\partial z}\vec{e}_z + \left(\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{B}{r}\right)\vec{e}_z\right)e^{j\omega t} ,$$

Tức là, theo câu 4) : $\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{B}} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial z}e^{j\omega t}\vec{e}_r = \frac{1}{j\omega}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2}e^{j\omega t}\vec{e}_r$.

Ta rút ra $\frac{\partial^2 \underline{E}(r,z)}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}\underline{E}(r,z)$ *, phương trình này cũng được nghiệm bởi* $\underline{B}(r,z)$ *và* $\underline{I}(z)$.

Các nghiệm tương thích với các phương trình liên kết ba hàm này có dạng :

$$\underline{I}(r,z,t) = (\underline{I}_0 e^{j(\omega t - kz)} + \underline{I}_0' e^{j(\omega t + kz)})$$

$$\underline{\vec{B}}(r,z,t) = \frac{\mu_0}{2\pi r}(\underline{I}_0 e^{j(\omega t - kz)} + \underline{I}_0' e^{j(\omega t + kz)})\vec{e}_\theta$$

$$\underline{\vec{E}}(r,z,t) = \frac{1}{2\pi r}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}(\underline{I}_0 e^{j(\omega t - kz)} - \underline{I}_0' e^{j(\omega t + kz)})\vec{e}_r$$

với $k = \frac{\omega}{v}$.

7) *Điện trường có dạng :*

$$\underline{\vec{E}}(r,z,t) = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\ln\left(\frac{b}{r}\right)\right)(\underline{I}_0 e^{j(\omega t - kz)} - \underline{I}_0' e^{j(\omega t + kz)})\vec{e}_r \, .$$

Thành thử, khi kí hiệu V(z, t) là lưu số của điện trường từ r = b (tiếp đất) đến r = a (lõi), trong một mặt phẳng z = cte, ta thấy lại :

$$\underline{V}(z,t) = Z_c(\underline{I}_0 e^{j(\omega t - kz)} - \underline{I}_0' e^{j(\omega t + kz)})$$

và cách mô tả đường dây nêu ra ở chương 3 (Z_c *chỉ trở kháng đặc trưng của đường dây).*

8) *Để tính giá trị tức thời của vectơ* POYNTING, *ta trở lại cách kí hiệu thực, có dạng :*

$$I(z,t) = I_1\cos(\omega t - kz + \phi_1) + I_2\cos(\omega t + kz + \phi_2)$$

$$V(z,t) = Z_c(I_1\cos(\omega t - kz + \phi_1) - I_2\cos(\omega t + kz + \phi_2))$$

$$\vec{B}(r,z,t) = \frac{\mu_0 I(z,t)}{2\pi r}\vec{e}_\theta \quad \text{và} \quad \vec{E}(r,z,t) = \frac{V(z,t)}{r\ln\frac{b}{a}}\vec{e}_r \, .$$

Vậy vectơ POYNTING *là :*

$$\vec{\Pi}(r,z,t) = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{V(z,t)I(z,t)}{2\pi r^2\ln\frac{b}{a}}\vec{e}_z$$

Thông lượng của nó xuyên qua một tiết diện thẳng (giữa các đường tròn bán kính a và b), có hoành độ z của dây cáp đồng trục, bằng :

$$\Phi = \iint_{\text{tiết diện}} \vec{\Pi}(r,z,t).d\vec{S} = \int_{r=a}^{b}\frac{V(z,t)I(z,t)}{2\pi r^2\ln\frac{b}{a}}2\pi r\,dr$$

$$= V(z,t)I(z,t) \, .$$

Với cách viết này, sự giải thích kết quả bằng công suất điện do dây cáp truyền tải là dĩ nhiên.

4 **1) a)** *Các trường sóng $\underline{\vec{B}}_i$ của sóng tới và $\underline{\vec{B}}_r$ của sóng phản xạ được cho lần lượt bởi :*

$$\underline{\vec{B}}_i = \frac{\vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}}_i}{c}, \quad \text{tức là} \quad \underline{\vec{B}}_i = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_z ;$$

$$\underline{\vec{B}}_r = \frac{-\vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}}_r}{c}, \quad \text{tức là} \quad \underline{\vec{B}}_r = -\frac{\underline{E}_{0r}}{c} e^{j(\omega t + kx)} \vec{e}_z .$$

Ở bề mặt của kim loại, tại x = 0, có sự liên tục của thành phần tiếp tuyến của trường $\vec{E}$ (tổng cộng), ở đây là của $\vec{E}$, điều đó dẫn tới :

$$\underline{\vec{E}}_i(x = 0, t) + \underline{\vec{E}}_r(x = 0, t) = \vec{0},$$

vì trường bằng không ở bên trong kim loại (xem chương 7). Ta rút ra $\underline{E}_{0r} = -E_0$ ($\underline{E}_{0r}$ là thực).

b) *Xét các điều kiện biên khác :*

- *điện trường tiếp tuyến với bề mặt kim loại, ta rút ra $\sigma = 0$;*
- *điều kiện đối với thành phần tiếp tuyến của từ trường $\vec{B}_{\text{tiếp tuyến}} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{N}$ ($\vec{N}$ chỉ vectơ pháp tuyến đơn vị đi ra khỏi kim loại) cho phép tính được dòng mặt $\vec{j}_s$; ta được :*

$$\vec{j}_s = 2\frac{E_0}{\mu_0 c} e^{j\omega t} \vec{e}_y = 2\varepsilon_0 c E_0 e^{j\omega t} \vec{e}_y ,$$

trong cách kí hiệu thực là : $\vec{j}_s = 2\varepsilon_0 c E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$;

- *từ trường tiếp tuyến với bề mặt kim loại, điều kiện đối với thành phần pháp tuyến của $\vec{B}$, tức là $\vec{B}_{\text{pháp tuyến}} = \vec{0}$, đương nhiên được nghiệm đúng.*

2) *Trong nửa không gian x < 0, điện từ trường tổng hợp được viết thành:*

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_r = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_y - E_0 e^{j(\omega t + kx)} \vec{e}_y$$
$$= -2jE_0 \sin kx e^{j\omega t} \vec{e}_y ,$$

tức là, trong cách kí hiệu thực : $\vec{E} = 2E_0 \sin kx \sin \omega t \vec{e}_y$;

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_i + \underline{\vec{B}}_r = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_z + \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + kx)} \vec{e}_z$$
$$= 2\frac{E_0}{c} \cos kx e^{j\omega t} \vec{e}_z ,$$

tức là, trong cách kí hiệu thực $\vec{B} = 2\frac{E_0}{c} \cos kx \cos \omega t \, \vec{e}_z$.

Sóng tổng hợp là một sóng phẳng, dừng, đơn sắc, phân cực thẳng (như sóng ở bài tập giải sẵn 2), nhưng ở đây tần số không lượng tử hóa vì môi trường truyền không bị giới hạn theo chiều giảm của x.

Để diễn tả giá trị trung bình của vectơ POYNTING, có thể sử dụng tùy ý cách kí hiệu thực hoặc kí hiệu phức ; đối với một sóng dừng, dĩ nhiên ta tìm thấy $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$.

3) a) *Trong mô hình kim loại dẫn điện lí tưởng này, phải dè chừng dùng sử dụng trực tiếp tại x = 0 lực LORENTZ :*

$$d\vec{F} = (\sigma \vec{E} + \vec{j}_s \wedge \vec{B}) dS$$

(ở đây là $d\vec{F} = \vec{j}_s \wedge \vec{B} dS$, vì σ bằng không).

Thực vậy, một mật độ dòng mặt không thể tác dụng một lực lên bản thân nó (cũng như vậy, một mật độ điện tích mặt σ không thể tác dụng lực lên bản thân nó). Ở đây sự tham gia của $\vec{j}_s$ trong biểu thức của vectơ $\vec{B}$ không phải bằng không ; như vậy không thể viết được $d\vec{F} = \vec{j}_s \wedge \vec{B} dS$. Thực ra, phải sử dụng :

$$d\vec{F} = \left(\vec{j}_s \wedge \vec{B}_{\substack{\text{tạo bởi} \\ \text{mọi dòng} \\ \text{trừ } \vec{j}_s}} \right) dS \quad \text{với} \quad \vec{B}_{\substack{\text{tạo bởi} \\ \text{mọi dòng} \\ \text{trừ } \vec{j}_s}} = \frac{1}{2} \vec{B}_{\text{tổng cộng}} .$$

Thực vậy, không được lấy giá trị của từ trường tại $x = 0_-$, hoặc tại $x = 0_+$ (nó bằng không bên trong kim loại) ; một "sự nhân nhượng" không chặt chẽ là lấy giá trị trung bình :

$$\vec{B}_{\substack{\text{tạo bởi} \\ \text{mọi dòng} \\ \text{trừ } \vec{j}_s}} = \frac{1}{2}(\vec{B}(x = 0_-, t) + (\vec{B}(x = 0_+, t)) = \frac{1}{2} \vec{B}(x = 0_-, t) ,$$

điều đó cho ta hệ thức cần tìm. Lấy nửa tổng số thì đại loại cũng như là xét giá trị trung bình của trường trên "bề dầy" (nó nhất định không bằng không, bởi vì một dòng mặt hoặc một điện tích mặt chỉ là những mô hình thu được bằng cách bỏ qua bề dầy của một dòng khối hoặc một điện tích khối) của dòng điện tồn tại ở lân cận bề mặt của kim loại.

Nói một cách chặt chẽ, cách giải thích cuối cùng chỉ cho phép nói rằng ta phải nhân biểu thức $(\sigma \vec{E} + \vec{j}_s \wedge \vec{B}) dS$ với một thừa số nào đó nhỏ hơn đơn vị để có được lực tác dụng lên kim loại ; chẳng bao giờ nó cho phép nói rằng thừa số đó phải được lấy bằng $\frac{1}{2}$. Vậy ta cứ thừa nhận kết quả này, nó sẽ được biện minh một cách chặt chẽ trong bài tập 5, chương 9.

b) *Như vậy lực tác dụng lên một đơn vị điện tích của kim loại là lực thực $\vec{f} = \frac{1}{2} \vec{j}_s \wedge \vec{B}(x = 0_-, t) = P\vec{e}_z$, cái đó cho phép xác định áp suất bức xạ P. Để tính giá trị trung bình của nó, ta lại có thể tùy ý dùng cách kí hiệu thực, hoặc kí hiệu phức. Với cách kí hiệu phức :*

$$\langle \vec{f} \rangle = \mathcal{R}e\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \underline{\vec{j}}_s \wedge \underline{\vec{B}}^* \right) \right) = \varepsilon_0 E_0^2 \vec{e}_x, \text{ do đó } \langle P \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 .$$

Một áp suất bức xạ được đo bằng Pa, tức là bằng $J.m^{-3}$, giống như một mật độ năng lượng khối. Ta có thể liên kết $\langle P \rangle$ với mật độ năng lượng khối trung bình $\langle e_i \rangle$ của sóng tới, ta được :

$$\langle e_i \rangle = \left\langle \varepsilon_0 \frac{E_i^2}{2} + \frac{B_i^2}{2\mu_0} \right\rangle = \mathcal{R}e \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \frac{\underline{E}_i \underline{E}_i^*}{2} + \frac{\underline{B}_i \underline{B}_i^*}{2\mu_0} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} \langle P \rangle ,$$

điều đó cũng cho phép viết : $\langle e_{\text{tổng cộng}} \rangle = \langle P \rangle$.

c) Đối với SPCĐS tới, công suất trung bình bằng $\langle \mathscr{P}_i \rangle = c\langle e_i \rangle s$, do đó $\langle P \rangle = \frac{2}{cs}\langle \mathscr{P}_i \rangle$ và ta tìm được $\langle P \rangle = 5.10^{-5}$ Pa, tức là một giá trị vô cùng bé nhỏ !

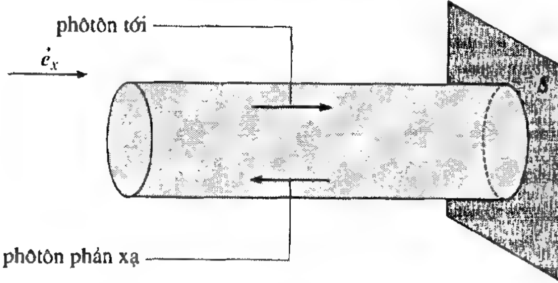
5 1) a) Ta có ngay $n = \frac{\langle e_i \rangle}{h\nu}$.

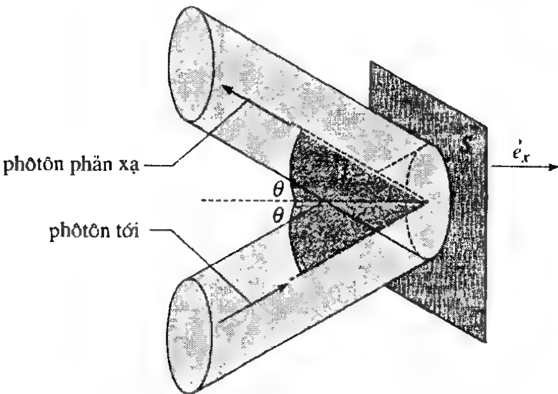
b) Xét sóng tới là một chùm phôtôn vận tốc c đến phản xạ trên một mặt S của vật liệu phản xạ.

Mỗi phôtôn tới đi đến cái thành với một động lượng $\vec{p}_i = \frac{h\nu}{c}\vec{e}_x = p\vec{e}_x$; nó phản xạ ở đó mà không mất năng lượng (va chạm tuyệt đối đàn hồi) tức là không thay đổi tần số, và lại bay đi với một động lượng $\vec{p}_r = -p\vec{e}_x$. Do đó, phôtôn truyền cho gương một động lượng bằng $-(\vec{p}_r - \vec{p}_i) = 2p\vec{e}_x$ (theo định luật tác dụng và phản tác dụng).

Số lượng phôtôn nẩy trên cái thành trong khoảng thời gian dt là $dN = nScdt$ (thực vậy, tại thời điểm t các phôtôn này nằm trong hình trụ có tiết diện S và chiều dài cdt). Những va chạm của các phôtôn này tạo ra trên cái thành một lực $\vec{F}$ cho bởi $\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}N2p\vec{e}_x$, tức là $\vec{F} = 2nS\,h\nu\vec{e}_x$, có dạng $\vec{F} = \langle P \rangle S\vec{e}_x$, với $\langle P \rangle = 2nh\nu$. Ta thấy lại $\langle P \rangle = 2\langle e_i \rangle$.

2) Trong trường hợp một sự tới xiên, ta phải biến đổi $\mathrm{d}N = n(S\cos\theta)c\mathrm{d}t$ và $-(\vec{p}_r - \vec{p}_i) = 2p\cos\theta\,\vec{e}_x$, và áp suất bức xạ trở thành : $\langle P' \rangle = \langle P \rangle \cos^2\theta$.

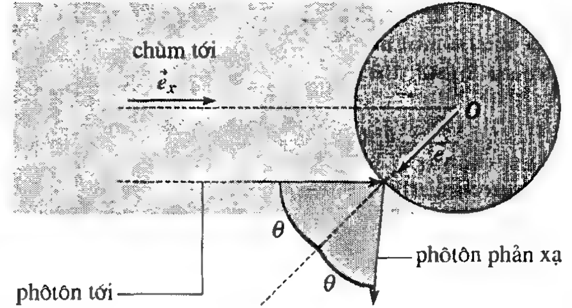




3) Ta tính toán theo tọa độ cầu có trục (Ox). Lực nguyên tố tác dụng lên một nguyên tố mặt cầu nhìn từ O dưới góc khối $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ là $\mathrm{d}\vec{F} = -(\langle P \rangle \cos^2\theta)\ (a^2\mathrm{d}\Omega)\vec{e}_r$. Vậy lực tác dụng lên viên bi có bán kính r là :

$$\vec{F} = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\vec{F} = 2\pi a^2 \langle P \rangle \left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^3\theta d\theta \right) \vec{e}_x$$

$$= \frac{\pi a^2}{2} \langle P \rangle \vec{e}_x .$$



4) Cần so sánh áp lực $\langle P \rangle \frac{\pi a^2}{2}$ (nó cho một bậc độ lớn của sức đẩy do bức xạ tác dụng, ngay cả nếu các hạt bụi không phải là các vật phản xạ bằng kim loại) với chuẩn của lực hấp dẫn do Mặt Trời.

$$\frac{GM}{r^2}\left(\frac{4}{3}\pi a^3 \mu \right).$$

Công suất $\langle \mathscr{P}_S \rangle$ do Mặt Trời bức xạ ứng với thông lượng của vectơ POYNTING trung bình xuyên qua một mặt cầu bán kính r, tức là :

$$\langle \mathscr{P}_S \rangle = 4\pi r^2 \langle \Pi \rangle = 4\pi r^2 c \langle e_i \rangle = 2\pi r^2 c \langle P \rangle .$$

Hai lực này bằng nhau nếu $\frac{GM}{r^2}\left(\frac{4}{3}\pi a_0^3 \mu \right) = \frac{\langle \mathscr{P}_S \rangle}{2\pi r^2 c} \frac{\pi a_0^2}{2}$, do đó :

$$a_0 = \frac{3\langle \mathscr{P}_S \rangle}{16\pi GM\mu c} \approx 0{,}2\,\mu m .$$

Ảnh hưởng của áp suất bức xạ mạnh hơn lực hấp dẫn đối với các hạt cỡ bán kính nhỏ hơn a_0 - cái "đuôi" của một sao chổi được tạo bởi các hạt có kích thước rất nhỏ và bức xạ của Mặt Trời có thể đẩy được nó, điều đó giải thích sự định hướng của nó.

6 1) Trường thỏa mãn phương trình lan truyền d'ALEMBERT, do đó :

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial z^2} - 2jk\frac{\partial \underline{u}}{\partial z} - k^2 \underline{u} = -\frac{\omega^2}{c^2}\underline{u} .$$

Với $k = \frac{\omega}{c}$ và giả định $\left|\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial z^2}\right|$ là không đáng kể so với $k\left|\frac{\partial \underline{u}}{\partial x}\right| = \frac{2\pi}{\lambda}\left|\frac{\partial \underline{u}}{\partial z}\right|$, ta có :

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial y^2} - 2jk\frac{\partial \underline{u}}{\partial z} = 0 \qquad (1).$$

2) a) *Ở chương 4 (Áp dụng 2) ta đã thấy rằng một sóng cầu phân kì từ điểm O có một biên độ có dạng (với* $r = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ *) :*

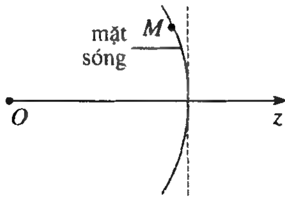
$$E(x, y, z, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

tức là, đối với một sóng đơn sắc, và theo cách kí hiệu phức :

$$\underline{E} = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)} = \underline{u}_s e^{j(\omega t - kz)} \text{ với } \underline{u}_s = \frac{A}{r} e^{jk(z-r)}.$$

b) *Nếu z rất lớn, có thể thực hiện các phép gần đúng :*

- $r = z$ *ở mẫu số ;*
- $r = z\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)$ *trong pha ; ở đây sẽ tính đến các số hạng bậc hai* $\frac{x^2}{z^2}$, $\frac{y^2}{z^2}$, *vì* $kr = \frac{2\pi}{\lambda} r$ *và bước sóng* λ *do laze phát ra là nhỏ (vào cỡ* μ*m), do đó* $\underline{u}_s \approx \underline{u}'_s = \frac{A}{z} e^{-jk\frac{x^2+y^2}{2z}}$.



c) *Có thể kiểm tra dễ dàng rằng* $\underline{u}'_s = \frac{A}{z} e^{-jk\frac{x^2+y^2}{2z}}$ *là nghiệm của phương trình (1).*

3) a) *Bằng cách đưa vào hàm đã đề xuất ở phương trình (1), ta tìm thấy :*

$$\frac{k^2}{\underline{q}^2}\left(1 - \frac{d\underline{q}}{dz}\right)(x^2 + y^2) + 2jk\left(\frac{1}{\underline{A}}\frac{d\underline{A}}{dz} + \frac{1}{\underline{q}}\right) = 0,$$

nó phải được nghiệm đúng, bất kì x và y là bao nhiêu. Ta rút ra :

$\frac{d\underline{q}}{dz} = 1$, *do đó, bằng cách tích phân,* $\underline{q} = \underline{q}_0 + z$ *(* $\underline{q}_0$ *là hằng số).*

$\frac{1}{\underline{A}}\frac{d\underline{A}}{dz} = -\frac{1}{\underline{q}} = -\frac{1}{\underline{q}_0 + z}$, *do đó, bằng cách tích phân,*

$\underline{A} = \frac{\underline{A}_0 \underline{q}_0}{\underline{q}_0 + z} = \frac{\underline{A}_0 \underline{q}_0}{\underline{q}(z)}$ *(* $\underline{A}_0$ *là hằng số).*

b) *Tại z = 0, ta phải có* $-j\frac{k}{2\underline{q}_0}(x^2 + y^2) = -\frac{1}{a_0^2}(x^2 + y^2)$, *do đó :*

$$\underline{q}_0 = j\frac{k}{2}a_0^2 = jq_1 \quad \text{bằng cách đặt} \quad q_1 = \frac{k}{2}a_0^2 \text{ (thực).}$$

Sau đó, có thể viết $\underline{u}$ *dưới dạng :*

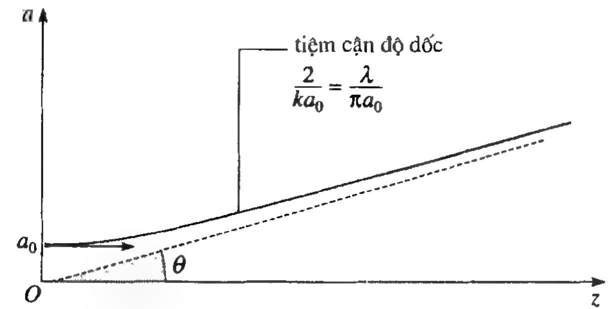
$$\underline{u} = j\underline{A}_0 q_1 \left(\frac{1}{z + \frac{q_1^2}{z}} - j\frac{q_1}{q_1^2 + z^2}\right) \exp\left(-j\frac{k}{2}\frac{x^2 + y^2}{z + \frac{q_1^2}{z}}\right) \exp\left(-\frac{k}{2}q_1\frac{x^2 + y^2}{q_1^2 + z^2}\right)$$

và ta thu được biểu thức đã đề xuất bằng cách đặt :

$$\underline{u}_0 = j\underline{A}_0 q_1, \; R(z) = z + \frac{q_1^2}{2}, \; a^2(z) = \frac{2(q_1^2 + z^2)}{kq_1} = a_0^2\left(1 + \frac{4z^2}{k^2 a_0^4}\right).$$

c) *Biên độ sóng biến thiên "ngang" theo* $\exp - \frac{x^2 + y^2}{a^2(z)}$ *; có thể nói rằng a(z) đặc trưng cho bán kính của chùm sáng ở hoành độ z.*

Sơ đồ dưới đây biểu diễn dáng vẻ của "bán kính" đó tùy theo z



Đối với z khá lớn chùm sáng hầu như là hình nón có nửa góc đỉnh $\theta \approx tg\theta = \frac{\lambda}{\pi a_0}$, *tức là* $\theta = 6,7.10^{-4}$ *rad. Chùm này là rất mảnh.*

d) *Nếu không có số hạng chứa* $a^2(z)$, *sóng khảo sát sẽ là một sóng cầu (*$\underline{u}$ *giống như biên độ* $\underline{u}'_s$ *của câu **2) b)**) và* $R(z) = z + \frac{q_1^2}{z}$ *có thể được gọi là bán kính chính khúc của sóng đó. Chú ý rằng R(z) là vô hạn tại z = 0.*

Đối với $z_0 = q_1$, *R đi qua một giá trị cực tiểu :*

$$R_{min} = 2q_1 = ka_0^2 = \frac{2\pi a_0^2}{\lambda},$$

tức là $z_0 = 0,45\text{m}$ *và* $R_{min} = 0,89\text{m}$.

6

BỨC XẠ CỦA LƯỠNG CỰC ĐIỆN

MỤC TIÊU

- Bức xạ điện từ của một lưỡng cực.
- Minh họa các kết quả thu được.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Các phương trình MAXWELL.
- Sự lan truyền các sóng điện từ trong chân không.

Mở đầu

Ở chương 5, chúng ta đã khảo sát sự lan truyền các sóng điện từ. Bây giờ chúng ta quan tâm đến một nguồn bức xạ điện từ.

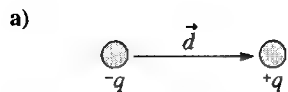
Mô hình được đề xuất, mô hình một lưỡng cực bức xạ, thường ứng với cái bản chất của bức xạ do các nguyên tử phát ra.

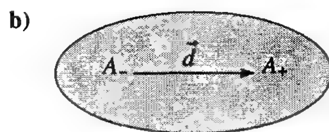
Bức xạ của các ăngten phát vô tuyến điện cũng có thể được mô tả như bức xạ của các lưỡng cực bức xạ phân bố dọc theo ăngten.

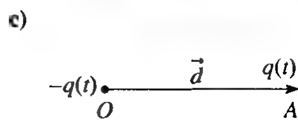
Các khía cạnh đó cho ta thấy cái hay của việc khảo sát sự bức xạ của lưỡng cực.

Phép chứng minh đề xuất ở đây, mặc dù chỉ là sơ đẳng, sẽ chỉ ra rằng việc khảo sát các nghiệm của các phương trình MAXWELL có thể nhanh chóng trở nên gay go. Chúng ta sẽ cố gắng rút ra cái bản chất của các kết quả thu được, và chỉ ra một vài khía cạnh thực tế của chúng.

1 Trường điện từ của một lưỡng cực điện biến thiên







H.1. *Lưỡng cực.*
a. *Cách biểu diễn sơ đẳng.*
b. *Cá thể phân cực.*
c. *Sự mở rộng.*

1.1. Những cơ sở của phép tính

1.1.1. Mô hình hóa nguồn bức xạ

■ **Lưỡng cực nguyên tố**

Hình ảnh cổ điển sơ đẳng của một nguyên tử hiđrô gồm một êlectrôn hầu như hình điểm, có điện tích $-q$ ($q = e$), quay quanh một prôtôn hầu như cố định. Mômen lưỡng cực tức thời của nguyên tử đó là $\vec{p}(t) = q\vec{d}(t)$, trong đó $\vec{d}(t)$ chỉ vị trí tương đối của hạt nhân so với êlectrôn (*h.*1a).

Một cách tổng quát hơn, một nguyên tử hoặc một phân tử có thể có một sự tách điện tích : các trọng tâm A_+ của các điện tích dương và A_- của các điện tích âm, có các điện tích tương ứng $+q$ và $-q$, được tách rời nhau. Khi đó có một mômen lưỡng cực tức thời $\vec{p}(t) = q\vec{d}(t)$, với $\vec{d}(t) = \overrightarrow{A_-A_+}(t)$ (*h.*1b).

■ **Mở rộng cách kí hiệu : $\vec{p}(t)$**

Một mômen lưỡng cực tức thời cũng có thể được biểu diễn bằng một lưỡng cực có điện tích cố định, nhưng biến thiên (*h.*1c), đối với chúng ta sẽ kí hiệu :

$$\vec{p}(t) = q(t)\vec{d}$$

Khi đó sẽ có một dòng điện $i = \frac{dq}{dt}$ giữa hai điện tích. Đặt rất nhiều các lưỡng cực nguyên tố loại đó nối liền nhau, chúng ta có thể mô hình hóa một vật dẫn mảnh có dòng điện biến thiên chạy qua, tức là một ăngten.

Sau đây, chúng ta sẽ chỉ nguồn bức xạ bằng mômen lưỡng cực $\vec{p}(t)$ của nó, mà không cần nhắc đến bản chất cụ thể của nó.

1.1.2. Đặt vấn đề

Chúng ta muốn xác định trường điện từ do lưỡng cực đó bức xạ ra, tức là muốn giải các phương trình MAXWELL.

Các phương trình MAXWELL độc lập đối với các nguồn :

$$\begin{cases} \text{div}\vec{B} = \vec{0} & \text{(MAXWELL – thông lượng)} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(MAXWELL – FARADAY)} \end{cases}$$

bảo đảm sự tồn tại của thế vô hướng V và thế vectơ $\vec{A}$:

$$\begin{cases} \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} \\ \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

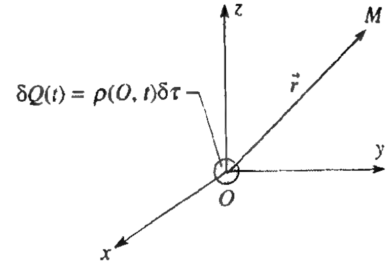
Với phép định cỡ LORENTZ :

$$\text{div}\vec{A}(M,t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V(M,t)}{\partial t} = 0,$$

hai phương trình MAXWELL liên kết trường với các nguồn (MAXWELL–GAUSS và MAXWELL–AMPÈRE) dẫn đến hai phương trình thế :

$$\begin{cases} \Delta V - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Delta \vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \end{cases}.$$

Việc xác định các nghiệm vật lí của các phương trình này cho phép chúng ta suy ra trường điện từ do một lưỡng cực biến thiên tạo ra.



H.2. *Điện tích nguyên tố $\delta Q(t)$ đặt tại O.*

1.2. Thế vô hướng và thế vectơ

1.2.1. Thế trễ

1.2.1.1. Mở đầu định tính

Chúng ta hãy quan tâm đến sự đóng góp $\delta V(M, t)$ vào nghiệm của phương trình thế vô hướng tại M tạo ra bởi một điện tích nguyên tố $\delta Q(t) = \rho(O, t)\delta\tau$ chứa trong một thể tích nguyên tố $\delta\tau$ đặt ở gốc O của hệ tọa độ (*h.*2).

Số hạng $\delta V(M, t)$ tạo ra bởi nguyên tố vô cùng nhỏ, hầu như hình điểm này, đặt tại gốc, phải là không đổi trong một phép quay quanh một trục đi qua điểm O, do đó $\delta V(M, t) = \delta V(r, t)$.

Đối với r khác không, δV nghiệm đúng phương trình sóng d'ALEMBERT :

$$0 = \Delta[\delta V(r,t)] - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\delta V(r,t)]$$

với $\Delta[\delta V(r,t)] = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}[r\delta V(r,t)]$, mà ta biết rằng (xem *chương 4, áp dụng 2*) các nghiệm chỉ phụ thuộc r và t là những sóng cầu :

$$\delta V(r,t) = \frac{1}{r}f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}g\left(t + \frac{r}{c}\right).$$

Số hạng "$\dfrac{f}{r}$" biểu thị một sóng cầu phân kì, lan truyền đi từ nguồn điểm đặt ở gốc. Nếu ta xét các nghiệm δV gắn với sự tồn tại của nguồn δQ bắt đầu hoạt động từ một thời điểm gốc cho trước, điều tất nhiên là chỉ cần giữ lại loại nghiệm này của phương trình sóng, tức là :

$$\delta V(r,t) = \frac{1}{r}f\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

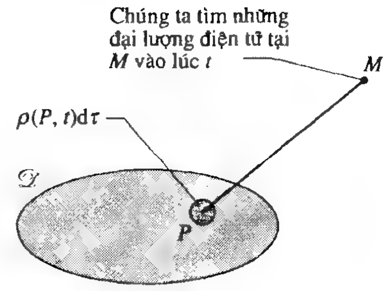
Hơn nữa, khi r dần tới 0, nghiệm này phải có một hành vi tiệm cận thuộc loại :

$$\delta V(r \to 0, t) \approx \frac{\delta Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Từ đó, ta rút ra nghiệm cần tìm :

$$\delta V(r,t) \approx \frac{\delta Q\left(t - \dfrac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Chú ý rằng lượng $\frac{r}{c}$ biểu thị thời gian cần thiết để một tương tác lan truyền từ O đến M với vận tốc v.



H.3. *Nguồn bức xạ ρ(P, t) cho phép tính ra các đại lượng tại M vào lúc t.*

1.2.1.2. Thế trễ (gọi là thế LIÉNARD - WIECHERT)

Chúng ta thừa nhận rằng có thể áp dụng kết quả trên đây cho trường hợp một sự phân bố $\mathcal{D}$ các điện tích và dòng điện có kích thước hữu hạn, coi như một sự chồng chập của các cá thể nguyên tố, có vị trí đánh dấu bởi một điểm P chạy trên sự phân bố. Như vậy, tại điểm M, thế vô hướng có dạng (h.3).

$$V(M,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathcal{D}}\frac{\rho\left(P,t-\frac{PM}{c}\right)}{PM}d\tau.$$

Lập luận này có thể được lặp lại cho thế vectơ, nó dẫn tới :

$$\vec{A}(M,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\mathcal{D}}\frac{\vec{j}\left(P,t-\frac{PM}{c}\right)}{PM}d\tau.$$

Như vậy ta thu được các thế tương tự như các thế mà ta đã thu được trong giáo trình điện từ học (xem *H–Prépa, Điện từ học, năm thứ nhất và thứ hai*) đối với các chế độ (hầu như) không đổi.

Các biểu thức đó làm xuất hiện một sự chênh lệch thời gian $\Delta t=\frac{PM}{c}$: trạng thái phân bố tại một trong các điểm P được cảm nhận ở điểm M với một sự chậm trễ bằng Δt mà ta có thể lí giải như một sự chậm trễ ở sự truyền thông tin được tải đi với vận tốc ánh sáng.

Vì lí do đó, các nghiệm đó mang tên là *thế trễ*.

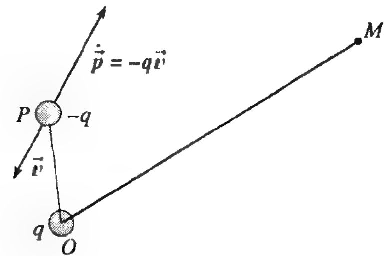
1.2.2. Thế vectơ của lưỡng cực

Ta lấy lại hình ảnh ban đầu về một điện tích $-q$ tại một điểm P di động với vận tốc $\vec{v}$, ở lân cận một điện tích q cố định đặt tại O. Biểu thức của thế vectơ trễ rút lại thành (h.4) :

$$\vec{A}(M,t)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\left(P,t-\frac{PM}{c}\right)}{PM}$$

mà ta có thể viết một cách tổng quát hơn nhờ mômen lưỡng cực, với $\dot{\vec{p}}=\frac{\partial\vec{p}}{\partial t}=-q\vec{v}$:

$$\vec{A}(M,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\vec{p}}\left(P,t-\frac{PM}{c}\right)}{PM}.$$

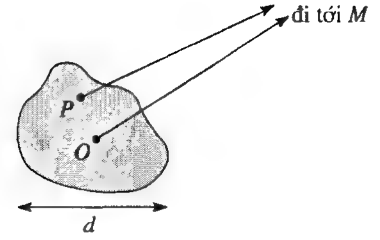


H.4. *Trường hợp lưỡng cực.*

Hệ thức này chắc chắn là có giá trị đối với một phân bố lưỡng cực bất kì. Sau đây ta sẽ thực hiện hai phép gần đúng cơ bản, mà phép thứ nhất là :

• *khoảng cách quan sát $OM = r$ là rất lớn so với kích thước của phân bố :* $r \gg d$.

Khi đó ta có thể coi $\frac{1}{PM}$ và $\frac{1}{r}$ là như nhau (*h.5*).



H.5.

Tuy nhiên phép gần đúng đó không nhất thiết cho phép ta viết :

$$\dot{\vec{p}}\left(P, t - \frac{PM}{c}\right) = \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Muốn thế sự chênh lệch thời gian vào cỡ $\frac{d}{c}$ mà ta tìm cách bỏ qua phải là rất nhỏ trước thang thời gian đặc trưng của sự biến thiên của mômen lưỡng cực.

Để hình dung được, ta hãy xét một hạt q đang thực hiện những dao động với biên độ d và tần số ω. Thời gian đặc trưng của biến thiên là $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Phép gần đúng ta đang xét chỉ có giá trị khi $\frac{d}{c} \ll T$. Thế nhưng vận tốc của hạt dao động là vào cỡ $v = \omega d$, và bất đẳng thức trên cũng có thể viết thành $v \ll c$.

Bây giờ ta có thể nói rõ phép gần đúng thứ hai :

• *chuyển động của các hạt tích điện làm thay đổi giá trị của mômen lưỡng cực là phi tương đối tính.*

Chú ý rằng bước sóng trong chân không của một sóng điện từ phẳng có chu kì T là $\lambda = cT$.

Vậy bất đẳng thức trên cũng có thể viết thành $d \ll \lambda$.

Thế vectơ tại M vào lúc t, gắn với một lưỡng cực biến thiên $\vec{p}(t)$, có kích thước không gian cùng bậc với d, ở lân cận một điểm O, biến thiên theo một thang thời gian đặc trưng T, có thể được viết là :

$$\vec{A}(M,t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

nếu hai điều kiện sau đây được thỏa mãn :

• **$d \ll r = OM$ (phép gần đúng lưỡng cực) ;**

• **$d \ll \lambda = cT$ (phép gần đúng phi tương đối tính).**

Để đơn giản hóa sự xác định trường điện từ, ta giả thử rằng lưỡng cực dao động theo tần số ω. Theo cách kí hiệu phức, ta viết được :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{j\omega t}, \text{ tức là } \frac{\partial^n \vec{p}}{\partial t^n} = (j\omega)^n \vec{p}.$$

Do sự tuyến tính của vấn đề đang khảo sát, sự lựa chọn chế độ điều hòa không làm phương hại đến tính tổng quát của các cách viết mà ta sẽ gặp. Nếu cần, chúng ta có thể trở lại các cách kí hiệu $\vec{p}$, $\dot{\vec{p}}$, $\ddot{\vec{p}}$.

Thế vectơ $\vec{A}(M,t)$ trở thành :

$$\underline{\vec{A}}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j\omega}{r} \underline{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j\omega}{r} \vec{p}_0 e^{j(\omega t - kr)}$$

với kí hiệu $k = \frac{\omega}{c}$.

Áp dụng 1

Biện luận về các phép gần đúng đề cập trong phạm vi mẫu BOHR

Trong mẫu BOHR của nguyên tử hiđrô, một êlectrôn (điện tích −e, khối lượng m) đi theo một quỹ đạo tròn bán kính R quanh một prôtôn cố định (khối lượng $M \gg m$, điện tích e).

1) *Biểu thị động năng của êlectrôn, thế năng tương tác giữa êlectrôn và hạt nhân và cơ năng theo R và các hằng số của bài toán.*

Động năng L có thể lấy một loạt các giá trị là bội nguyên của $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h là hằng số PLANCK : $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s), tức là $L_n = n\hbar$ (n nguyên, dương). Hãy chứng tỏ rằng giả thuyết lượng tử hóa đòi hỏi sự lượng tử hóa của bán kính $R = R_n$, của năng lượng $\mathscr{E} = \mathscr{E}_n$ và của vận tốc $v = v_n$ của êlectrôn.

Cho biết :

$e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg ;

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 \text{F}^{-1}.\text{m}.$$

2) *Các bậc độ lớn thu được cho R và v có khả năng biện minh cho hai phép gần đúng đề xuất trên đây không (xem §**1.2.2**) ?*

1) Ta kí hiệu e^{*2} là hằng số tương tác tĩnh điện $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$. Lực mà hạt nhân tác dụng lên êlectrôn là :

$$\vec{f} = -\frac{e^{*2}}{r^2}\vec{e}_r .$$

Khi chiếu xuống vectơ bán kính, hệ thức cơ bản của cơ học áp dụng cho êlectrôn trên quỹ đạo tròn (đều) được viết thành :

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{e^{*2}}{R^2} .$$

Năng lượng cơ học của êlectrôn bằng :

$$\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^{*2}}{R} = -\frac{e^{*2}}{2R}$$

và mômen động của nó bằng :

$$L = mRv = (e^{*2}mR)^{\frac{1}{2}}$$

Điều kiện lượng tử hóa của mômen động $L_n = n\hbar$ kéo theo điều kiện lượng tử hóa của :

- bán kính :

$$R = R_n = n^2 R_1 \text{, trong đó } R_1 = \frac{\hbar^2}{me^{*2}} ;$$

- năng lượng :

$$\mathscr{E}_n = \frac{\mathscr{E}_1}{n^2} \text{, trong đó } \mathscr{E}_1 = -\frac{me^{*4}}{2\hbar^2} ;$$

- vận tốc :

$$v_n = \frac{v_1}{n} \text{, trong đó } v_1 = \frac{e^{*2}}{\hbar} .$$

Đối với $n = 1$, bán kính quỹ đạo bằng bán kính BOHR :

$$R_1 = \frac{\hbar^2}{me^{*2}} = 0{,}53.10^{-10} \text{ m}$$

(đơn vị tự nhiên của độ dài đối với vật lí nguyên tử), và vận tốc nghiệm đúng

$$\frac{v_1}{c} \approx \frac{1}{137} .$$

2) Giá trị bằng số của R_1 chỉ ra rằng phép gần đúng thứ nhất $r \gg R$ dễ dàng được nghiệm đúng.

Giá trị của $\frac{v}{c} \approx \frac{1}{137}$ chỉ ra rằng phép gần đúng về điện tích phi tương đối tính là đạt yêu cầu.

Mô hình mà ta triển khai ở đây cho phép mô tả một cách khá tốt sự bức xạ lưỡng cực điện của một nguyên tử.

1.2.3. Thế vô hướng

Ta có thể xác định thế vô hướng gắn với lưỡng cực bằng cách sử dụng điều kiện định cỡ LORENTZ :

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} = -c^2 \text{div}\underline{\vec{A}} \quad \text{với} \quad \underline{\vec{A}}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{j\omega}{r}\vec{p}_0 e^{j(\omega t - kr)}.$$

Ta thu được (bằng cách sử dụng các công thức của *hình 6*) :

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 c^2}{4\pi} div\left(\frac{j\omega \vec{p}_0 e^{j(\omega t - kr)}}{r}\right) = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{r^2} + \frac{-\omega^2}{rc}\right)\vec{e}_r . \vec{p}_0 e^{j(\omega t - kr)}$$

mà ta có thể tích phân thành :

$$\underline{V}(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{j\omega}{rc}\right)\vec{e}_r . \vec{p}_0 e^{j(\omega t - kr)}$$

với sự sai khác một thế tĩnh. Thế tĩnh này không phải là đặc trưng của lưỡng cực, vì ta nhận ra được trong số hạng thứ nhất thế "tĩnh" (hay đúng ra là thế "tức thời") của một lưỡng cực : $V = \frac{\vec{p}.\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

1.3. Điện trường và từ trường

Để cho cách viết đơn giản hơn, từ nay ta giả định rằng mômen lưỡng cực có dạng $\vec{p}(t) = p(t)\vec{e}_z$ và ta sẽ dùng các tọa độ cầu (*h*.7) có trục (*Ox*) để diễn tả thế vô hướng và thế vectơ, điện trường và từ trường. Điều này không làm hẹp tính tổng quát của sự khảo sát : các phương trình MAXWELL là tuyến tính, đối với một lưỡng cực bất kì, chỉ cần chồng chập các tác dụng của các thành phần khác nhau là được.

Trong điều kiện đó, chúng ta sẽ dùng các biểu thức sau đây của các thế :

$$\begin{cases} \underline{V}(M,t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{j\omega}{rc}\right)\cos\theta\, p_0 e^{j(\omega t - kr)} \\ \underline{\vec{A}}(M,t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{j\omega}{r} p_0 e^{j(\omega t - kr)} \vec{e}_z \end{cases}.$$

1.3.1. Điện trường

Trường $\underline{\vec{E}}$ bằng $\underline{\vec{E}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\underline{V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$; ta hãy tính hai số hạng đó :

• một mặt :

$$-\overrightarrow{grad}\underline{V}(M,t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\partial \underline{V}(M,t)}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{V}(M,t)}{\partial \theta}\vec{e}_\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2j\omega}{r^2 c} + \frac{-\omega^2}{rc^2}\right)\cos\theta\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r^3} + \frac{j\omega}{r^2 c}\right)\sin\theta\vec{e}_\theta\right) p_0 e^{j(\omega t - kr)} \;;$$

• mặt khác :

$$-\frac{\partial \underline{\vec{A}}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2}{r} p_0 e^{j(\omega t - kr)}\vec{e}_z = \frac{\mu_0\omega^2}{4\pi}\frac{p_0 e^{j(\omega t - kr)}}{\mathrm{r}}(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta).$$

• **Đạo hàm vectơ**

$$\begin{cases} \text{div}(f\vec{u}) = \vec{u}.\overrightarrow{\text{grad}}f + f\text{div}\vec{u} \quad (1) \\ \overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{u}) = \overrightarrow{\text{grad}}f \wedge \vec{u} + f\overrightarrow{\text{rot}}\vec{u} \quad (2) \end{cases}$$

với $\overrightarrow{\text{grad}}(r) = \vec{e}_r$ (3).

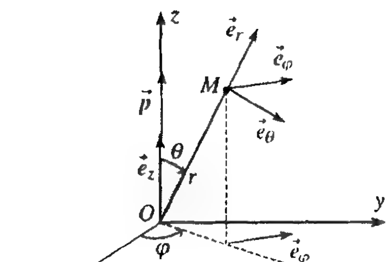
• **Các hàm của** $t - \frac{r}{c}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial t} = \dot{f}\left(t - \frac{r}{c}\right) \\ \overrightarrow{\text{grad}}\left(f\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) = -\dfrac{\vec{e}_r}{c}\dot{f}\left(t - \frac{r}{c}\right) \end{cases}$$

tức là, đối với một vectơ không đổi $\vec{u}$:

$$\begin{cases} div\left(f\left(t - \frac{r}{c}\right)\vec{u}\right) = -\dfrac{\vec{u}.\vec{e}_r}{c}\dot{f}\left(t - \frac{r}{c}\right) \\ \overrightarrow{\text{rot}}\left(f\left(t - \frac{r}{c}\right)\vec{u}\right) = -\dfrac{\vec{e}_r \wedge \vec{u}}{c}\dot{f}\left(t - \frac{r}{c}\right) \end{cases}.$$

H.6. *Sổ tay công thức nhỏ.*



H.7. *Hệ trục và tọa độ cầu.*

Từ đó rút ra điện trường :

$$\underline{\vec{E}}(M,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{2}{r^3}+\frac{2j\omega}{r^2c}\right)\cos\theta\,\vec{e}_r\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{r^3}+\frac{j\omega}{r^2c}+\frac{-\omega^2}{rc^2}\right)\sin\theta\,\vec{e}_\theta\right]p_0 e^{j(\omega t-kr)}.$$

Mọi mặt phẳng chứa trục (Oz), tức là chứa lưỡng cực, đều là mặt đối xứng của nguồn điện trường đó. Chúng ta sẽ kiểm tra thấy rằng *vectơ* điện trường nằm trong các mặt phẳng này.

1.3.2. Từ trường

Chúng ta sử dụng các công thức của *hình 6*. Để tính $\vec{B}=\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$, ta có :

$$\underline{\vec{B}}(M,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{r^2}+\frac{-\omega^2}{rc}\right)\sin\theta\, p_0 e^{j(\omega t-kr)}\vec{e}_\varphi.$$

Chúng ta kiểm tra được rằng *giả vectơ* từ trường vuông góc với các mặt đối xứng chứa trục (Oz).

2 Bức xạ lưỡng cực điện

2.1. Trường bức xạ

2.1.1. Miền bức xạ : $d \ll \lambda \ll r$

Khi kí hiệu $\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}$, ta thấy rằng trường điện từ của lưỡng cực chứa các số hạng tỉ lệ với :

$$\frac{1}{r^3},\ \frac{\omega}{r^2c}=2\pi\frac{1}{r^2\lambda}\quad \text{và}\quad \frac{\omega^2}{rc^2}=4\pi^2\frac{1}{r\lambda^2}.$$

Tùy theo giá trị của khoảng cách quan sát, ta có thể rút ra một số hạng có ưu thế nhất, và viết ra một dạng gần đúng của trường điện từ của lưỡng cực.

Trong thực tế, phép gần đúng $r \gg \lambda$ phù hợp với các bậc độ lớn thông thường : bước sóng (vào cỡ micrômet trong miền nhìn thấy, chẳng hạn) thường là rất nhỏ so với khoảng cách tại đó bức xạ được dò tìm.

Miền gọi là miền bức xạ (hay miền xa) được xác định bởi :

$$d \ll \lambda \ll r.$$

Trong miền bức xạ, ta có :

$$\frac{1}{r^3}\ll\frac{1}{r^2\lambda}\ll\frac{1}{r\lambda^2},\ \text{tức là}\ \frac{1}{r^3}\ll\frac{\omega}{r^2c}\ll\frac{\omega^2}{rc^2},\ \text{do đó}\ \frac{|p|}{r^3}\ll\frac{|\dot{p}|}{r^2c}\ll\frac{|\ddot{p}|}{rc^2}.$$

Một dạng gần đúng của trường điện từ do một lưỡng cực bức xạ ra là :

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{-\omega^2 p_0 e^{j(\omega t - kr)}}{rc^2}\right)\sin\theta\vec{e}_\theta \\ \underline{\vec{B}} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\left(\dfrac{-\omega^2 p_0 e^{j(\omega t - kr)}}{rc}\right)\sin\theta\vec{e}_\varphi \end{cases}$$

hoặc là (theo cách kí hiệu thực) :

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\ddot{p}\left(t-\dfrac{r}{c}\right)}{rc^2}\right)\sin\theta\vec{e}_\theta \\ \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\left(\dfrac{\ddot{p}\left(t-\dfrac{r}{c}\right)}{rc}\right)\sin\theta\vec{e}_\varphi \end{cases}.$$

2.1.2. Trường bức xạ

2.1.2.1. Dạng tuyệt đối của trường bức xạ

Các biểu thức ở trên ứng với trường bức xạ của một lưỡng cực dao động, có mạch số ω, hướng song song với (Oz). Chúng được diễn đạt trên cơ sở các tọa độ cầu có trục (Oz).

Chúng có thể được tổng quát hóa, do tính chất tuyến tính, cho một lưỡng cực bất kì :

$$\vec{p}(t) = p_x(t)\vec{e}_x + p_y(t)\vec{e}_y + p_z(t)\vec{e}_z$$

bằng cách đồng nhất hóa thừa số $j\omega$ với một phép đạo hàm theo thời gian, tức là theo phép kí hiệu thực :

$$\begin{cases} \vec{E}(M,t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\left(\ddot{\vec{p}}\left(t-\dfrac{r}{c}\right)\wedge\vec{e}_r\right)\wedge\vec{e}_r}{rc^2} \\ \vec{B}(M,t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\ddot{\vec{p}}\left(t-\dfrac{r}{c}\right)\wedge\vec{e}_r}{rc} \end{cases},$$

trong đó $\vec{e}_r$ là vectơ đơn vị hướng từ lưỡng cực tới điểm quan sát.

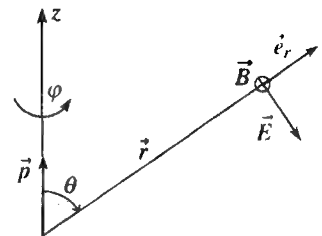
2.1.2.2. Cấu trúc của trường bức xạ

Trường thu được có những điểm tương tự với các sóng vô hướng cầu phân kì :

$$\psi(r,t) = \frac{f\left(t-\dfrac{r}{c}\right)}{r},$$

truyền đi với vận tốc c ; phương truyền địa phương được chỉ rõ bởi vectơ xuyên tâm $\vec{e}_r$.

Cấu trúc địa phương cũng đáng chú ý : điện trường và từ trường vuông góc với vectơ $\vec{e}_r$ và $\vec{E}(\vec{r},t) = c\vec{B}(\vec{r},t)\wedge\vec{e}_r$, giống như đối với một SPC điện từ truyền trong chân không song song với vectơ $\vec{e}_r$ (*h*.8).



H.8. *Cấu trúc của trường điện từ bức xạ bởi một lưỡng cực dao động.*

Trong miền bức xạ $(d \ll \lambda \ll r)$, trường điện từ do lưỡng cực gây ra :

- **giảm tỉ lệ với $\frac{1}{r}$;**
- **tỉ lệ với $\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$, tức là với gia tốc của hạt bức xạ ;**
- **có một cấu trúc *cục bộ* của một sóng điện từ phẳng chạy trong chân không, lan truyền xuyên tâm xuất phát từ lưỡng cực. Tam diện $(\vec{E},\vec{B},\vec{e}_r)$ là thuận và có ba góc vuông, với :**

$$\vec{E}(\vec{r},t) = c\vec{B}(\vec{r},t) \wedge \vec{e}_r.$$

Áp dụng 2

Miền tĩnh $(d \ll r \ll \lambda)$

Hãy giản ước trường điện từ của lưỡng cực trong miền tĩnh, khi $(d \ll r \ll \lambda)$.

Hãy chứng minh rằng những số hạng thu được đối với điện trường và từ trường có thể được lí giải như là những trường tĩnh tương tự như trường tĩnh điện của một lưỡng cực không đổi hoặc như từ trường cho bởi định luật BIOT và SAVART.

Trong miền đang xét, sự chậm trễ do lan truyền $\frac{r}{c}$ là nhỏ so với thời gian đặc trưng t của sự biến thiên của lưỡng cực. Chúng ta sẽ coi rằng $p\left(t-\frac{r}{c}\right)$ cũng là $p(t)$.

Bằng cách chỉ giữ lại những số hạng có ưu thế nhất trong biểu thức tổng quát của trường điện từ thu được ở §**1.3**, ta được :

- đối với điện trường :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2p(t)}{r^3}\cos\theta\,\vec{e}_r + \frac{p(t)}{r^3}\sin\theta\,\vec{e}_\theta\right].$$

Chúng ta lại nhận ra một biểu thức giống như biểu thức đã thu được ở lớp đệ nhất (xem *H. Prépa, Điện từ học, lớp đệ nhất, chương* 5) đối với trường tĩnh điện của một lưỡng cực không đổi.

- đối với từ trường :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{p}(t)}{r^2}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi.$$

Sử dụng sự mô hình hóa một lưỡng cực bằng một nhóm đôi điện tích, trong đó điện tích +q là di động dọc theo trục (Oz) với vận tốc $\vec{v}_+(t)$, ta có :

$$\dot{\vec{p}}(t) = q\vec{v}_+(t),$$

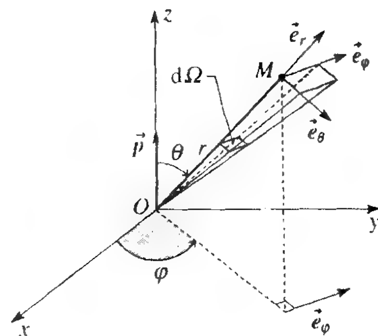
coi như một số hạng có dạng $\vec{j}(t)\tau$ (τ chỉ thể tích nhỏ chứa điện tích q), và từ trường có thể đồng nhất hóa với dạng cho bởi định luật BIOT và SAVART :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}\tau \wedge \vec{e}_r}{r^2}.$$

2.2. Năng lượng điện từ bức xạ

2.2.1. Sơ đồ bức xạ

2.2.1.1. Công suất bức xạ trong một đơn vị góc khối



H.9. *Tọa độ cầu, góc khối nguyên tử.*

Vectơ POYNTING, tức vectơ mật độ dòng năng lượng điện từ, ứng với trường bức xạ là (theo cách kí hiệu thực) :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\vec{e}_r .$$

Để viết biểu thức của đại lượng phi tuyến tính này, ta trở lại cách biểu diễn thực "$p(t)$". Ta sử dụng các tọa độ cầu có trục (Oz) hướng theo mômen của lưỡng cực bức xạ và có tâm trên lưỡng cực (*h*.9) ; vectơ POYNTING trở thành :

$$\vec{\Pi}(\vec{r},t) = \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\ddot{p}^2\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^2}\sin^2\theta\vec{e}_r .$$

Công suất bức xạ xuyên qua một nguyên tố mặt $dS = r^2 d\Omega$ của mặt cầu tâm O và bán kính r, nhìn dưới một góc khối nguyên tố $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ (*h*.9), bằng :

$$d\mathcal{P} = \vec{\Pi}.d\vec{S} = \vec{\Pi}.dS\vec{e}_r = r^2(\vec{\Pi}.\vec{e}_r)d\Omega .$$

Công suất bức xạ bởi lưỡng cực trong mỗi đơn vị góc khối là :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{\ddot{p}^2\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} .$$

<u>*Chú ý :*</u>

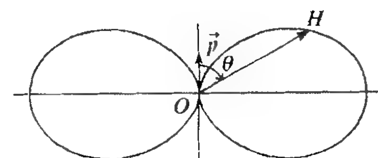
Kết quả này là đặc sắc, vì nó không cho khoảng cách quan sát tham gia vào. Việc trường bức xạ phụ thuộc vào $\frac{1}{r}$ (thay cho thừa số $\frac{1}{r^2}$ của các trường tĩnh của một nguồn có kích thước hữu hạn) cho phép ta dò tìm được những tín hiệu phát ra từ những khoảng cách có thể là cực kì lớn. Nếu không như thế, chúng ta sẽ thường xuyên ở trong bóng tối !

2.2.1.2. Sơ đồ

Ta có thể tượng trưng sự phân bố không gian của bức xạ phát ra bằng cách vẽ, đối với một phương (θ,φ) cho trước, một đoạn OH hướng theo phương đó và có độ dài tỉ lệ với công suất bức xạ trong mỗi đơn vị góc khối. Tập hợp các đầu mút của các đoạn đó tạo thành một mặt tròn xoay ở quanh trục (Oz), được biểu diễn theo một lát cắt trên *hình 10*.

Bức xạ của lưỡng cực là không đẳng hướng :

- **công suất được bức xạ ưu tiên theo các phương vuông góc với vectơ $\frac{d^2\vec{p}}{dt^2}$;**
- **không có năng lượng bức xạ theo phương của vectơ đó.**



H.10. *Sơ đồ bức xạ : $\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega}$ biểu diễn bởi đoạn OH là tỉ lệ với $\sin^2\theta$.*

2.2.2. Công suất bức xạ toàn phần

Ta thu được công suất bức xạ toàn phần bằng cách lấy tích phân theo mọi phương của công suất bức xạ trong mỗi đơn vị góc khối.

Biết rằng $\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}$ công suất bức xạ toàn phần là :

$$P = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\mathscr{P}}{d\Omega} d\Omega = \frac{\ddot{p}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

▶ **Để luyện tập : bài tập 4 và 6.**

3 Những biểu hiện của bức xạ của lưỡng cực điện

3.1. Bức xạ của một điện tích có gia tốc

3.1.1. Bức xạ và gia tốc

Trong trường hợp bức xạ lưỡng cực, những số hạng duy nhất dẫn đến một thông lượng khác không của vectơ POYNTING xuyên qua một mặt cầu có bán kính r dần tới vô hạn, là những số hạng của trường điện từ chứa $\frac{1}{r}$.

Các số hạng này tỉ lệ với $\ddot{p}(t)$, tức là với gia tốc của điện tích di động của nhóm đôi đang khảo sát : công suất bức xạ gắn với gia tốc của hạt tích điện di động.

Ngược lại, bất kì điện tích nào có gia tốc cũng giải phóng năng lượng bằng bức xạ điện từ.

3.1.2. Công thức LARMOR

Ta đã thu được công suất toàn phần bức xạ bởi một lưỡng cực biến thiên :

$$\mathscr{P} = \frac{\ddot{p}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}.$$

Ta lấy lại mô hình một nhóm đôi điện tích, mà với nó thì $\ddot{p}(t) = q\dot{a}$; kết quả này đồng nhất với công thức LARMOR, nó cho phép biểu thị công suất bức xạ bởi một hạt tích điện *phi tương đối tính*, có điện tích q và gia tốc $\dot{a}$:

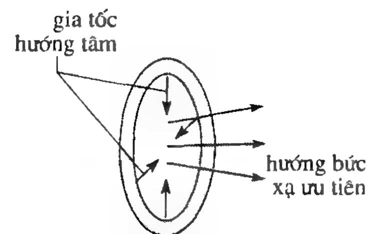
$$\mathscr{P} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a^2}{3c^3}.$$

Công suất điện từ bức xạ bởi một hạt tích điện thì tỉ lệ với bình phương gia tốc và bình phương điện tích của nó.

3.1.3. Nguồn bức xạ

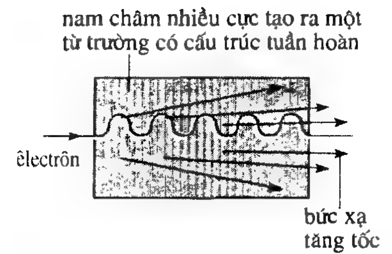
Đối với các hạt tương đối tính, công thức LARMOR phải được sửa đổi, nhưng nguyên lí vẫn giữ nguyên : các điện tích có gia tốc làm phát sinh một bức xạ.

Điều này hạn chế khả năng của các máy gia tốc hạt. Sự gia tốc các hạt chứa trong các chùm di chuyển trong các vòng tích góp tròn tạo ra một bức xạ (*h*.11), như vậy nó tạo ra một sự mất năng lượng. Muốn thu được các tia có năng lượng cao, phải giảm thiểu gia tốc đó, là gia tốc hướng tâm tỉ lệ



H.11. *Bức xạ trên một quỹ đạo tròn (vòng tích góp).*

nghịch với bán kính của vòng, tức là phải tăng bán kính của vòng. Máy S.P.S (super proton synchrotion) ở trung tâm C.E.R.N có bán kính 2km, tức là có khoảng 6km hành lang ngầm dưới đất, đi dưới biên giới Pháp – Thụy Sĩ.



H.12. *Tăng tốc các êlectrôn bởi một từ trường có cấu trúc tuần hoàn và sự sản xuất các bức xạ trong một máy hiện sóng.*

Ngược lại, có những máy được chế tạo nhằm mục đích sản xuất những bức xạ đồng bộ. Các nguồn bức xạ chế tạo bằng cách "ăn bám" các vòng va chạm đã được thay thế bởi các máy chế tạo riêng để sản xuất các bức xạ đồng bộ. Trong một máy hiện sóng (*h.*12), các êlectrôn tương đối tính đi qua một từ trường có cấu trúc tuần hoàn. Sự tăng tốc tuần hoàn các êlectrôn trong các máy này cho phép tạo ra những chùm tia X có cường độ lớn rất có ích trong nhiều ứng dụng khác nhau : trong vật lí học và hóa học (phân tích cấu trúc các chất rắn kết tinh, khảo sát sự tổ chức trong khoảng cách ngắn của các chất rắn vô định hình và chất lỏng tiếp cận cấu trúc bên trong của đoàn hạt êlectrôn của các nguyên tử,...), trong sinh học và y học (phân tích cấu trúc các prôtêin, chụp ảnh bằng phóng xạ với độ chính xác cao), trong công nghiệp (chụp ảnh bằng phóng xạ, in litô các mạch tổ hợp với độ phân giải cao, kĩ thuật chế tạo vi mô, ...).

3.2. Sự tán xạ bức xạ điện từ

3.2.1. Sự tán xạ

Trường của một sóng điện từ (thí dụ, của ánh sáng) có thể tương tác với một nguyên tử hoặc một phân tử, nó hấp thụ một phần năng lượng của bức xạ tới. Các lưỡng cực điện cảm ứng lại phóng ra các sóng điện từ theo những phương có thể khác với phương của ánh sáng tới : ánh sáng bị tán xạ (*h.*13).

Mô hình bức xạ lưỡng cực cho phép giải thích phần lớn bức xạ điện từ của nguyên tử.

3.2.2. Tương tác nguyên tử – bức xạ : mô hình êlectrôn liên kết đàn hồi

Ở đây chúng ta có ý định xây dựng một mô hình hiện tượng luận, mô tả trong phạm vi cơ học cổ điển tương tác giữa một nguyên tử và trường của một sóng điện từ tới.

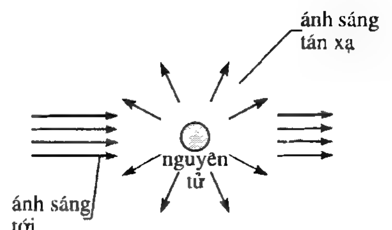
3.2.2.1. Tác dụng của trường của một sóng

Khi một sóng điện từ đi tới một nguyên tử, trường của nó tương tác với các điện tích của nguyên tử. Các điện tích này là phi tương đối tính và trường B của sóng là vào cỡ $\frac{E}{c}$. Ảnh hưởng của điện trường của sóng đối với các điện tích trong điều kiện này là rất quan trọng.

Các êlectrôn và hạt nhân có các điện tích so sánh với nhau được, nhưng hạt nhân có khối lượng lớn hơn nhiều : $m_p \approx 2000 m_e$. Như vậy đối với êlectrôn sóng gây ra một chuyển động lớn hơn nhiều, chuyển động của chúng có thể giải thích được bức xạ của nguyên tử.

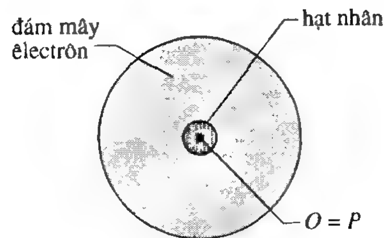
Bước sóng của bức xạ tới (vào cỡ một phần mười μm trong miền tử ngoại, $0{,}5\mu m$ trong miền nhìn thấy) lớn hơn nhiều kích thước đặc trưng của một nguyên tử (vào cỡ $100 pm = 10^{-4} \mu m$), thành thử trường của sóng tới là hầu như đều trong thang bậc của một nguyên tử. Không cần để ý đến vị trí riêng của nguyên tử được xét, ta kí hiệu trường đó bằng :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\omega t .$$



H.13. *Tán xạ bức xạ bởi một nguyên tử.*

3.2.2.2. Êlectrôn liên kết đàn hồi



H.14. *Ở trạng thái cân bằng, trọng tâm của các vị trí nối tiếp nhau của êlectrôn trùng với tâm của hạt nhân.*

Về nguyên tắc, *điện trường* của sóng là rất nhỏ so với trường bên trong của một nguyên tử (điện trường mà một prôtôn tạo ra ở khoảng cách 100*pm* là vào cỡ 10^{11}.V.m^{-1}). Như vậy ta có thể thử mô tả vài kết quả bằng một mô hình tuyến tính (nhiễu loạn khai triển ở bậc một).

Khi không có trường nhiễu loạn (trường của sóng điện từ), êlectrôn vẽ ra một quỹ đạo chứa trong thể tích V. Đám mây các điểm biểu diễn các vị trí nối tiếp nhau của êlectrôn có trọng tâm P của nó ở tâm của đám mây này, trùng với vị trí của hạt nhân giả định là cố định vì nặng hơn rất nhiều. Ta gắn cho điểm P điện tích $-q$ ($q = e$), và khối lượng m, là khối lượng của êlectrôn (*h.*14).

Ta nói rằng vị trí cân bằng của êlectrôn là O.

• Nếu êlectrôn bị đưa lệch khỏi "vị trí cân bằng" của nó, điểm P (trọng tâm của các vị trí nối tiếp nhau của êlectrôn) không còn trùng với điểm O nữa. Ta kí hiệu $\vec{OP} = \vec{r}$ (*h.*15). Êlectrôn khi đó chỉ chịu tác dụng của lực điện mà phần còn lại của nguyên tử tác dụng lên nó ; lực đó có thể được mô hình hóa bằng một lực hồi phục $\vec{F}_{hp}$ hướng về "vị trí cân bằng" mà êlectrôn chiếm chỗ khi ở trạng thái cân bằng. Ta đặt :

$$\vec{F}_{hp} = -m\omega_0^2\vec{OP} = -m\omega_0^2\vec{r}\,.$$

• Dao động của P ở hai bên điểm O cuối cùng bao giờ cũng bị tắt đi : chúng ta sẽ diễn đạt sự tắt dần chuyển động của êlectrôn (nói riêng, khi nó dịch chuyển thì êlectrôn bức xạ một năng lượng điện từ lấy ra từ cơ năng của nó) bằng một lực loại ma sát nhớt $\vec{F}_v$:

$$\vec{F}_v = -m\frac{\omega_0}{Q}\frac{d(\vec{OP})}{dt} = -m\frac{\omega_0}{Q}\frac{d\vec{r}}{dt} = -m\frac{\omega_0}{Q}\dot{\vec{r}},$$

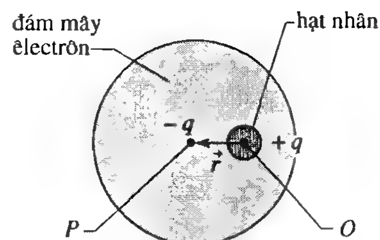
trong đó Q là hệ số phẩm chất của dao động tử đó.

Không bỏ quên tác dụng của điện trường $\vec{E}$ của sóng, thì nguyên lí cơ bản của động lực học cho ta :

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2\vec{r} - m\frac{\omega_0}{Q}\dot{\vec{r}} - q\vec{E}(t).$$

Theo chế độ ổn định dạng sin, và dùng cách kí hiệu phức, thì đáp ứng là :

$$\underline{\vec{r}} = \frac{-\dfrac{q}{m\omega_0^2}}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}\,\underline{\vec{E}}_0 e^{j\omega t}.$$



H.15. *Ở ngoài trạng thái cân bằng, trọng tâm P của các vị trí nối tiếp nhau của êlectrôn không còn trùng với tâm O của hạt nhân nữa.*

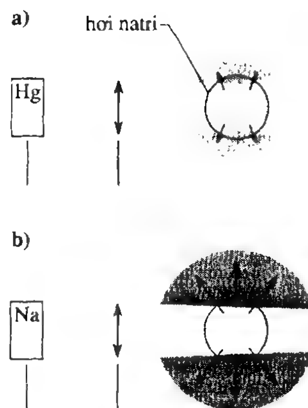
Thực nghiệm chỉ ra rằng sự hấp thụ một sóng điện từ bởi một nguyên tử là đặc biệt có hiệu quả khi tần số của sóng tới trùng với một trong những tần số của phổ điện từ của nguyên tử. Mô hình mà chúng ta đề xuất ở đây, trong đó mỗi êlectrôn được xử lí trong phạm vi cơ học cổ điển và không phụ thuộc các êlectrôn khác trong đoàn êlectrôn của nguyên tử, cho phép mô tả sự quan sát này nếu ta cho tần số ω_0 giá trị của một tần số của phổ nguyên tử và cho hệ số phẩm chất Q một giá trị rất lớn.

Chú ý :
Mô hình hiện tượng luận này là rất không đầy đủ. Thí dụ, nó không nói về sự tồn tại của nhiều tần số cộng hưởng, và về tầm quan trọng tương đối của chúng. Một sự khảo sát thích hợp về tương tác vật chất – bức xạ đòi hỏi phải sử dụng cơ học lượng tử.

3.2.3. Ảnh hưởng của tần số sóng kích thích

3.2.3.1. Tương tác cộng hưởng

Sự tán xạ là đặc biệt quan trọng nếu biên độ chuyển động của các êlectrôn là lớn, tức là khi tần số của bức xạ gần bằng một trong các tần số riêng của nguyên tử (đối với một tần số gần với ω_0). Khi đó quá trình được gọi là sự *tán xạ cộng hưởng.*



H.16. a. *Chiếu sáng bằng thủy ngân : tán xạ yếu.*
b. *Chiếu sáng bằng natri : tán xạ cộng hưởng.*

Có thể làm rõ điều này bằng thí nghiệm về sự cộng hưởng minh họa bởi hình 16. Bằng cách đun nóng trên một ngọn đèn BUNSEN các thành một ống chân không đựng một ít natri, chúng ta gây ra sự bốc hơi của natri ở trạng thái nguyên tử.

Ta rọi ống đó bằng ánh sáng phát ra từ một ngọn đèn dùng hơi thủy ngân mà phổ có một vạch đôi vàng (λ = 577nm và 579nm). Chúng ta quan sát được một bức xạ vàng rất yếu của hơi chứa trong ống.

Bây giờ ta rọi hơi nguyên tử đó bằng chùm tia xuất phát từ một ngọn đèn dùng hơi natri. Lần này ta quan sát được một bức xạ vàng rất mạnh phát ra từ natri chứa trong ống. Phổ của chùm sáng tới lần này chứa các bức xạ (λ = 589,0nm và 589,6nm) hoàn toàn thích hợp (tất nhiên rồi !) để kích thích các nguyên tử chứa trong ống, và ta quan sát được những hệ quả của sự tán xạ cộng hưởng của bức xạ tới, mà cường độ lớn hơn hẳn so với sự tán xạ thu được trong phần đầu của thí nghiệm.

Chú ý :
Cũng có thể thực hiện thí nghiệm này bằng hai chiếc đèn dùng natri L_1 và L_2 chẳng hạn. Chúng ta đun nóng cả hai cái đèn. Sau khi chúng đã thật nóng, chúng ta tắt L_2 rồi rọi nó bằng L_1 : chúng ta đã hiển thị hiện tượng tán xạ cộng hưởng ; với các đèn quang phổ khác thì không có hiện tượng đó.

Tương tác cộng hưởng (và kết hợp) giữa vật chất và bức xạ là cơ sở để thực hiện các nguồn sáng có ánh sáng hầu như đơn sắc là các laze.

3.2.3.2. Tán xạ RAYLEIGH của khí quyển

Nhiều nguyên tử và phân tử của khí quyển có phổ điện từ chủ yếu nằm trong miền tử ngoại. Như vậy ánh sáng của phổ nhìn thấy ứng với những tần số ω rất thấp so với tần số đặc trưng ω_0 (nằm ở miền tử ngoại). Trong điều kiện này, gia tốc của một êlectrôn kích thích bởi sóng tới có một dạng đơn giản hóa :

$$\left(\text{với } \underline{\vec{r}} = \frac{-\dfrac{q}{m\omega_0^2}}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \underline{\vec{E}}_0 e^{j\omega t} \approx -\frac{q}{m\omega_0^2} \underline{\vec{E}}_0 e^{j\omega t} \right) :$$

$$\underline{\vec{a}} = \ddot{\underline{\vec{r}}} = -\omega^2 \underline{\vec{r}} \approx \frac{q}{m} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \underline{\vec{E}}_0 e^{j\omega t} .$$

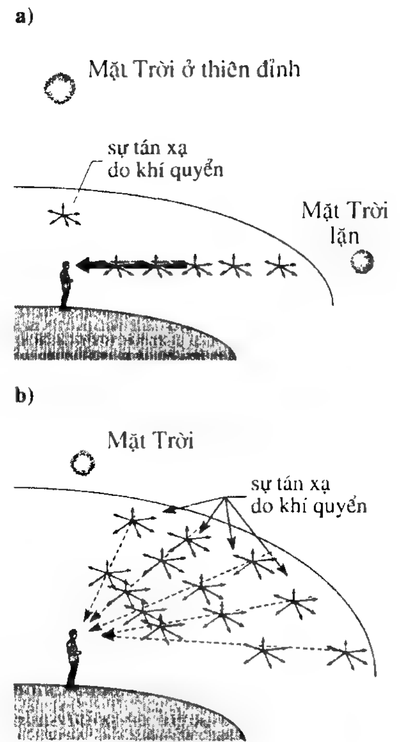
Công suất bức xạ bởi lưỡng cực tỉ lệ với bình phương gia tốc, vậy nó biến thiên tỉ lệ với ω^4, tức là với $\frac{1}{\lambda^4}$.

Sự tán xạ này được gọi là "tán xạ RAYLEIGH" : cường độ của nó tỉ lệ với $\frac{1}{\lambda^4}$, trong đó λ là bước sóng của bức xạ tới. Trong phổ của ánh sáng nhìn thấy, khí quyển tán xạ các bức xạ lam nhiều hơn hẳn các bức xạ đỏ. Sự tán xạ này có thể áp dụng cho sự tán xạ của ánh sáng tới từ Mặt Trời bởi các phân tử tạo thành khí quyển.

Ta hãy quan sát Mặt Trời (*h.*17a) mà bức xạ có một cực đại ở vùng vàng. Chúng ta nhìn thấy một ánh sáng đã nghèo đi trong phần lam - tím của phổ nhìn thấy, do sự tán xạ bởi các phân tử của khí quyển. Bề dầy phần khí quyển mà nó xuyên qua càng lớn thì hiện tượng đó càng trở nên đáng kể : Mặt Trời lúc lặn có vẻ rõ ràng đỏ hơn lúc trên thiên đỉnh.

Ta hãy nhìn bầu trời theo một phương khác với phương Mặt Trời (*h.*17b). Lần này ta nhìn thấy ánh sáng Mặt Trời mà khí quyển đã tán xạ : bầu trời màu xanh.

▶ **Để luyện tập : bài tập 1 và 2.**



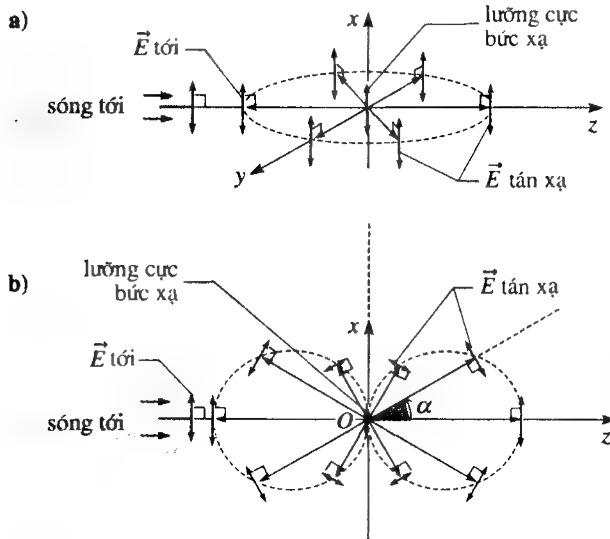
H.17. *Quan sát Mặt Trời và bầu trời.*
a. *Mặt Trời lặn thì đỏ lên.*
b. *Bầu trời màu lam.*

3.2.4. Sự phân cực bức xạ do tán xạ

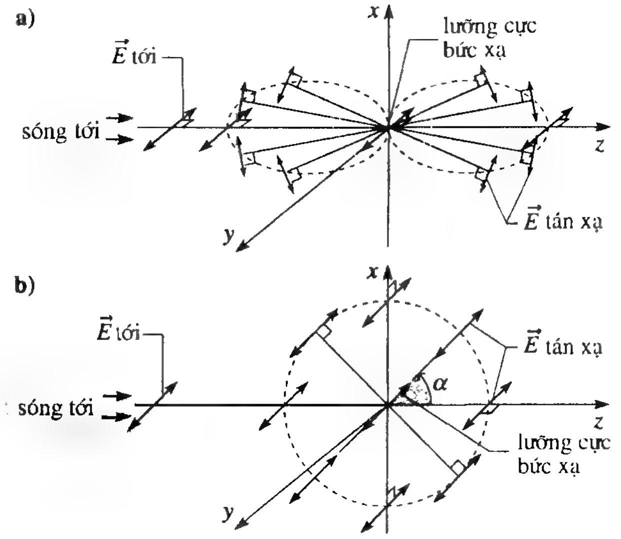
3.2.4.1. Tán xạ của một sóng phân cực thẳng

Xét một bức xạ tới hướng theo (Oz), trường $\vec{E}$ của nó phân cực thẳng theo phương (Ox) (*h.*18). Mômen lưỡng cực dao động cảm ứng là song song với phương phân cực. Bức xạ tán xạ được phân cực thẳng.

Cường độ của nó là lớn theo các phương lân cận mặt phẳng (yOz) (xem §**2.2.1**). Trong mặt phẳng đó, lưỡng cực phát ra một cách đẳng hướng các sóng phân cực thẳng theo phương (Ox) (*h.*18a). Cường độ của nó là không đáng kể theo các phương lân cận với (Ox) (*h.*18b).



H.18. *Sự tán xạ của một SPCĐS phân cực thẳng :* $\vec{E} // (Ox)$.
a. *Trong mặt* (yOz) : $\alpha = 0$.
b. *Trong một mặt song song với* (xOz) : α *bất kì.*



H.19. *Sự tán xạ của một SPCĐS phân cực thẳng :* $\vec{E} // (Oy)$.
a. *Trong mặt* (yOz) : $\alpha = 0$.
b. *Trong một mặt song song với* (xOz) : α *bất kì.*

Hình 19 tóm tất cũng bằng cách ấy những đặc trưng của bức xạ tán xạ khi điện trường của bức xạ tới phân cực thẳng theo phương (Oy).

3.2.4.2. Tán xạ của một sóng không phân cực

Ánh sáng thiên nhiên không bị phân cực. Do đó, một sóng ánh sáng truyền theo (Oz) gây cảm ứng những lưỡng cực ; giống như trường tới, những lưỡng cực này dao động một cách ngẫu nhiên theo mọi phương của mặt phẳng (xOy), và khi đó sự phân bố bức xạ tán xạ là phân bố xoay xung quanh trục (Oz).

Bức xạ tán xạ song song với (Oz) không bị phân cực, trong khi bức xạ tán xạ vuông góc với (Oz) lại phân cực thẳng. Theo các phương trung gian (α khác 0, $\frac{\pi}{2}$ và π ; xem *hình* 18 và 19) thì bức xạ tán xạ bị phân cực một phần.

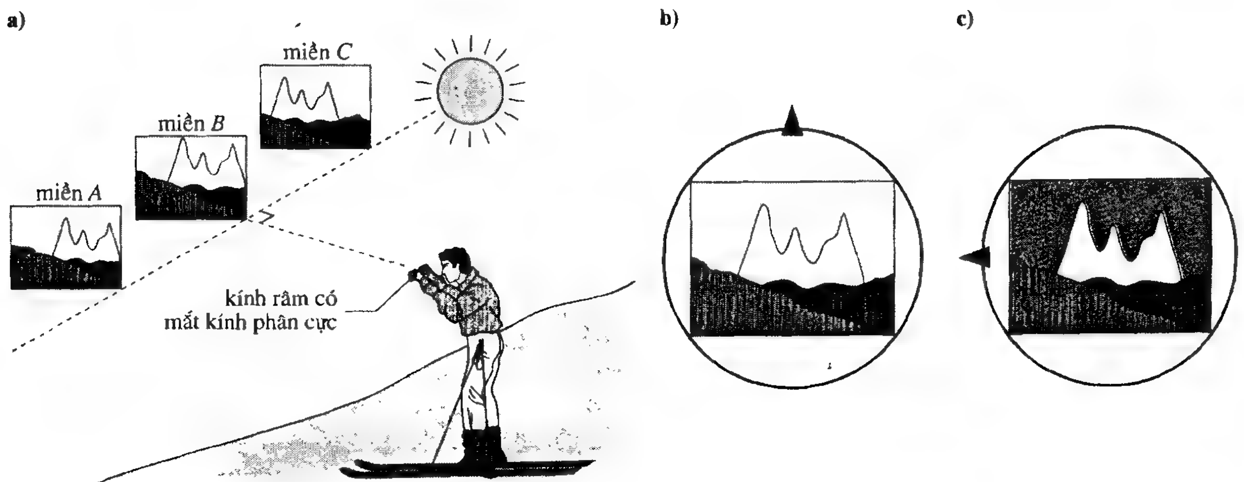
Như vậy ánh sáng do khí quyển bức xạ thì phân cực một phần. Chúng ta hãy quan sát bầu trời qua một kính râm có mắt kính phân cực (*).

Ánh sáng thiên nhiên dĩ nhiên là không phân cực, độ phân cực của ánh sáng tán xạ là lớn khi phương của ánh sáng tới và của ánh sáng tán xạ hầu như vuông góc nhau.

Trên *hình* 20, miền *B* của bầu trời hắt lại phía người quan sát một ánh sáng mà độ phân cực lớn hơn nhiều so với các miền *A* và *C*.

(*) Những mắt kính phân cực của các kính này là những kính phân cực thẳng. Khi một chùm sáng xuyên qua chúng, chúng tách ra một trạng thái phân cực thẳng, đồng thời loại bỏ trạng thái vuông góc với nó. Chúng sử dụng tính lưỡng sắc của một số vật liệu, tức là sự hấp thụ có chọn lọc của chúng đối với một trạng thái phân cực. Hiện nay các kính phân cực đó được chế tạo nhân tạo bằng cách kéo giãn các màng mỏng pôlime trên đó có đính các phân tử sắc tố. Chất nền tạo thành có độ dẫn điện song song với phương theo đó chất pôlime đã bị kéo giãn, và hấp thụ một cách hữu hiệu trạng thái phân cực thẳng của điện trường song song với phương đó ; nó cho trạng thái phân cực thẳng góc đi qua (xem H–Prépa, Quang học sóng, năm thứ hai).

Loại mắt kính râm này không phải là chất liệu cao cấp. Nhiều kính râm bãi biển được làm bằng mắt kính phân cực. Các nhà nhiếp ảnh cũng có khi sử dụng tính chất của các kính lọc phân cực (xem chương 9).



H.20. *Quan sát bầu trời qua các kính râm có mắt kính phân cực : khi quay các mắt kính một phần tư vòng, người trượt tuyết "thấy trời tối lại".*
a. *Người trượt tuyết nhìn thấy ảnh hưởng của sự phân cực ánh sáng tán xạ bởi khí quyển ở "miền B" (tức là theo một phương vuông góc với phương Mặt Trời) rõ rệt hơn hẳn ở các "miền A" và "miền C".*
b. *Quan sát "miền B", kính phân cực là thẳng đứng : bầu trời sáng.*
c. *Quan sát "miền B", kính phân cực là ngang : bầu trời tối lại.*

Tuy nhiên, cần lưu ý rằng cùng với ánh sáng tán xạ này, tuân theo các định luật tán xạ RAYLEIGH, còn đồng thời có một sự tán xạ không thay đổi tần số và không phân cực, gây ra bởi các hạt bụi trong khí quyển.

Như vậy quan sát sự phân cực của ánh sáng tán xạ trên núi cao thì rõ hơn trong thành phố nhiều, ở đó sự ô nhiễm chẳng may lại rất lớn.

Áp dụng 3

Độ phân cực của bức xạ tán xạ bởi một nguyên tử được một sóng không phân cực chiếu sáng

Sóng tới truyền theo trục (Oz) và không phân cực : có thể mô tả nó bằng hai sóng phân cực vuông góc nhau theo phương (Ox) và (Oy), có cùng biên độ E_0 và độc lập với nhau.

Tại một điểm M của mặt phẳng (xOz), cách xa nguyên tử đặt tại O, xác định bởi r = OM và góc α (h.20), hãy biểu thị các thành phần $E_{//}$ và $E_{\perp}$ song song và vuông góc với (xOz) của điện trường bức xạ bởi êlectrôn liên kết đàn hồi (điện tích $-q$).

Xác định tỉ số $\dfrac{\langle E_{//}^2\rangle}{\langle E_{\perp}^2\rangle}$ và chỉ rõ các giá trị của góc α ứng với một trường tán xạ phân cực thẳng.

Ta kí hiệu $x(t)$ và $y(t)$ là các tọa độ của êlectrôn mà chuyển động được gây ra bởi sóng tới (điện trường nằm trong mặt phẳng (xOy)). Sử dụng biểu thức của trường tán xạ đã thu được ở **§2.1.2**, ta có (h.21) :

$$\vec{E}(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\wedge\overrightarrow{OM}\right)\wedge\overrightarrow{OM}}{r^3c^2}$$

$$=\frac{\mu_0 q}{4\pi r}\left[\ddot{x}\left(t-\frac{r}{c}\right)\cos\alpha(-\cos\alpha\vec{e}_x+\sin\alpha\vec{e}_z) - \ddot{y}\left(t-\frac{r}{c}\right)\vec{e}_y\right]$$

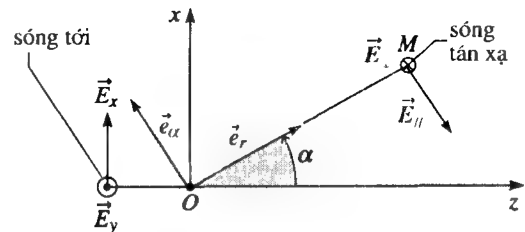
$$=\vec{E}_{//}(M,t)+\vec{E}_{\perp}(M,t)$$

với :

$$\vec{E}_{//}(M,t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi r}\left[\ddot{x}\left(t-\frac{r}{c}\right)\cos\alpha(-\cos\alpha\vec{e}_x+\sin\alpha\vec{e}_z)\right]$$

$$= -\frac{\mu_0 q}{4\pi r}\ddot{x}\left(t-\frac{r}{c}\right)\cos\alpha\vec{e}_\alpha$$

và $\vec{E}_{\perp}(M,t) = -\dfrac{\mu_0 q}{4\pi r}\ddot{y}\left(t-\dfrac{r}{c}\right)\vec{e}_y.$



H.21. *Trường tán xạ.*

Các biến thiên của $x(t)$ và $y(t)$, do các biến thiên của các thành phần của trường tới gây ra, là ngẫu nhiên và có cùng biên độ, ta có :

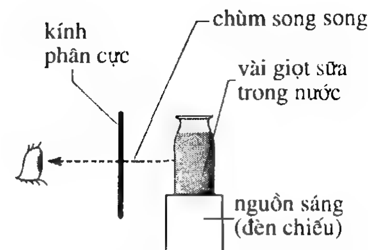
$$\frac{\langle E_{//}^2\rangle}{\langle E_{\perp}^2\rangle} = \cos^2\alpha.$$

Trường tán xạ được phân cực thẳng đối với $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}$, tức là đối với các phương quan sát vuông góc với (Oz).

3.2.4.3. Vài thí nghiệm đơn giản

• **Biểu hiện thứ nhất bằng thực nghiệm**

Bằng cách đặt một cái bình đầy nước có trộn một ít sữa, có thể biểu hiện sự phân cực do tán xạ (*h*.22).



H.22. *Thí nghiệm biểu hiện sự phân cực của ánh sáng tán xạ.*

• **Biểu hiện thứ hai bằng thực nghiệm : thí nghiệm Mặt Trời lặn**

Đặt một cái bình chứa một dung dịch thiosunfat trên đường đi của một chùm sáng trắng, song song. Thêm một ít axit clohiđric vào dung dịch, có sự tạo thành lưu huỳnh keo (với một tốc độ phản ứng tương đối chậm), nó tán xạ ánh sáng theo các định luật tán xạ RAYLEIGH. Khi đó có thể biểu hiện sự phân cực tán xạ, cũng như là một màu xanh lam, trong khi ánh sáng truyền qua trở thành đỏ (*h*.23).

▶ **Để luyện tập : bài tập 2.**

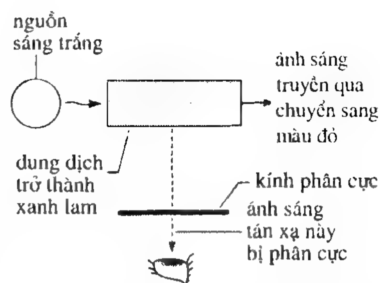
3.3. Sự vô hiệu hóa mẫu cổ điển của nguyên tử

Mẫu cổ điển của nguyên tử giả định rằng các êlectrôn của nguyên tử có hành vi như những hạt hình điểm quay quanh hạt nhân.

Khi êlectrôn chuyển động trên quỹ đạo, nó có một gia tốc : vậy nó phải mất năng lượng do bức xạ, và bán kính quỹ đạo của nó giảm đi. Vậy mẫu này dẫn đến sự không bền của nguyên tử, nó rõ ràng trái với thực nghiệm !

Chỉ có một lí thuyết lượng tử mới cho phép giải thích tính bền vững của các nguyên tử.

▶ **Để luyện tập : bài tập 3.**



H.23. *Thí nghiệm Mặt Trời lặn. Vài giọt axit clohiđric được đổ vào một bình đựng một dung dịch thiosunfat.*

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ MÔ HÌNH VÀ PHÉP GẦN ĐÚNG

Thế vectơ tại M vào thời điểm t gắn với một lưỡng cực biến thiên $\vec{p}(t)$ có kích thước vào cỡ d, ở gần một điểm O, biến thiên theo một thang thời gian đặc trưng T, có thể được viết thành :

$$\vec{A}(M,t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}$$

nếu hai điều kiện sau đây được nghiệm đúng :

• $d \ll r = OM$ (phép gần đúng lưỡng cực) ;

• $d \ll \lambda = cT$ (phép gần đúng phi tương đối tính).

■ TRƯỜNG BỨC XẠ

• Miền bức xạ (hay : miền xa) được xác định bởi $d \ll \lambda \ll r$.

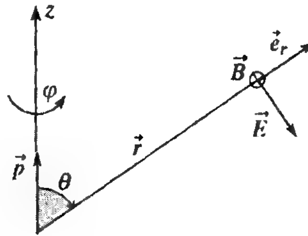
• Trong miền bức xạ, trường điện từ do lưỡng cực gây ra (*h*.24) :

• giảm tỉ lệ với $\frac{1}{r}$;

• tỉ lệ với $\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$, tức là với gia tốc của hạt bức xạ ;

• có cấu trúc địa phương của một sóng điện từ phẳng chạy trong chân không, truyền xuyên tâm từ lưỡng cực ra. Tam diện $(\vec{E},\vec{B},\vec{e}_r)$ là thuận, có ba góc vuông, với :

$$\vec{E}(M,t) = c\vec{B}(\vec{r},t) \wedge \vec{e}_r .$$



H.24. *Cấu trúc của trường điện từ bức xạ bởi một lưỡng cực dao động.*

■ CÔNG SUẤT BỨC XẠ

• Bức xạ của lưỡng cực không đẳng hướng :

• công suất được bức xạ chủ yếu theo các phương vuông góc với vectơ $\frac{\mathrm{d}^2\vec{p}}{\mathrm{d}t^2}$;

• không có công suất bức xạ theo phương vectơ đó.

• Công suất do một hạt tích điện bức xạ ra thì tỉ lệ với bình phương gia tốc và bình phương điện tích của nó.

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Sự tán xạ RAYLEIGH

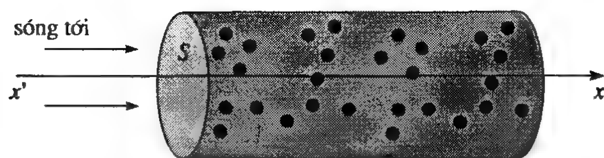
Một sóng điện từ đơn sắc, tần số ω, điện trường có biên độ thực E_0, được tán xạ bởi những êlectrôn liên kết đàn hồi với các nguyên tử hoặc phân tử của một chất khí trong miền mà tần số của sóng rất nhỏ so với tần số riêng của các êlectrôn liên kết đàn hồi đó (xem §**3.2.3** : $\omega \ll \omega_0$).

1) Áp dụng công thức LARMOR (xem §**3.1.2**), hãy xác định công suất trung bình toàn phần bức xạ bởi nguyên tử.

2) Sóng tới tương tác với các nguyên tử chứa trong một hình trụ tiết diện S, vuông góc với phương truyền (Ox) của sóng tới. Mật độ hạt của các nguyên tử được kí hiệu là n. Thông lượng trung bình của mật độ mặt của sóng tới được kí hiệu là ϕ. Hãy thành lập định luật biến thiên $\phi = \phi(x)$.

3) Trong điều kiện nhiệt độ và áp suất thông thường, tần số riêng của một chất khí $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ là vào cỡ 2.10^{15} Hz. Hãy ước tính độ dài L đặc trưng cho độ giảm của chùm trong chất khí này, đối với một tần số ω ứng với một bức xạ nhìn thấy. Cỡ độ lớn đó và hành vi của L đối với tần số ω có cho phép đề xuất một cách giải thích đơn giản một hiện tượng thiên nhiên mà mỗi buổi chiều trời quang ta quan sát được hay không ?

Cho biết :
hằng số AVOGADRO $N_a = 6,02.10^{23}\text{mol}^{-1}$;
điện tích êlectrôn $-e = -1,6.10^{-19}\text{C}$;
khối lượng êlectrôn $m = 9,1.10^{-31}\text{kg}$;
$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\text{H.m}^{-1}$; $c = 3.10^8\text{m.s}^{-1}$.



2 Tiết diện hiệu dụng tán xạ của bức xạ điện từ

1) *Mở đầu :* thứ nguyên của đại lượng sau đây là gì :

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} ?$$

Một nguyên tử chịu tác dụng của trường của một SPCĐS điện từ, mà điện trường là $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ trong cách kí hiệu phức.

Để mô tả đáp ứng của nguyên tử, ta dùng mô hình êlectrôn liên kết đàn hồi, coi như một dao động tử không gian có tần số riêng ω_0 và hệ số phẩm chất Q.

Để biểu thị các kết quả, điều hợp lí là làm xuất hiện đại lượng r_e vừa giới thiệu, gọi là bán kính cổ điển của êlectrôn.

2) Tiết diện hiệu dụng của tán xạ

a) Thành lập biểu thức của công suất trung bình bức xạ bởi nguyên tử do SPCĐS tới kích thích.

b) Rút ra biểu thức của tiết diện hiệu dụng σ của sự tán xạ bức xạ, được định nghĩa như tỉ số giữa số lượng trung bình các phôtôn do nguyên tử "bia" tán xạ và thông lượng các phôtôn "đạn" tới trên một đơn vị diện tích, hay cũng như tỉ số giữa công suất trung bình tán xạ và thông lượng mặt trung bình của năng lượng tới.

c) Vẽ dáng vẻ của đồ thị của tiết diện tán xạ đó $\sigma = f(\omega)$, biết rằng hệ số phẩm chất là rất cao.

3) Ở lân cận tần số ω_0, ta thấy lại được hiện tượng gì mà giáo trình đã nêu ra ?

4) Tán xạ RAYLEIGH

Hành vi tiệm cận của tiết diện hiệu dụng của tán xạ ở tần số thấp là như thế nào ?

Kết quả này có thể áp dụng cho hiện tượng nào khác đã nêu lên ở giáo trình ?

5) Tán xạ THOMSON

Hành vi tiệm cận của tiết diện hiệu dụng của tán xạ ở tần số cao là như thế nào ? Tán xạ đó được gọi là tán xạ THOMSON.

Cho biết : công suất bức xạ bởi một điện tích phi tương đối tính có gia tốc a được cho bởi công thức LARMOR : $\mathscr{P} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a^2}{3c^3}$.

3 Thời gian sống của một trạng thái kích thích của nguyên tử

Ở đây ta dùng một mẫu nguyên tử hành tinh. Đối với mẫu đó êlectrôn của một nguyên tử hiđrô được coi như một hạt có khối lượng m và điện tích $-e$, quay

trên một quỹ đạo tròn bán kính R, xung quanh một prôtôn coi như vô cùng nặng, cố định ở điểm gốc O.

1) Biểu thị vận tốc v, gia tốc a của êlectrôn, chu kì T và cơ năng $\mathscr{E}$ của hệ, theo R, m và e. Xác định các đại lượng đó đối với R = 53pm và biện luận xem êlectrôn có là tương đối tính hay không.

Cho biết : $m = 9{,}1.10^{-31}\text{kg}$, $e = 1{,}6.10^{-19}\text{C}$ và $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\,\text{F}^{-1}.\text{m}$.

Ở một khoảng cách r rất lớn so với kích thước không gian R của chuyển động của nó, một hạt phi tương đối tính có điện tích q và gia tốc $\vec{a}$ phát ra một trường điện từ bức xạ mà từ trường là (xem §**2.1.2**) :

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{a}\left(t-\dfrac{r}{c}\right)\wedge\vec{e}_r}{rc}.$$

2) Biện luận sự phân cực của sóng phát ra trong mặt phẳng quỹ đạo êlectrôn, hoặc trên trục quay của nó.

3) Thành lập công thức LARMOR, nó cho biết công suất bức xạ bởi êlectrôn chuyển động trên quỹ đạo tròn.

4) Sự phóng ra bức xạ như vậy có ảnh hưởng gì đối với chuyển động của êlectrôn ? Hãy biện luận độ nhanh chóng của sự biến thiên đó bằng cách đánh giá tỉ số giữa năng lượng bức xạ trong một vòng quay và năng lượng cơ học thu được ở câu **1**).

5) Sử dụng các kết luận trên, hãy đề xuất một định luật biến thiên của bán kính R của quỹ đạo êlectrôn theo thời gian. Rút ra một sự đánh giá thời gian sống τ của mức kích thích $2p$ của nguyên tử hiđrô, biết rằng do phóng ra bức xạ, nguyên tử trở về trạng thái 1s. Ta nhắc lại rằng các mức năng lượng của nguyên tử hiđrô được cho bởi định luật lượng tử hóa $\mathscr{E}_n = \dfrac{-13{,}6}{n^2}eV$, trong đó n chỉ lượng tử số chính. Hãy so sánh giá trị thu được với giá trị thực nghiệm của thời gian sống đó, là $\tau = 1{,}6\text{ns}$.

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

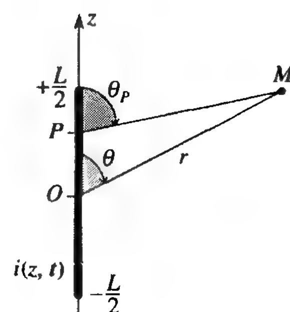
4 ★Bức xạ của một ăngten nửa bước sóng

Biểu thức của trường bức xạ ($r \gg \lambda$) của một lưỡng cực đặt ở gốc hệ tọa độ thu được trong giáo trình (xem §**2.1.2**) là :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = c\vec{B}(\vec{r},t)\wedge\vec{e}_r$$

với $$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{\vec{p}}\left(t-\dfrac{r}{c}\right)\wedge\vec{e}_r}{rc}$$

Một ăngten được tạo bởi một sợi dây có bề dày không đáng kể, tâm O và độ dài L trùng với trục (Oz) tại đó một hệ điện tử đã áp đặt một dòng điện dao động :



$$i(z,t) = I_0\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cos(\omega t),$$

tức là, trong cách kí hiệu phức :

$$\underline{i}(z,t) = I_0\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)e^{j\omega t}.$$

Người ta quan sát sự bức xạ của ăngten đó tại một điểm M xác định bởi các tọa độ cầu (r, θ).

1) Hãy giải thích biểu thức của dòng điện $i(z, t)$ trong ăngten. Chỉ rõ hệ thức liên kết độ dài L của ăngten và bước sóng λ gắn với dòng điện $i(z, t)$.

2) Trong miền bức xạ $r \gg \lambda$, người ta có thể cũng giả định rằng bước sóng là rất lớn so với kích thước của nguồn, như trong trường hợp bức xạ lưỡng cực hay không ? Xác định trường $d\vec{E}$ tạo ra tại M bởi một nguyên tố độ dài dz nằm ở một điểm P của ăngten có hoành độ z, và xác định biên độ phức $d\underline{E}$ của nó.

3) Tính điện trường bức xạ $\vec{E}$ tại điểm M.

4) Chứng tỏ rằng vectơ POYNTING trung bình có thể được viết dưới dạng $Kf(\theta)\dfrac{\vec{r}}{r^3}$, trong đó $f(\theta)$ (một hàm mà giá trị cực đại là 1) được gọi là hàm chỉ báo bức xạ của máy phát.

5) Cho biết dáng vẻ của sơ đồ bức xạ của ăngten.

6) Tính công suất trung bình toàn phần đã bức xạ $\langle\mathscr{P}\rangle$, cũng như điện trở bức xạ R của ăngten, xác định bởi $\langle\mathscr{P}\rangle = \dfrac{RI_0^2}{2}$. Tính I_0 đối với một ăngten bức xạ một công suất trung bình bằng 1kW.

5 ★★Tác dụng của một sóng điện từ lên một nguyên tử

1) Mô hình êlectrôn liên kết đàn hồi

Một nguyên tử được mô hình hóa bởi một hạt nhân có điện tích dương $+e$ đứng yên trong hệ quy chiếu của nguyên tử, và bởi một đám mây êlectrôn có điện tích âm $-e$ và khối lượng m, di động tịnh tiến và chịu một lực đàn hồi hồi phục có độ cứng k, và một lực phân tán năng lượng tỉ lệ với vận tốc. Ở vị trí nghỉ, mômen lưỡng cực của nguyên tử bằng không.

a) Nguyên tử chịu tác dụng của một điện trường là hàm dạng sin của thời gian, có tần số ω. Xác định tỉ số $\frac{\underline{p}}{\underline{E}}$ của các giá trị phức của mômen lưỡng cực và điện trường, và làm xuất hiện một tần số riêng ω_0 và một hệ số phẩm chất Q.

b) Tính Q nếu ω_0 vào cỡ $10^{15}\,\text{s}^{-1}$ và thời gian tắt dần vào cỡ 10^{-8} s.

2) Lực mà một SPCĐS tác dụng lên một nguyên tử đứng yên

Một sóng điện từ như là $\vec{E} = E(x,t)\vec{e}_y$ với $E(x,t) = E_0\cos(\omega t - kx)$ tương tác với một nguyên tử biểu diễn bởi mô hình trên đây $k = \frac{\omega}{c}$.

a) Giả định rằng vận tốc của êlectrôn có dạng $\vec{v} = v(t)\vec{e}_y$ thì có chính đáng không ?

b) Tính lực điện từ trung bình tổng hợp tác dụng lên nguyên tử, và đề xuất một cách lí giải bằng thuyết hạt thích hợp với cộng hưởng đã thấy được (§**3.2.3.1**).

3) Lực mà một sóng dừng tác dụng lên một nguyên tử chuyển động

Một nguyên tử tịnh tiến với vận tốc $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ tương tác với một SPCĐS mà điện trường là :

$$\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e}_y.$$

a) Xác định tần số ω' và biên độ E_0' mà nguyên tử "nhìn thấy" (trong trường hợp phi tương đối tính).

b) Nguyên tử chịu tác dụng của một sóng dừng tạo bởi hai SPCĐS có cùng biên độ E_0, cùng tần số ω, truyền ngược chiều nhau. Xác định lực trung bình tác dụng lên nguyên tử nếu $\omega = \omega_0$ và với giả định rằng $\frac{Qv_0}{c} \ll 1$. Xác định sự hãm nguyên tử bởi bức xạ và nêu đặc trưng của nó.

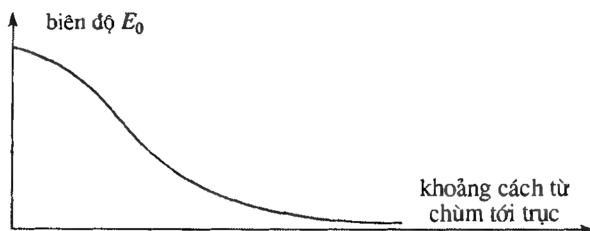
c) Giải lại câu trên nếu tần số của các sóng hơi chênh lệch, cụ thể là $\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{Q}\right)$ biết rằng $Q \gg 1$.

Cho biết : các nguyên tử sử dụng là nguyên tử xêzi có khối lượng mol $M = 133\text{g.mol}^{-1}$. Biên độ E_0 của điện trường một sóng ứng với một chùm sáng mạnh là vào cỡ 100V.m^{-1}.

$e = 1{,}6.10^{-19}\text{C}$; $N_A = 6{,}02.10^{23}\text{mol}^{-1}$.

Sử dụng các giá trị của ω_0 và Q đã cho ở câu **1) b)**.

4) Lực tác dụng bởi một sóng không đồng nhất



Một chùm laze có cấu trúc gần với cấu trúc của một SPCĐS, với một sai khác là biên độ biến đổi chậm trong mặt phẳng vuông góc với phương truyền (xem *bài tập* 6, *chương* 5). Hãy xác định định tính phương của lực trung bình mà sóng tác dụng lên nguyên tử. Giả định rằng tần số của laze rất khác tần số cộng hưởng.

6 Bức xạ của một lưỡng cực từ dao động

Trong phép định cỡ LORENTZ, thế vô hướng V và thế vectơ $\vec{A}$ tạo ra ở xa bởi một lưỡng cực từ có mômen lưỡng cực $\vec{M}(t)$ biến đổi (đặt ở gốc hệ tọa độ) là :

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\vec{M}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2} + \frac{\dot{\vec{M}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc}\right) \wedge \vec{e}_r \text{ và } V = 0.$$

Xét một lưỡng cực từ dao động mà mômen lưỡng cực theo cách kí hiệu phức là : $\underline{\vec{M}} = M_0 e^{j\omega t}\vec{e}_z$ (giả định M_0 là thực).

1) Hãy biểu đạt trường điện từ tạo ra bởi lưỡng cực trong miền bức xạ $(r \gg \lambda)$. Bình luận cấu trúc thu được và so sánh nó với cấu trúc của trường bức xạ bởi một lưỡng cực điện dao động có dạng $\underline{\vec{p}} = p_0 e^{j\omega t}\vec{e}_z$.

2) Công suất trung bình bức xạ bởi lưỡng cực từ dao động là bao nhiêu ?

3) Sử dụng mẫu hành tinh của một nguyên tử hiđrô trong đó êlectrôn vạch ra một quỹ đạo tròn bán kính $a = 53\text{pm}$ với vận tốc $v = \dfrac{c}{137}$ (trạng thái 1s, xem *bài tập* 3, câu **1**), hãy ước lượng độ lớn của các mômen lưỡng cực điện hoặc từ của một nguyên tử.

So sánh các độ lớn tương ứng của bức xạ của hai loại lưỡng cực này, ở những tần số bức xạ như nhau.

Cho biết : trong tọa độ cầu (r,θ,φ), rôta của một trường vectơ $\vec{A}$ là :

$$\overrightarrow{\text{rot}}A = \vec{e}_r \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right] + \vec{e}_\theta \frac{1}{r\sin\theta}\left[-\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) + \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right] + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right].$$

BÀI CHỮA

1 **1)** *Trong chế độ dạng sin ổn định và trong phép kí hiệu phức, gia tốc của êlectrôn liên kết đàn hồi là :*

$$\underline{\vec{a}} = \frac{e}{m}\frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\vec{E}_0}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}e^{j\omega t} \approx \frac{e}{m}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}e^{j\omega t}\vec{E}_0 \text{ đối với } \omega \ll \omega_0 .$$

Công thức LARMOR *cho ta công suất trung bình tán xạ bởi một nguyên tử (có một êlectrôn), tức là, trong phép kí hiệu thực :*

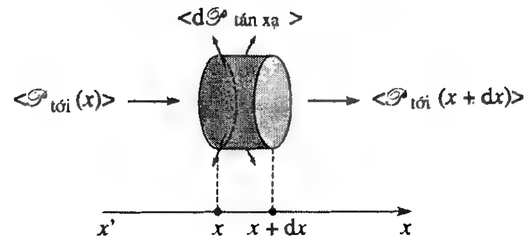
$$\langle \mathscr{P}_{\text{tán xạ}} \rangle = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}\langle a^2 \rangle = \frac{\mu_0 e^4}{6\pi c m^2}\frac{\omega^4}{\omega_0^4}\langle E^2 \rangle \text{ với } \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2}E_0^2 .$$

2) *Tại hoành độ x, công suất tới trung bình là :*

$$\langle \mathscr{P}_{\text{tới}} \rangle = \frac{\langle E^2 \rangle}{\mu_0 c}S = S\phi$$

với giả thiết rằng sóng tới có cấu trúc địa phương của một SPCĐS. Thực ra, biên độ E_0 của sóng tới sẽ giảm, vì các nguyên tử hấp thụ một phần công suất đó rồi chúng lại bức xạ năng lượng theo các phương khác với phương trục (Ox). Thực vậy, trong một lớp có bề dày dx *thì nSdx nguyên tử tán xạ ra công suất trung bình :*

$$\langle d\mathscr{P}_{\text{tán xạ}} \rangle = \frac{\mu_0 e^4}{6\pi c m^2}\frac{\omega^4}{\omega_0^4}\langle E^2 \rangle nSdx.$$



Đẳng thức $\langle \mathscr{P}_{\text{tới}}(x) \rangle = \langle \mathscr{P}_{\text{tới}}(x+dx) \rangle + \langle d\mathscr{P}_{\text{tán xạ}} \rangle$ *diễn tả sự cân bằng năng lượng đối với lớp sơ cấp có bề dày* dx.

Ta rút ra $d\phi = -\dfrac{\phi}{L}dx$ *với* $L = \dfrac{6\pi m^2}{n\mu_0^2 e^4}\dfrac{\omega_0^4}{\omega^4}$, *và :*

$$\phi(x) = \phi_0 e^{-\frac{x}{L}} .$$

3) *Đối với chất khí trong điều kiện nhiệt độ và áp suất thông thường, có một mol hạt trong khoảng 22,4L, vậy :*

$$n \approx \frac{6{,}02.10^{23}}{22{,}4.10^{-3}} \approx 2{,}7.10^{25}\,\text{m}^{-3} .$$

Đối với một bước sóng $\lambda = 0{,}5\mu m$, *tức là* $\omega = 3{,}8.10^{15}s^{-1}$, *độ dài đặc trưng L vào cỡ :*

$$L = 66 \text{ km}$$

(sẽ thu được con số nhỏ hơn nếu gắn cho mỗi nguyên tử hoặc phân tử một số lượng êlectrôn lớn hơn tán xạ bức xạ điện từ). Độ dài đặc trưng L tỉ lệ với $\dfrac{\omega_0^4}{\omega^4}$. *Trên một khoảng cách lớn, như là độ dày của khí quyển mà các tia sáng của Mặt Trời lặn đi qua (vào cỡ vài chục kilômét), sự yếu dần của các tần số lớn là đáng kể, điều đó giải thích màu đỏ da cam của "Mặt Trời lặn".*

2 **1)** *Lượng* mc^2 *đồng nhất với một năng lượng. Nếu d chỉ một độ dài, lượng* $\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$ *là năng lượng tương tác tĩnh điện của hai êlectrôn cách nhau một khoảng d. Vậy đại lượng* r_e *là một độ dài.*

2) a) *Theo cách kí hiệu phức, gia tốc của êlectrôn liên kết đàn hồi là (xem* **§3.2.2**) *:*

$$\underline{\vec{a}} = \frac{e}{m}\frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\vec{\underline{E}}_0}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}e^{j\omega t}$$

Sử dụng công thức LARMOR, *công suất trung bình của bức xạ tán xạ là :*

$$\langle \mathscr{P} \rangle = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \times 2\frac{\dfrac{\|\underline{\vec{a}}\|^2}{2}}{3c^3} = \frac{e^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{e^2}{m^2}\|\vec{\underline{E}}_0\|^2 \frac{\dfrac{\omega^4}{\omega_0^4}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$$

vì rằng : $\langle \vec{a}^2 \rangle = \frac{\|\vec{a}\|^2}{2} = \frac{\vec{\underline{a}}.\vec{\underline{a}}^*}{2}$.

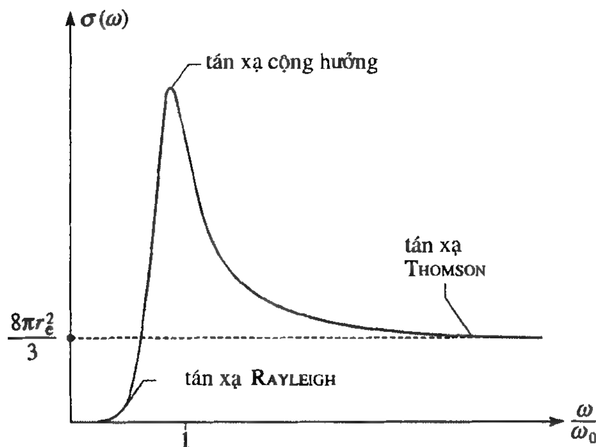
b) *Thông lượng mặt trung bình của năng lượng sóng tới là :*

$$\langle \Pi_i \rangle = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 \|\vec{\underline{E}}_0\|^2 .$$

Vậy tiết diện hiệu dụng của tán xạ là :

$$\sigma(\omega) = \frac{\langle \mathscr{P} \rangle}{\langle \Pi_i \rangle} = \frac{8}{3}\pi r_e^2 . \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2} .$$

c) *Hàm thu được thuộc loại "bộ lọc lấy tần số cao có cộng hưởng mạnh". Đồ thị của nó có dáng vẽ biểu diễn trên sơ đồ dưới đây (để giới hạn sự cộng hưởng, sơ đồ đã được vẽ đối với Q = 2. Điều này hoàn toàn không phải hiện thực, giá trị này phải lớn hơn thế rất nhiều).*



3) *Các hệ số phẩm chất đặc trưng cho các kiểu dao động của các êlectrôn trong nguyên tử là rất lớn, thành thử tiết diện hiệu dụng có một cộng hưởng nhọn ở lân cận tần số riêng ω_0. Đồ thị làm lộ rõ hành vi đặc biệt đó, ứng với sự tán xạ cộng hưởng đã nêu lên trong giáo trình (xem* §3.2.3.1).

4) *Ở tần số thấp* ($\omega \ll \omega_0$), *tiết diện hiệu dụng là tiết diện của tán xạ* RAYLEIGH :

$$\sigma_{\text{RAYLEIGH}}(\omega) \approx \frac{8}{3}\pi r_e^2 \frac{\omega^4}{\omega_0^4} ,$$

nó cho phép đề xuất một sự giải thích về màu lam của bầu trời.

5) *Ở tần số cao* ($\omega \gg \omega_0$), *tiết diện hiệu dụng là tiết diện của tán xạ* THOMSON :

$$\sigma_{THOMSON}(\omega) \approx \frac{8}{3}\pi r_e^2 = \text{cte} .$$

Kết quả này thu được cho những bức xạ có năng lượng cao (miền các tia X cứng), không có vai trò của sự liên kết của êlectrôn với nguyên tử (thực vậy, đối với $\omega \gg \omega_0$ thì lực hồi phục và lực ma sát nhớt là không đáng kể trong mô hình êlectrôn liên kết đàn hồi) : nó ứng với một phép gần đúng êlectrôn tự do.

3 1) *Trên quỹ đạo tròn thì* $-m\frac{v^2}{R} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, *và ta suy ra :*

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mR}} \; ; \; a = \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mR^2} ;$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 mR^3}{e^2}} \; ; \; \mathscr{E} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} .$$

Áp dụng bằng số : $v = \frac{c}{173}$, *hạt không phải tương đối tính ;* $a = 9.10^{22}\,\text{m.s}^{-2}$; $T = 1{,}52.10^{-16}\,\text{s}$; $\mathscr{E} = -13{,}6\,\text{eV}$.

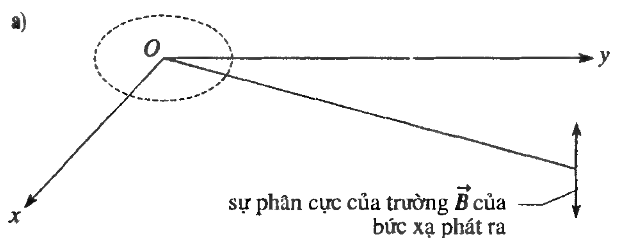
2) *Ta biết rằng trường điện từ bức xạ có một cấu trúc địa phương của sóng phẳng, và ta có :*

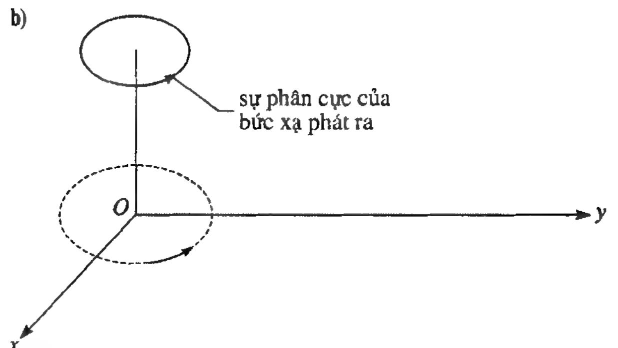
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{a}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc} ;$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = c\vec{B} \wedge \vec{e}_r = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{\left(\vec{e}_r \wedge \vec{a}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \wedge \vec{e}_r}{r} .$$

Chuyển động tròn đều của êlectrôn trong mặt phẳng (xOy) của quỹ đạo là sự chồng chập của hai chuyển động thẳng dao động, lệch pha nhau $\frac{\pi}{2}$, *tức là* $\overrightarrow{OP} = R(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y)$. *Vậy ta có thể khẳng định rằng (sử dụng các kết quả của* **§3.2.4**) :

- *trong mặt phẳng của quỹ đạo (xOy), sự phân cực của bức xạ phát ra là phân cực thẳng (trên sơ đồ a có vẽ trường* $\vec{B}$) ;
- *trên trục quay của vòng tròn quỹ đạo, nó hình tròn (sơ đồ b).*





3) *Vectơ* POYNTING *của sóng bức xạ là :*

$$\vec{\Pi}=\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}=\frac{E^2}{\mu_0 c}\vec{e}_r=\frac{e^2a^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta\vec{e}_r,$$

trong đó θ chỉ góc giữa vectơ gia tốc và phương quan sát. Thông lượng của vectơ POYNTING *xuyên qua mặt cầu bán kính r và tâm O cho ta công suất do hạt bức xạ :*

$$\mathscr{P}=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\vec{\Pi}r^2\mathrm{d}\Omega\vec{e}_r=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a^2}{3c^3},$$

điều đó ứng với công thức LARMOR *(trong mô hình của ta, chuẩn a của gia tốc của êlectrôn là không đổi).*

4) *Vậy êlectrôn mất năng lượng do bức xạ năng lượng cơ học của nó giảm, và bán kính R của quỹ đạo êlectrôn phải giảm.*

Trong một chu kì quay T, năng lượng bức xạ là $\mathscr{P}T$. Tỉ số giữa năng lượng hao phí đó và cơ năng của hệ là :

$$\frac{\mathscr{P}T}{\mathscr{E}}=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2R}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Với các giá trị bằng số ở trên, ta nhận thấy rằng tỉ số đó vào bậc 10^{-6}, rất nhỏ : phép gần đúng về một quỹ đạo gần như tròn, mà bán kính R giảm chậm, là chấp nhận được.

5) $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}=-P$, vậy $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=-\frac{4}{3m^2c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{R^2}$ *và khi tích phân*

$$R(t)^3-R(0)^3=-\frac{4t}{m^2c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2.$$

Ta cũng viết được $\mathscr{E}(t)^{-3}-\mathscr{E}(0)^{-3}=\frac{32t}{m^2c^3}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)$. *Thời gian sống của mức 2p là* $\tau=\frac{m^2c^3}{32}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}(\mathscr{E}_1^{-3}-\mathscr{E}_2^{-3})$. *Áp dụng bằng số:*$10^{-9}$ s.

Mặc dù sự sơ lược của mô hình cổ điển sử dụng ở đây, ta đã thu được một độ lớn thích hợp của τ. Một sự khảo sát nghiêm túc phải viện đến cơ học lượng tử. Tuy nhiên, nếu như ta tìm được ở đây một độ lớn thích hợp, thì cũng vì ta đã sử dụng các hằng số vật lí (e, m, c và hằng số PLANCK *chứa đựng tiềm ẩn trong biểu thức của $\mathscr{E}_n$).*

4 1) *Dòng điện* $i(z,t)=I_0\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cos(\nu t)$ *biểu diễn một sóng dòng dừng dạng sin, nghiệm đúng các điều kiện biên (i = 0 ở hai đầu). Vậy dòng này hoàn toàn có thể tồn tại ổn định trong ăngten (xem chương 3). Độ dài L và bước sóng λ liên hệ với nhau bằng* $L=\frac{\lambda}{2}$.

2) *Trong điều kiện này, tất nhiên không thể giả định $\lambda\gg L$, và ta phải xử lí độ trễ $\frac{PM}{c}$ một cách cẩn thận trong phép tính toán trường do ăngten bức xạ. Nguyên tố dz ở lân cận P tương đương với một lưỡng cực dp sao cho* $\mathrm{d}\ddot{p}=\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}z$ *(xem* **§1.1.2***). Ta có thể viết :*

$$\mathrm{d}\vec{E}=-\frac{\mu_0 I_0\omega}{4\pi}\frac{\sin\theta_p}{PM}\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\sin\left(\omega t-\omega\frac{PM}{c}\right)\mathrm{d}z\vec{e}_{\theta_p}.$$

Có thể giản lược biểu thức này, vì $r\gg L$, vậy $\theta_p\approx\theta$ và $\vec{e}_{\theta_p}\approx\vec{e}_\theta$.

(Các trường kết hợp $\mathrm{d}\vec{E}$ khác nhau sẽ giao thoa ở vô cực : xem H-Prépa, Quang học sóng, lớp đệ nhị).

$$PM\approx r-z\cos\theta,\ \text{vậy}\ \varphi=\omega\frac{r}{c}-\frac{\omega z}{c}\cos\theta\ \text{và}\ \frac{\sin\theta_p}{PM}\approx\frac{\sin\theta_p}{r}.$$

Vậy $\mathrm{d}\vec{E}\approx\mathrm{d}E\vec{e}_\theta$, và theo cách kí hiệu phức :

$$\mathrm{d}\underline{E}=j\frac{\mu_0 I_0\omega}{4\pi}\frac{\sin\theta_p\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)}{r}e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}e^{j\frac{\omega z}{c}\cos\theta}\mathrm{d}z.$$

3) *Biên độ phức của điện trường là* $\underline{E}=\int_{z=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}\underline{E}$.

Sự xác định tích phân $\left(\frac{\pi}{L}=\frac{\omega}{c}\right)$:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)e^{j\frac{\omega z}{c}\cos\theta}\mathrm{d}z=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\cos\frac{\omega z}{c}e^{j\frac{\omega z}{c}\cos\theta}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left[e^{j\frac{\omega z}{c}(\cos\theta+1)}+e^{j\frac{\omega z}{c}(\cos\theta-1)}\right]\mathrm{d}z=\frac{2L}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta},$$

dẫn đến $\underline{\vec{E}}=j\frac{\mu_0 cI_0}{2\pi r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\vec{e}_\theta$ *tức là, theo cách kí hiệu phức :*

$$\vec{E}=-\frac{\mu_0 cI_0}{2\pi r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\vec{e}_\theta.$$

4) *Biết rằng mỗi điểm P của ăngten bức xạ một trường $\mathrm{d}\vec{B}$ cho bởi $\mathrm{d}\vec{B}\approx\frac{\vec{e}_r\wedge\mathrm{d}\vec{E}}{c}$ (cấu trúc địa phương của SPCĐS), ta rút ra từ trường toàn phần $\vec{B}=\frac{\vec{e}_r\wedge\vec{E}}{c}$ và vectơ* POYNTING *trung bình :*

$$\langle\vec{\Pi}\rangle=\frac{\mu_0 cI_0^2}{8\pi^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right)^2\frac{\vec{e}_r}{r^2}.$$

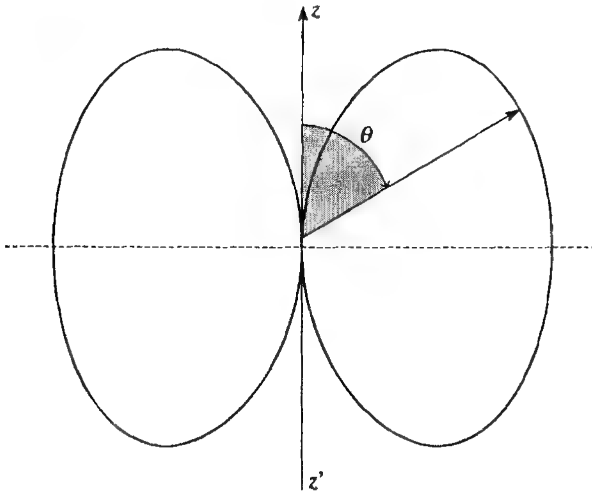
Nó đúng là có dạng yêu cầu, với :

$$f(\theta)=\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right)^2\ \text{và}\ K=\frac{\mu_0 cI_0^2}{8\pi^2}.$$

5) *Công suất trung bình bức xạ trong mỗi đơn vị góc khối theo phương (θ, φ) là :*

$$\frac{\langle\mathrm{d}\mathscr{P}\rangle}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\langle\vec{\Pi}\rangle.\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}\Omega}=\langle\Pi\rangle r^2=\frac{\mu_0 cI_0^2}{8\pi^2}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}.$$

Giản đồ bức xạ của ăngten có dáng vẻ như sau :



Công suất bức xạ là cực đại đối với $\theta = \frac{\pi}{2}$, vuông góc với ăngten.

6) *Ta tính công suất trung bình toàn phần bức xạ trong toàn không gian. Biết rằng $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, ta được :*

$$\langle \mathscr{P} \rangle = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Có thể tính bằng số tích phân này :

$$\langle \mathscr{P} \rangle = 1{,}22 \frac{\mu_0 c I_0^2}{4\pi}.$$

Vậy điện trở bức xạ là :

$$R = 1{,}22 \frac{\mu_0 c}{2\pi}.$$

Áp dụng bằng số : $R = 73\Omega$ và $I_0 = 5{,}2A$ (không phụ thuộc tần số ω).

5 **1) a)** $\underline{p} = \frac{e^2}{m} \frac{E}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$ với $k = m\omega_0^2$.

b) *Hằng số thời gian đặc trưng cho sự giảm dần của dao động là $\tau = \frac{Q}{\omega_0}$, do đó $Q \approx 10^7$ (thực vậy, phương trình vi phân của dao động tử không có vế phải là $\ddot{p} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{p} + \omega_0^2 p = 0$).*

2) a) *Lực từ tác dụng lên êlectrôn là không đáng kể so với lực điện $-e\vec{E}$ (vì vận tốc v của êlectrôn nghiệm đúng $v \ll c$ và $\vec{B} = \frac{E}{c}\vec{e}_z$). Vậy vận tốc của êlectrôn đồng phương với trường $\vec{E}$.*

b) *Lực điện tác dụng lên nguyên tử bằng không : điện tích của nguyên tử bằng không, và điện trường của sóng là đều ở kích thước của nó. Ở đây ta phải xét lực từ tác dụng lên êlectrôn là điện tích di động duy nhất trong nguyên tử :*

$$\vec{F} = -evB\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z .$$

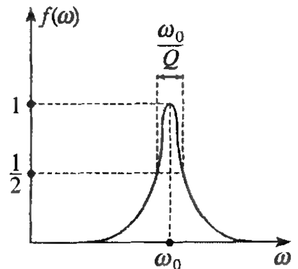
Đại lượng này là phi tuyến tính, và ta phải sử dụng cách kí hiệu phức một cách thận trọng. Biết rằng $\underline{\dot{p}} = j\omega\underline{p} = -e\underline{v}$, ta được :

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{1}{2} e\mathscr{R}e(\underline{v}\underline{B}^*)\vec{e}_x = \frac{1}{2}\mathscr{R}e\left(\frac{j\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}\right)\frac{e^2}{mc} E_0^2 \vec{e}_x$$

$$= f(\omega)\frac{Qe^2}{2mc\omega_0} E_0^2 \vec{e}_x ,$$

trong đó thừa số f(ω) là $f(\omega) = \frac{1}{1 + Q^2 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2 \omega_0^2}}$.

Khi $\omega = \omega_0$, tần số sóng ứng với một sự chuyển giữa hai mức năng lượng nguyên tử : $\Delta E = h\nu$. Khi đó các phôtôn có một xác suất lớn để bị hấp thụ, và lực là lớn. Nếu $\omega \neq \omega_0$, chúng "không biết đến" nguyên tử.



3) a) *Cho hai dao động của trường của sóng đang lan truyền với vận tốc c. Chúng cách nhau một chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Nếu nguyên tử chuyển động với vận tốc v_0 nhận được dao động thứ nhất vào lúc t, nó sẽ thu được dao động thứ hai vào lúc t' sao cho :*

$$t' = t + T + \frac{v_0}{c}(t' - t)$$

vì ta phải tính đến sự di chuyển của êlectrôn giữa hai lúc đó. Vậy chu kì biểu kiến mà nguyên tử nhận được là $T' = t' - t = \frac{T}{1 - \frac{v_0}{c}}$.

Tần số tương ứng là $\omega' = \omega\left(1 - \frac{v_0}{c}\right)$. Ở đây ta thấy lại hiệu ứng DOPPLER đã khảo sát ở bài tập giải sẵn, chương 4.

Lực LORENTZ vẫn phải là một, dù nó được tính trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm (trong đó trường điện từ là $\vec{E}$, $\vec{B}$) hay trong hệ quy chiếu tịnh tiến với vận tốc v_0, trong đó nguyên tử đứng yên (trong đó trường điện từ là $\vec{E}'$, $\vec{B}'$), vậy $\vec{E}_0' + \vec{0} \wedge \vec{B}_0' = \vec{E}_0 + \vec{v}_0 \wedge \vec{B}_0$, mặc dù vận tốc phi tương đối tính v_0 là bao nhiêu. Bằng phép đồng nhất hóa, ta rút ra :

$$E_0' = E_0 - v_0 B_0 = E_0\left(1 - \frac{v_0}{c}\right).$$

Ta cũng có thể chứng tỏ rằng $B_0' = B_0$ bằng cách lấy hai hệ quy chiếu trong đó nguyên tử có các vận tốc $\vec{v}$ và $\vec{v}'$ liên kết bởi phép cộng vận tốc :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' .$$

b) *Ở đây ta cộng các lực từ (các lực điện luôn luôn bằng không) tác dụng bởi mỗi một trong hai SPCĐS truyền ngược chiều nhau, với các kí hiệu :*

$$\omega' = \omega\left(1 - \frac{v_0}{c}\right) \quad \text{và} \quad \omega'' = \omega\left(1 + \frac{v_0}{c}\right)$$

là tần số của mỗi sóng đó mà nguyên tử nhìn thấy :

$$E_0' = E_0\left(1 - \frac{v_0}{c}\right) \quad \text{và} \quad E_0'' = E_0\left(1 + \frac{v_0}{c}\right)$$

là các biên độ các trường của mỗi sóng đó mà nguyên tử nhìn thấy ; bằng cách thích ứng hệ thức thu được với câu **2) b)** *(và chú ý đến các dấu), ta được :*

$$\langle \vec{F} \rangle \approx \frac{Qe^2}{2mc\omega_0}(E_0'^2 f(\omega') - E_0''^2 f(\omega''))\vec{e}_x .$$

Ta biết rằng hàm $f(\omega)$ là cực đại với $\omega = \omega_0$ (cực đại này bằng 1). Do đó, $f(\omega)$ biến thiên ở một bậc lớn hơn 1 đối với $\frac{v_0}{c}$, khi ω chuyển từ ω_0 đến ω' hoặc ω'' (giả thiết $\frac{Qv_0}{c} \ll 1$). Vậy chỉ có hiệu giữa các giá trị của E_0 được tính đến, và ta thu được một lực hãm :

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{2Qe^2}{mc^2\omega_0}E_0^2 v_0 \vec{e}_x = -\frac{mv_0}{\tau}\vec{e}_x ,$$

trong đó hằng số thời gian là $\tau = \frac{m^2c^2\omega_0}{2Qe^2E_0^2}$.

Áp dụng bằng số : với $E_0 = 100\text{V.m}^{-1}$, ta được $\tau \approx 8{,}6.10^8$ s. Vậy sự chậm dần là không có hiệu quả.

c) *Bây giờ ta có $f(\omega') \approx f(\omega'') \approx f(\omega) = \frac{1}{2}$, nhưng các giá trị này bị sự chênh lệch* DOPPLER *biến đổi sang bậc 1 đối với $\frac{v_0}{c}$. Hơn nữa, vì $Q \gg 1$, ta có $\frac{1}{f}\frac{df}{dv_0} \gg \frac{1}{E_0'}\frac{dE_0'}{dv_0}$, thành thử trong phép tính ta có thể bỏ qua ảnh hưởng của sự biến thiên biên độ của trường.*

Ta có :

$$\langle \vec{F} \rangle \approx [f(\omega') - f(\omega'')]\frac{Qe^2}{2mc\omega_0}E_0^2\vec{e}_x = -\left(\frac{df}{d\omega}\right)_\omega \frac{2\omega v_0}{c}\frac{Qe^2}{2mc\omega_0}E_0^2$$

$$\approx -\frac{Q^2e^2}{mc^2\omega_0}v_0E_0^2$$

nó có dạng $\langle \vec{F} \rangle = -\frac{mv_0}{\tau'}\vec{e}_x$ *với* $\tau' = \frac{m^2c^2\omega_0}{Q^2e^2E_0^2}$.

Áp dụng bằng số : thời gian đặc trưng vào cỡ 3 phút ở đây ứng với một sự chậm lại rõ ràng là có hiệu quả hơn.

Sự khảo sát này cho ta nguyên tắc của một thiết bị dùng để tạo ra các nguyên tử "siêu lạnh", tức là hầu như bất động. Lực hãm vào loại ma sát nhớt đã khiến ta gọi chùm sáng bị giam này là một "chất mật quang học".

4) *Nếu $\omega \ll \omega_0$ thì p và E đồng pha (xem câu* **1) a)**). *Một lưỡng cực cùng chiều với $\vec{E}$ bị hút về phía các miền có trường mạnh. Vậy các nguyên tử bị hút về trục. Nếu $\omega \gg \omega_0$ thì p và E ngược pha và các nguyên tử bị đẩy ra phía ngoài chùm.*

6 **1)** *Sử dụng hệ tọa độ cầu, ta có ở miền bức xạ ($\lambda \ll r$, tức là $\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}$) ;*

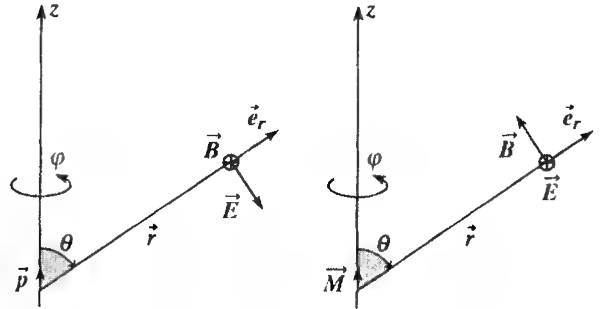
$$\underline{\vec{A}}(\vec{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi c} j\omega M_0 e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}\frac{\sin\theta}{r}\vec{e}_\varphi \text{ và } V = 0 .$$

Tính các trường ở bậc thấp nhất của lũy thừa của $\frac{1}{r}$, ta được :

$$\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{A}}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\omega^2 M_0 \sin\theta}{r}e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}\vec{e}_\varphi$$

$$\text{và} \quad \underline{\vec{B}} = \overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{A}} = -\frac{\mu_0}{4\pi c^2}\frac{\omega^2 M_0 \sin\theta}{r}e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}\vec{e}_\theta .$$

Trường này có một cấu trúc địa phương của sóng phẳng điện từ $\underline{\vec{E}} = c\underline{\vec{B}} \wedge \vec{e}_r$ truyền xuyên tâm. Phương của điện trường và từ trường đổi cho nhau so với trường hợp lưỡng cực điện bức xạ.



2) *Giá trị trung bình của vectơ* POYNTING *là :*

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0}\mathcal{R}e(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{\mu_0}{32\pi^2c^3}\frac{\omega^4 M_0^2 \sin^2\theta}{r^2}\vec{e}_r ,$$

và công suất trung bình bức xạ theo mọi phương bằng :

$$\langle \mathcal{P}_M \rangle = \frac{\mu_0\omega^4 M_0^2}{12\pi c^3}$$

(công suất ứng với lưỡng cực điện dao động là $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$).

3) *Bậc độ lớn của mômen lưỡng cực điện là $p_0 = ea$, của mômen lưỡng cực từ là $M_0 = \frac{e}{T}\pi a^2 = \frac{eva}{2}$, vì $vT = 2\pi a$. Ta có thể so sánh các bậc độ lớn ứng với các bức xạ lưỡng cực điện và từ :*

$$\frac{\langle \mathcal{P}_M \rangle}{\langle \mathcal{P} \rangle} = \frac{M_0^2}{p_0^2c^2} \approx \frac{v^2}{4c^2} \ll 1.$$

Bức xạ của lưỡng cực điện rõ ràng là đáng kể hơn.

7 TÁN SẮC HẤP THỤ VÀ BÓ SÓNG

Mục tiêu

■ Sự lan truyền trường điện từ trong môi trường dẫn điện.

■ Tán sắc và hấp thụ.

■ Bó sóng.

■ Vận tốc pha.

Điều cần biết trước

■ Các phương trình MAXWELL.

■ Khảo sát các nghiệm của phương trình d'ALEMBERT.

■ Sóng phẳng chạy đơn sắc.

Mở đầu

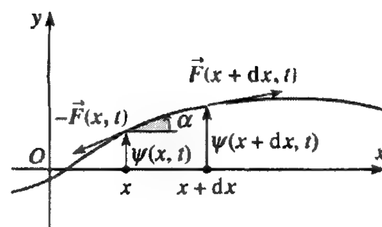
Trong các chương trước, chúng ta đã khảo sát sự lan truyền của các sóng là nghiệm của phương trình sóng cổ điển, hay phương trình d'ALEMBERT. Nhiều hiện tượng lan truyền được mô tả bởi các phương trình khác nhau, làm hiện rõ các hiện tượng tán sắc và hấp thụ.

Trong trường hợp các sóng điện từ, chúng ta đã chủ yếu chỉ giới hạn ở việc khảo sát sự lan truyền trong chân không.

Đặc trưng cho sự lan truyền một sóng điện từ trong môi trường vật chất như thế nào ?

Chúng ta sẽ biện luận khía cạnh đó trong trường hợp một môi trường dẫn điện (kim loại plasma, trong đó có các điện tích tự do, hay điện tích dẫn) và ở chương 8, chúng ta sẽ bổ sung cho sự tiếp cận này bằng việc khảo sát sự lan truyền sóng điện từ trong các điện môi, tức là khi có mặt các điện tích "liên kết".

1 Sự tán sắc và sự hấp thụ của một sóng trên một sợi dây



H.1. *Nguyên tố sợi dây có độ dài* d*x*.

1.1. Dao động của một sợi dây không lí tưởng

Ở *chương* 2, chúng ta đã chỉ ra rằng phương trình lan truyền các dao động ngang truyền theo một sợi dây rung không có độ cứng là phương trình d'ALEMBERT.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0,$$

trong đó vận tốc đặc trưng của sự lan truyền là $c=\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ với T_0 là độ căng của sợi dây và μ là mật độ khối lượng dài của nó.

Nếu sợi dây vẫn rất mềm nhưng hơi bị xơ, ta phải tính đến sự tắt dần do ma sát của sợi dây với không khí bao quanh gây ra.

Chúng ta mô hình hóa tác dụng đó bằng một lực chống lại sự di chuyển của sợi dây và tỉ lệ với vận tốc của nó, cụ thể là, đối với một nguyên tố độ dài d*x* (*h.*1) :

$$d\vec{f}=-\mu\frac{v}{\tau}dx\vec{e}_y=-\frac{\mu}{\tau}\frac{\partial\psi}{\partial t}\vec{e}_y.$$

Các phương trình liên kết thành phần F_y của lực căng với vận tốc của sợi dây (xem chương 2) trở thành :

$$\begin{cases} F_y=T_0\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} \\ \mu\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)=\dfrac{\partial F_y}{\partial x} \end{cases}.$$

Chúng ta suy ra phương trình lan truyền mới (được ψ, v và F_y nghiệm đúng) :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial\psi}{\partial t}-c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0,$$

nó dĩ nhiên là khác với phương trình d'ALEMBERT.

1.2. Các nghiệm của phương trình lan truyền

1.2.1. Ích lợi của phép phân tích điều hòa của bài toán

Phương trình lan truyền ta vừa thu được là một phương trình tuyến tính.

Ta thừa nhận rằng một sóng vật lí có thể được phân tích thành một sự chồng chập các sóng phẳng chạy đơn sắc (§3 sẽ cho chúng ta một ý niệm chính xác hơn một chút về vấn đề này).

Một sóng như vậy là nghiệm của phương trình lan truyền, một phương trình vi phân tuyến tính có hệ số không đổi, nếu như mỗi thành phần đơn sắc của nó cũng là nghiệm của phương trình lan truyền.

Phép phân tích điều hòa (phân tích sóng hài) của bài toán, tức là sự tìm kiếm các nghiệm điều hòa, là rất bổ ích đối với sự khảo sát bài toán tuyến

tính này. Chúng ta sẽ tìm các nghiệm "sóng đơn sắc" bằng cách sử dụng phép kí hiệu phức để đơn giản hóa sự khảo sát các phương trình vi phân được sử dụng.

Chúng ta có thể khảo sát một hiện tượng chi phối bởi các phương trình tuyến tính bằng cách sử dụng phép phân tích điều hòa.

Chú ý :

Các phương trình lan truyền phi tuyến tính có thể thừa nhận những nghiệm lan truyền mà không biến dạng, thuộc loại $\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ *chẳng hạn. Khi đó vận tốc truyền của các sóng này phụ thuộc biên độ của chúng (ta đã khảo sát một nghiệm loại này ở bài tập 8, chương 3). Những sóng như vậy được gọi là sóng đơn : một tổ hợp tuyến tính của các nghiệm đó không phải một cách tiên nghiệm là nghiệm của phương trình lan truyền. Một cách tổng quát hơn, việc biết các nghiệm của một phương trình lan truyền phi tuyến tính mang cho ta khá ít thông tin. Sau này, chúng ta chỉ giới hạn trong những trường hợp hay gặp, trong đó có thể chấp nhận một sự mô tả trong phép gần đúng tuyến tính.*

1.2.2. Số sóng phức

Ta hãy tìm một nghiệm dạng sin, có biên độ phức $\underline{\psi}$ tỉ lệ với $e^{j\omega t}$, của phương trình lan truyền :

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial x^2} = 0.$$

Với cách kí hiệu $\underline{\psi}(x,t) = \underline{\varphi}(x)e^{j\omega t}$, ta được :

$$-c^2 \frac{\mathrm{d}^2 \underline{\varphi}(x)}{\mathrm{d}x^2} + \left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}\right)\underline{\varphi}(x) = 0,$$

các nghiệm của nó có dạng :

$$\underline{\varphi}(x) = \underline{\varphi}_+ e^{jkx} + \underline{\varphi}_- e^{-jkx},$$

ta đã đưa vào đó một hệ số k, là số sóng phức, gắn với tần số ω bởi hệ thức tán sắc :

$$c^2 k^2 = \omega^2 - \frac{j\omega}{\tau}.$$

Sử dụng phép kí hiệu phức làm cho việc tìm kiếm các nghiệm của một phương trình lan truyền (vi phân, tuyến tính, có hệ số không đổi) được dễ dàng hơn.

Đối với một tần số ω cho trước, phương trình tán sắc thừa nhận *các nghiệm $\underline{k}$ phức* mà ta sẽ kí hiệu :

$$\underline{k}(\omega) = k_1(\omega) - jk_2(\omega) \quad \text{với} \quad k_1^2 - k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{và} \quad 2k_1k_2 = \frac{\omega}{c^2\tau}.$$

Một sóng có biên độ phức $\underline{\psi}(x,t) = \underline{\psi}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ là nghiệm của *phương trình lan truyền* nếu như số sóng (nói chung là phức) $\underline{k} = k_1 - jk_2$ được gắn với tần số ω của sóng dạng sin bởi *hệ thức tán sắc*.

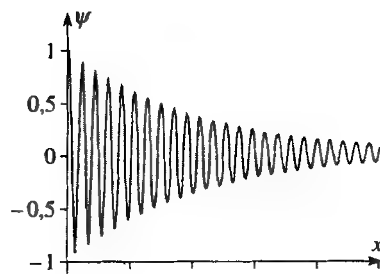
1.2.3. Sự tán sắc

Đưa nghiệm k phức vào biểu thức của biên độ một sóng chạy.

Ta có $\underline{\psi}(x,t)=\underline{\psi}_0 e^{-k_2 x} e^{j(\omega t-k_1 x)}$, tức là, theo cách kí hiệu thực (với giả định rằng $\underline{\psi}_0=\psi_0$ là thực) : $\psi(x,t)=\psi_0 e^{-k_2 x}\cos(\omega t-k_1 x)$.

Sự lan truyền pha của sóng được chứa đựng trong số hạng $\cos(\omega t-k_1 x)$.

Vận tốc truyền của pha, hay vận tốc pha, là $v_\varphi=\dfrac{\omega}{k_1}$. Nó phụ thuộc tần số ω của sóng. Môi trường lan truyền tách dần các sóng có tần số khác nhau : đó là *hiện tượng tán sắc* (ta sẽ trở lại vấn đề này ở §3).



H.2. *Hình ảnh tức thời của biên độ một sóng lan truyền mà tắt dần (t cố định).*

Phần thực của số sóng xác định vận tốc pha $v_\varphi=\dfrac{\omega}{k_1}=\dfrac{\omega}{\mathcal{R}e(\underline{k})}$, nói chung nó phụ thuộc ω.

Các sóng có tần số khác nhau không truyền đi với cùng một vận tốc : sự lan truyền có tính tán sắc.

1.2.4. Sự hấp thụ

Do thừa số $e^{-k_2 x}$, biên độ sóng biến đổi trong lòng môi trường. Trái với các sóng chạy là nghiệm của phương trình d'ALEMBERT, sóng này biến dạng trong khi lan truyền (*h*.2).

<u>*Chú ý :*</u>

Chúng ta vẫn giữ kí hiệu "SPCĐS" để chỉ các sóng phẳng dạng sin này, chúng không còn thực sự là "dạng sin" vì hình dạng của chúng biến đổi trong quá trình lan truyền.

Đối với sợi dây dao động, hệ thức tán sắc đòi hỏi phải có hệ thức :

$$k_1 k_2=-\frac{1}{2}\mathcal{I}m(\underline{k}^2)=\frac{\omega^2}{2c^2\tau}>0.$$

Nếu sự lan truyền diễn ra theo chiều tăng của x $(k_1>0)$, thì k_2 là dương : sự tắt dần diễn ra theo chiều truyền sóng. Sóng mất năng lượng cho môi trường truyền : có *sự hấp thụ*. Sự giảm theo hàm mũ của nó được đặc trưng bởi *độ xuyên sâu :*

$$\delta=\frac{1}{k_2}=-\frac{1}{\mathcal{I}m(\underline{k})}.$$

Phần ảo của số sóng dẫn đến một sự biến thiên theo hàm mũ của biên độ sóng. Đối với một sự lan truyền có hấp thụ, độ xuyên sâu $\delta=\dfrac{1}{k_2}=-\dfrac{1}{\mathcal{I}m(\underline{k})}$ đặc trưng cho sự giảm theo hàm mũ của sóng.

<u>*Chú ý :*</u>

Trong trường hợp một môi trường khuếch đại (có mặt trong sự thiết kế các nguồn sóng, thí dụ như các laze), thì ngược lại ta có thể thu được $k_1 k_2<0$. Đương nhiên đó không phải là trường hợp của sợi dây ta khảo sát !

2 Sự lan truyền sóng điện từ trong một vật dẫn kim loại

Mục đích của đoạn này là làm cho chúng ta quen với những kĩ thuật khảo sát sự lan truyền các sóng điện từ trong một môi trường vật chất. Ở đây ta sẽ triển khai một mô hình sự lan truyền của chúng trong một môi trường dẫn điện, và ta sẽ sử dụng các kĩ thuật và cách lập luận đã triển khai ở §**1**. *Chương* 8 sẽ bổ sung sự khảo sát này cho các điện môi (chất cách điện).

2.1. Sóng điện từ và điện tích

Sự biến thiên của trường điện từ khi có mặt các điện tích tuân theo các phương trình MAXWELL :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{B} = \vec{0} & (M\Phi) \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (MF) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & (MG) \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (MA) \end{cases}$$

Các định luật này vẫn có giá trị trong nhiều môi trường kim loại. Ở đây chúng ta sẽ giới hạn trong phạm vi các môi trường như vậy.

Việc giải các phương trình MAXWELL đòi hỏi phải biết các mật độ khối ρ của điện tích và $\vec{j}$ của dòng điện. Vậy ta phải khảo sát chuyển động của các hạt tích điện, chúng tương tác với trường điện từ, và do đó chúng chịu tác dụng của lực LORENTZ :

$$f = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Khi khảo sát sự lan truyền trong chân không mô tả chỉ bằng trường điện từ, chúng ta đã không phân biệt sóng điện từ với trường gắn với nó. Ở đây sóng ứng với "chuyển động" của tập hợp {trường - điện tích} mà ta sẽ tìm cách mô tả.

2.2. Chuyển động của một chất lưu các điện tích tự do

2.2.1. Môi trường kim loại

Sự dẫn điện bởi một vật liệu kim loại gắn với sự tồn tại của các êlectrôn di chuyển được trong toàn thể vật liệu. Mật độ hạt n là rất cao, vào cỡ $10^{29}\,\text{m}^{-3}$ đối với một chất dẫn điện tốt như là đồng. Tương tác của các điện tích di động này với mạng tinh thể kéo theo một sự mất năng lượng điện từ : nó có thể được mô hình hóa bởi một lực mà công suất là âm, thuộc loại :

$$\vec{f} = -m\frac{\vec{v}}{\tau},$$

ở đây τ là một thời gian hồi phục của vật liệu (vào cỡ 10^{-14}s đối với đồng).

Phương trình chuyển động của các êlectrôn dẫn :

$$m\vec{a} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - m\frac{\vec{v}}{\tau},$$

trong đó $\vec{v}$ và $\vec{a}$ là vận tốc và gia tốc của một êlectrôn, cho phép mô tả sự lan truyền một sóng điện từ trong vật dẫn.

*Chú ý : **Môi trường iôn hóa***

Một plasma là một chất khí trung hòa trong tổng thể, bị iôn hóa một phần hoặc toàn phần, chứa những điện tích tự do (êlectrôn và iôn) tương tác với trường điện từ của sóng.

Tầng điện li, là lớp khí quyển ở độ cao hơn 60km, *là một thí dụ về plasma. Môi trường đó bị iôn hóa một phần do các phôtôn năng lượng cao trong bức xạ của Mặt Trời, nó được đặc trưng bởi số lượng êlectrôn tự do trong đơn vị thể tích, khoảng từ* $10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}$ *đến* $10^{2}\,\mathrm{m}^{-3}$ *(con số này là hàm của độ cao và biến đổi giữa ban ngày và ban đêm).*

Plasma là một môi trường ít đậm đặc, và trong một phép gần đúng bậc nhất ta có thể bỏ qua hiệu ứng của các va chạm giữa các hạt.

Các iôn có một điện tích so sánh được (về độ lớn) với điện tích của các êlectrôn, nhưng có khối lượng lớn hơn nhiều (khối lượng một prôtôn bằng khoảng 2000 *lần khối lượng một êlectrôn). Chúng đóng góp không đáng kể vào mật độ khối* $\vec{j}$ *của dòng điện trong plasma. Chúng ta thu được mật độ đó bằng cách khảo sát chuyển động chỉ của các êlectrôn thôi, mô tả bởi phương trình :*

$$m\vec{a} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Như vậy chúng ta có thể chuyển từ sự lan truyền trong kim loại sang sự lan truyền trong lòng một plasma kém đậm đặc, với vài sự điều chỉnh : mật độ điện tích di động nhỏ hơn nhiều, ảnh hưởng của tương tác giữa các hạt (các va chạm) không đáng kể.

2.2.2. Phép gần đúng môi trường liên tục

Không thể khảo sát được chuyển động của mỗi hạt riêng lẻ. Thực ra, vận tốc mà ta kí hiệu bằng $\vec{v}$ là một vận tốc trung bình, vận tốc của tập hợp các hạt mang điện tích di động (trong môi trường kim loại, đó là các êlectrôn).

Chúng ta thừa nhận mô hình một *chất lưu các điện tích tự do*, mà *trường vận tốc* là $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$.

Gia tốc của một êlectrôn "trung bình" là :

$$\vec{a}(\vec{r},t) = \lim_{dt \to 0}\left(\frac{\vec{v}(r + \vec{v}\mathrm{d}t,\, t + \mathrm{d}t) - \vec{v}(\vec{r},t)}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$= \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}(\vec{r},t)}{\partial t} + (\vec{v}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}(\vec{r},t)$$

(chúng ta thấy lại ở đây khái niệm đạo hàm theo hạt ; *xem H–Prépa, Cơ học chất lưu, năm thứ hai*).

Phương trình chuyển động của chất lưu các điện tích tự do được viết thành :

$$m\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\right) = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - m\frac{\vec{v}}{\tau}.$$

Áp dụng 1

Thời gian hồi phục, ứng dụng của mô hình chất lưu các điện tích tự do trong một kim loại

Đồng có nguyên tử số $Z = 29$, khối lượng mol $M = 64\text{g.mol}^{-1}$, mật độ khối lượng $\mu = 8{,}9.10^3\text{kg.m}^{-3}$.

1) *Ước tính mật độ hạt n của các êlectrôn dẫn trong kim loại này.*

2) *Độ dẫn điện của đồng đặt trong một điện trường không đổi là $\gamma_0 = 5{,}9.10^7\text{S.m}^{-1}$. Ước tính giá trị thời gian hồi phục τ của kim loại này.*

3) *Đề xuất một bậc độ lớn của khoảng cách trung bình d giữa các điện tích tự do.*

4) *Mô hình chất lưu các điện tích tự do có thể chấp nhận được trong miền phổ nào để mô tả tương tác giữa các điện tích tự do và trường điện từ của một sóng ?*

Cho biết : *khối lượng êlectrôn :*

$$m = 9{,}1 \,.\, 10^{-31}\ \text{kg}\ ;$$

môđun điện tích của êlectrôn :

$$e = 1{,}6 \,.\, 10^{-19}\ \text{C}\ ;$$

hằng số AVOGADRO :

$$N_A = 6{,}02.10^{23}\text{mol}^{-1}.$$

1) Nếu thừa nhận (để cho đơn giản) rằng mỗi nguyên tử đồng giải phóng hai êlectrôn dẫn, số lượng các êlectrôn đó trong một đơn vị thể tích là :

$$n = 2N_A\frac{\mu}{M} = 1{,}67.10^{29}\ \text{m}^{-3}.$$

2) Khi kim loại đặt trong một điện trường không đổi và đều $\vec{E}_0$ thì phương trình biến thiên của dòng chảy (đều) của các điện tích tự do là :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E}_0.$$

Chúng ta rất nhanh chóng thu được một chế độ dẫn điện không đổi ứng với một dòng chảy với vận tốc giới hạn $\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}_0$, tức là ứng với mật độ dòng điện khối :

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}_0 = \gamma_0\vec{E}_0.$$

Độ dẫn điện của đồng đã được biết, chúng ta rút ra bậc độ lớn của thời gian hồi phục của đồng :

$$\tau = \frac{m\gamma_0}{ne^2} \approx 10^{-14}\,\text{s},$$

phù hợp với điều đã được thông báo ở §**2.2.1.**

3) Khoảng cách d vào bậc $n^{-\frac{1}{3}} \approx 180$ pm.

4) Cách mô tả đó có ý nghĩa nếu ta có thể xác định một thang đo trung mô L, nó phải là :

• lớn trong thang đo vi mô, tức là so với khoảng cách trung bình d giữa các điện tích. Một thể tích vào cỡ L^3 chứa một số điện tích đủ để cho khái niệm hành vi "trung bình" của các điện tích có một ý nghĩa. Nó cũng phải là lớn so với quãng đường tự do trung bình l của các điện tích, để cho lực hiện tượng luận $f = -m\frac{\vec{v}}{\tau}$ có thể mô tả được một cách thỏa đáng các hiệu ứng va chạm ;

• nhỏ trong thang đo vĩ mô (khoảng cách đặc trưng của những biến thiên các tính chất của môi trường, độ dài đặc trưng của những biến thiên của trường điện từ của sóng : đối với một sóng dạng sin, đó là bước sóng của nó trong chân không $\lambda = \frac{c}{v}$) để cho sự mô tả vẫn là chính xác.

Chúng ta có thể ước đoán rằng mô hình chất lưu các điện tích tự do là chấp nhận được nếu $\lambda \gg d$. Miền tần số tương ứng được cho bởi :

$$\nu = \frac{c}{d} \approx 2.10^{18}\,\text{Hz}.$$

Mô hình của ta cho phép khảo sát một cách đơn giản các sóng đi từ miền vô tuyến điện đến các tia tử ngoại xa (*xem chương* 5, *H*.3).

2.2.3. Phép gần đúng tuyến tính

Chúng ta sẽ giới hạn trong trường hợp hay gặp, khi phương trình chuyển động viết theo kiểu tuyến tính hóa là đủ để tính toán. Biên độ điện trường được giả định là khá nhỏ để cho biên độ chuyển động của các điện tích là nhỏ so với bước sóng của sóng điện từ. Như vậy ta sẽ không để ý đến các biến thiên không gian của trường ở thang bậc của biên độ dịch chuyển của êlectrôn, kí hiệu là ξ.

Vậy, đối với một sóng phẳng dạng sin có tần số ω, ta có thể dự đoán rằng :

$$\frac{\left|(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right|}{\left|\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|} \approx \frac{\left|kv^2\right|}{\omega v} \approx \left|\frac{kv}{\omega}\right| \approx \frac{\xi}{\lambda} \ll 1.$$

Ước tính độ lớn từ trường của sóng bằng hệ thức cấu trúc của một SPCĐS, ta cũng có thể viết :

$$\frac{\left|\vec{v} \wedge \vec{B}\right|}{\left|\vec{E}\right|} \approx \frac{\left|v\dfrac{kE}{\omega}\right|}{\left|E\right|} \approx \left|\frac{kv}{\omega}\right| \approx \frac{\xi}{\lambda} \ll 1,$$

thành thử ảnh hưởng của từ trường của sóng là không đáng kể so với ảnh hưởng của điện trường của nó.

<u>*Chú ý :*</u>

Khi có một từ trường tĩnh phụ $\vec{B}_0$, thì không thể nói chắc rằng có thể bỏ qua được số hạng $\vec{v} \wedge \vec{B}_0$.

Như vậy ta thu được phương trình tuyến tính hóa của chuyển động :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E}.$$

2.2.4. Sóng ngang

Một sự khảo sát đầy đủ hơn sẽ chỉ ra rằng điện trường của một sóng điện từ phẳng dạng sin truyền trong các môi trường này là trường ngang (*xem bài tập* 4).

Thí dụ, đối với một sóng truyền theo phương trục (Ox), chỉ có các thành phần E_y và E_z của điện trường, chỉ phụ thuộc x và t (sóng phẳng), là khác không. Một trường như vậy có một dive bằng không, và môi trường nó đi qua là trung hòa trong toàn bộ, cũng vẫn là trung hòa trong bộ phận :

$$\rho = 0.$$

Vì các iôn là bất động, mật độ hạt n của các êlectrôn chuyển động vẫn là đều. Vectơ mật độ dòng điện của môi trường tỉ lệ với vectơ vận tốc của chất lưu các điện tích tự do : $\vec{j} = -ne\vec{v}$, và hệ số tỉ lệ là không đổi (n = cte).

Trong phạm vi mô hình chất lưu các điện tích tự do, và với phép gần đúng tuyến tính, sự lan truyền của một sóng phẳng ngang trong một môi trường dẫn điện tuân theo :

- **phương trình chuyển động của chất lưu các điện tích tự do (các êlectrôn) :**

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E} \;;$$

• **các phương trình MAXWELL viết dưới dạng :**

$$\operatorname{div}\vec{E}=\vec{0}\ ;\ \operatorname{div}\vec{B}=\vec{0}\ ;\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ ;\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

trong đó vectơ mật độ dòng điện gây ra bởi chuyển động của các êlectrôn có mật độ khối n là $\vec{j}=-ne\vec{v}$.

2.3. Hệ thức tán sắc của các SPCĐS ngang

Bây giờ ta tìm các nghiệm "sóng phẳng chạy dạng sin" có mạch số ω, có vectơ sóng phức *một cách tiên nghiệm*, kí hiệu là $\underline{\vec{k}}=\underline{k}\vec{e}_x$, có điện trường theo các kí hiệu phức là :

$$\underline{\vec{E}}(x,t)=\underline{\vec{E}}_0e^{j(\omega t-\underline{k}x)}.$$

Từ trường của sóng *phẳng* đơn sắc đó là :

$$\underline{\vec{B}}=\frac{\underline{\vec{k}}}{\omega}\wedge\underline{\vec{E}}_0e^{j(\omega t-\underline{k}x)}.$$

2.3.1. Độ dẫn điện của kim loại

Trong chế độ dạng sin ổn định, vectơ vận tốc (phức) được cho bởi phương trình chuyển động, cụ thể là :

$$\underline{\vec{v}}=-\frac{\frac{e}{m}}{j\omega+\frac{1}{\tau}}\underline{\vec{E}}_0e^{j(\omega t-\underline{k}x)}.$$

Mật độ khối của dòng điện $\vec{j}=-ne\underline{\vec{v}}$ có dạng $\vec{j}=\underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$. Cách viết đó định nghĩa *độ dẫn điện phức* $\underline{\gamma}$, là hàm của mạch số ω:

$$\underline{\gamma}(j\omega)=\frac{\gamma_0}{1+j\omega\tau}.$$

Hằng số $\gamma_0=\dfrac{ne^2\tau}{m}$ biểu thị độ dẫn điện của vật liệu dẫn điện theo chế độ vĩnh cửu.

Áp dụng 2

Biến thiên của độ dẫn điện phức của môi trường theo tần số của sóng điện từ

1) *Trong miền tần số nào thì độ dẫn điện phức $\underline{\gamma}$ có thể coi như độ dẫn điện γ_0 trong chế độ vĩnh cửu ?*

Đối với một kim loại dẫn điện tốt, thí dụ đồng ($\tau\approx10^{-14}$s), miền đó ứng với loại sóng điện từ nào ?

2) *Sự biến thiên theo ω của công suất trung bình do trường điện từ cung cấp cho các điện tích di động là thế nào, xét về mặt định tính ? Trong miền tần số tại đó $\underline{\gamma}\approx\gamma_0$, ta thấy lại được hiệu ứng cổ điển nào ?*

1) Khi tần số ν nghiệm đúng bất đẳng thức $\nu\ll\dfrac{1}{2\pi\tau}$ thì độ dẫn điện $\underline{\gamma}$ đồng nhất với γ_0. Giới hạn "tần số thấp" đó đối với đồng ứng với $\nu\ll1{,}6.10^3$Hz, tức là với những bước sóng trong chân không vào cỡ $\lambda\gg19\ \mu$m. Đối với

một vật dẫn tốt, sự gần đúng $\underline{\gamma} = \gamma_0$ có thể áp dụng cho các sóng vô tuyến điện, và cho tới miền các sóng milimet ; có tần số vài trăm GHz.

2) Công suất khối tức thời do trường điện từ cung cấp cho các điện tích là $\mathcal{P} = \mathcal{R}e(\underline{\vec{j}})\mathcal{R}e(\underline{\vec{E}})$. Giá trị trung bình của nó là :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{\vec{j}}.\underline{\vec{E}}^*).$$

• Ở tần số cao ($\omega\tau \gg 1$), điện trường và vectơ mật độ dòng điện vuông góc nhau, công suất trung bình đó bằng không.

• Ở tần số thấp ($\omega\tau \ll 1$), hai vectơ đó đồng pha, công suất trung bình đó là dương : sự phân tán năng lượng của trường truyền cho môi trường (mất mát do va chạm) ứng với *hiệu ứng* JOULE.

2.3.2. Hệ thức tán sắc

Đối với sóng ngang thì $\text{div}\,\underline{\vec{E}} = \vec{0}$, vậy :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}}) = -\Delta\underline{\vec{E}} = \underline{k}^2\underline{\vec{E}}.$$

Mặt khác, các phương trình liên kết các trường $\underline{\vec{E}}$ và $\underline{\vec{B}}$ cho ta :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}}) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t}\right) = -\mu_0\frac{\partial\underline{\vec{j}}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2}.$$

Sử dụng hệ thức $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$, ta được :

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0\underline{\gamma}\omega - \underline{k}^2\right)\underline{\vec{E}} = \vec{0}.$$

Vậy phương trình lan truyền đòi hỏi hệ thức tán sắc :

$$c^2\underline{k}^2 = \omega^2 - j\frac{\underline{\gamma}\omega}{\varepsilon_0}.$$

Hệ thức này tương tự như hệ thức ta đã thu được đối với sợi dây dao động ở §**1**. Tuy nhiên phép giải của nó tinh tế hơn, vì hệ số $\underline{\gamma}$ là phức. Bằng cách phân tích sự biến thiên của số sóng phức $\underline{k}$ tùy theo tần số sóng, ta sẽ làm nổi rõ các hành vi tiệm cận của môi trường.

Áp dụng 3

Mạch số plasma, các bậc độ lớn của các mạch số đặc trưng

1) *Kiểm tra thứ nguyên của đại lượng :*

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}},$$

gọi là mạch số plasma của môi trường dẫn điện.

Cho biết : $\varepsilon_0 \approx 8{,}84.10^{-12}$ F.m^{-1} ;

$m = 9{,}1\ 10^{-31}$ kg ; e = $1{,}6\ .\ 10^{-19}$ C.

2) *Đối với một kim loại dẫn điện tốt, thí dụ đồng* ($n \approx 10^{29}$ m^{-3}; $\tau \approx 10^{-14}$ s), *thì mạch số plasma của môi trường ứng với loại sóng điện từ nào ?*

3) *Chỉ ra các mạch số đặc trưng tham gia vào hệ thức tán sắc đã thu được và so sánh chúng với nhau.*

1) Đại lượng ω_p là một mạch số, vậy nó đồng nhất với nghịch đảo của một thời gian.

Ta có thể kiểm tra điều đó bằng cách nhận xét rằng tỉ số $\frac{c^2}{\varepsilon_0}$ đồng nhất với một lực nhân với một khoảng cách bình phương (hãy nghĩ đến biểu thức lực COULOMB của tương tác giữa hai điện tích). Sử dụng các kí hiệu cổ điển : M cho một thể tích, L cho một độ dài và T cho một thời gian, ta được :

$$\left[\frac{c^2}{\varepsilon_0}\right] = [F].L^2 = M.L^3.T^{-2},$$

rồi $[\omega_p] = \left[\frac{L^{-3}}{M}.M.L^3.T^{-2}\right]^{\frac{1}{2}} = T^{-1}$.

2) Đối với $n \approx 10^{29}\,m^{-3}$, ta được :

$$\omega_p = 2.10^{16}\,rad.s^{-1}.$$

Giá trị đó ứng với các sóng điện từ có bước sóng :

$$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} \approx 0{,}09\,\mu m$$

trong chân không, vậy là ứng với miền tử ngoại.

3) Hệ thức tán sắc có thể viết thành :

$$c^2\underline{k}^2 = \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{\left(1+\frac{1}{j\omega\tau}\right)}.$$

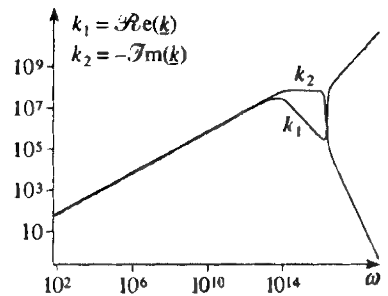
Nó làm xuất hiện các tần số đặc trưng $\frac{1}{\tau}$ nằm trong miền hồng ngoại xa và ω_p nằm trong miền tử ngoại : $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p$.

2.3.3. Các chế độ giới hạn

Ta kí hiệu $\underline{k} = k_1 - jk_2$ là số sóng phức cho bởi hệ thức tán sắc :

$$c^2\underline{k}^2 = \omega^2 - j\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0}\frac{\omega}{1+j\omega\tau} = \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1+\frac{1}{j\omega\tau}}$$

và biểu diễn (*h*.3) các biến thiên của k_1 và k_2 theo tần số sóng (trường hợp ta xét : $k_1 > 0$, do đó sóng truyền theo chiều tăng của x).



H.3. *Biến thiên của các phần thực và ảo của số sóng phức $\underline{k}$ đối với đồng (thang chia độ log–log).*

Trên biểu đồ, chúng ta nhận dạng các miền tần số (được thể hiện trong *áp dụng* 3) ứng với các hành vi tiệm cận đơn giản :

- đối với $\omega \ll \frac{1}{\tau} \approx 10^{14}s^{-1}$, k_1 và k_2 hầu như trùng nhau ;
- đối với $\frac{1}{\tau} \ll \omega \ll \omega_p \approx 10^{16}s^{-1}$, k_2 rất lớn hơn k_1 (đừng quên rằng đây là thang chia độ lôga). Số sóng là thuần túy ảo ;
- đối với $\omega \gg \omega_p$, k_1 rất lớn hơn k_2, số sóng là thực.

Chúng ta có thể dựng nên bảng sau đây (*h*.4).

miền phổ	**sóng VTĐ, ..., sóng micrômet** $\omega \ll \frac{1}{\tau} \ll \omega_p$	**hồng ngoại, ..., tử ngoại** $\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$	**tử ngoại xa, tia X** $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$
hệ thức tán sắc	$\underline{k}^2 \approx -j\mu_0\gamma_0\omega$	$\underline{k}^2 \approx \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}$	
số sóng ($k_1 \geq 0$)	$\underline{k} = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}}(1-j)$	$\underline{k} = -j\sqrt{\frac{\omega_p^2-\omega^2}{c^2}}$	$\underline{k} = \sqrt{\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}}$

◀**H.4.** *Các hành vi tiệm cận.*

2.4. Hiệu ứng da ở tần số thấp $\left(\omega \ll \frac{1}{\tau}\right)$

2.4.1. Độ dẫn điện của môi trường kim loại

Trong miền này độ dẫn điện của môi trường có thể coi như bằng giá trị γ_0 của nó ở chế độ vĩnh cửu : $\underline{\gamma} = \gamma_0$, thực và dương.

2.4.2. Hệ thức tán sắc

Hệ thức tán sắc ở đây có dạng tiệm cận :

$$\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma_0\omega = \mu_0\gamma_0\omega e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

tức là, đối với sự lan truyền theo chiều tăng của x :

$$\underline{k} = \sqrt{\mu_0\gamma_0\omega}\, e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{1-j}{\delta}$$

bằng cách đặt $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$.

Trường điện từ của sóng chạy trong kim loại có dạng :

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}}(x,t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)} \\ \underline{\vec{B}}(x,t) = \dfrac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}(x,t)}{\omega} = \dfrac{\sqrt{2}}{\delta\omega}\vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}}_0\, e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)} \end{cases}.$$

Trái với trường hợp lan truyền trong chân không, điện trường và từ trường của sóng ở đây không đồng pha.

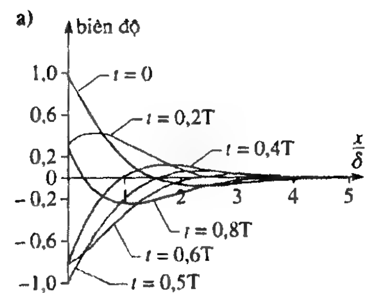
2.4.3. Độ dầy của da

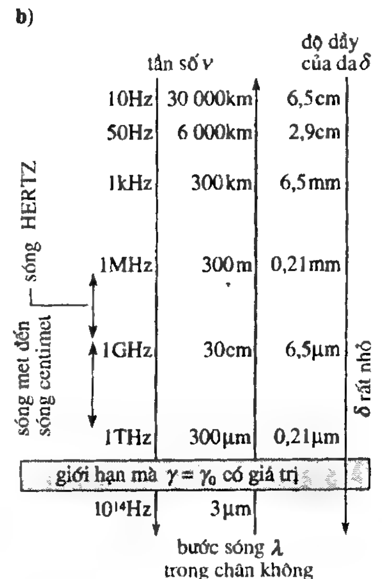
Các độ dài đặc trưng của sự lan truyền và tắt dần của sóng là như nhau và bằng δ. *Sự tắt dần là rất nhanh*, như *hình* 5a đã minh họa.

Hình 5b chỉ rõ độ lớn của độ dài δ đối với một chất dẫn điện tốt như đồng, đối với những giá trị tần số khác nhau. Độ dầy đó là rất nhỏ trong miền các *sóng met hoặc centimet* : sóng điện từ hầu như không đi sâu vào bên trong kim loại, và chỉ nằm ở một màng mỏng ở lân cận bề mặt. Độ xuyên thấu rất nhỏ mà vượt ra ngoài nó trường điện từ hầu như bằng không, được gọi là *độ dầy của da*.

<u>*Chú ý :*</u>

Một độ dầy giới hạn của da bằng không mà ta thu được khi độ dẫn điện của kim loại là tuyệt hảo, có một ích lợi thực tiễn, vì nó ứng với một sự phản xạ toàn phần, không phân tán năng lượng, của các sóng điện từ trên kim loại. Đặc điểm này có thể được sử dụng để chế tạo các ống dẫn sóng bằng kim loại (xem H–Prépa, Điện từ học, lớp đệ nhị, MP–PT).





H.5. *Hiệu ứng da.*

a. *Điện trường trong vật dẫn ở những thời điểm khác nhau.*

b. *Biến thiên của độ dầy của da (đối với đồng).*

Áp dụng 4

Dòng điện dẫn và dòng điện dịch ở tần số thấp

1) *Trong miền tần số ta xét* $\left(\omega \ll \frac{1}{\tau} \ll \omega_p\right)$, *hãy so sánh các bậc độ lớn của dòng điện dẫn* $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ *dòng điện dịch* $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ *trong phương trình* MAXWELL - AMPÈRE.

2) *Hãy chứng tỏ rằng trong điều kiện đó thì phương trình lan truyền có thể coi như là một phương trình tán xạ.*

3) *Hiệu ứng da được mô tả như một thể hiện của định luật* LENZ *trong phần giáo trình về sự cảm ứng điện từ (xem H–Prépa, Điện từ học, lớp đệ nhị). Hãy chứng tỏ rằng những kết quả đã thu được không cần phải đánh giá lại trong một miền mà ta đã không sử dụng một cách tiên nghiệm phép gần đúng các chế độ chuẩn vĩnh cửu.*

1) Ở đây ta có :

$$\frac{|\vec{j}|}{|\vec{j}_D|} \approx \frac{|\gamma_0 E|}{\varepsilon_0 \omega E} \approx \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega} \gg 1 .$$

2) Phương trình lan truyền của điện trường là $\Delta\vec{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{j} + \vec{j}_D)$, ở đây có thể coi như :

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .$$

Phương trình này giống như phương trình khuếch tán nhiệt trong một vật liệu đồng nhất có hệ số khuếch tán D : $\Delta T = D\frac{\partial T}{\partial t}$ *(xem H–Prépa, Nhiệt động lực học, năm thứ hai).*

Trong điều kiện này, có thể bỏ qua dòng điện dịch trong phương trình MAXWELL-AMPÈRE, và các phương trình chi phối sự lan truyền của sóng điện từ trong kim loại là các phương trình mô tả các hiện tượng cảm ứng điện từ trong một vật dẫn thuần.

Ngoài ra, ta cũng có thể kiểm tra rằng độ dài đặc trưng của hiệu ứng đã quan sát, độ dầy của da δ, ở đây rõ ràng là nhỏ hơn bước sóng $\lambda = \frac{c}{\nu}$ của một sóng điện từ có tần số ν trong chân không :

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}}{\frac{2\pi c}{\omega}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\omega}{2\pi^2\gamma_0}} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi^2\tau\omega_p^2}} \ll 1,$$

điều đó biện minh cho phép gần đúng các chế độ chuẩn vĩnh cửu.

▶ **Để luyện tập : bài tập 1.**

2.5. Sự lan truyền ở tần số cao $\left(\omega \gg \frac{1}{\tau}\right)$

2.5.1. Môi trường kim loại không có va chạm

Trong miền này, số hạng mô hình hóa các hiệu ứng va chạm là không đáng kể trong phương trình chuyển động :

$$\left|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right| \gg \left|\frac{\vec{v}}{\tau}\right| \quad \text{và} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \approx -\frac{e}{m}\vec{E} .$$

Trong chế độ dạng sin, vận tốc êlectrôn và điện trường là vuông góc với nhau : công suất trung bình mà trường truyền cho các điện tích là bằng không (*xem Áp dụng* 2).

Chú ý :

*Hành vi của chất lưu các điện tích tự do ở đây là hành vi của một plasma loãng, không có va chạm, đã mô tả ở §**2.2.1** (với sự sai khác về bậc độ lớn của các tần số đặc trưng !). Một mô hình cổ điển vi mô của sự dẫn điện còn đi đến sự lí giải thời gian τ như một bậc độ lớn của khoảng thời gian giữa hai va chạm liên tiếp của một êlectrôn dẫn điện với mạng tinh thể. Ở đây sóng dao động nhanh đến nỗi êlectrôn không đủ thời gian để va chạm trước khi chuyển động của nó bị đảo ngược lại.*

2.5.2. Vùng $\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$: gương kim loại, sóng tắt

Hệ thức tán sắc của các sóng ngang dạng sin ở đây là :

$$c^2\underline{k}^2 = \omega^2 - \omega_p^2.$$

Nếu $\omega \ll \omega_p$, số sóng là thuần túy ảo. Đối với sự "lan truyền" theo chiều tăng của x, giá trị của nó là :

$$\underline{k} = -jk_2 = -j\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}.$$

Vậy trường điện từ phức của sóng có dạng :

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}}(x,t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{-k_2 x} e^{j\omega t} \\ \underline{\vec{B}}(x,t) = \dfrac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}(x,t)}{\omega} = k_2 \vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}}_0 e^{-k_2 x} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \end{cases}.$$

Chúng ta nhận ra một *sóng dừng* có biên độ giảm theo hàm mũ. Đó là một *sóng tắt*, không lan truyền.

Điện trường và từ trường của sóng vuông pha với nhau : giá trị trung bình của vectơ POYNTING và thông lượng trung bình của năng lượng được sóng truyền tải đều bằng không.

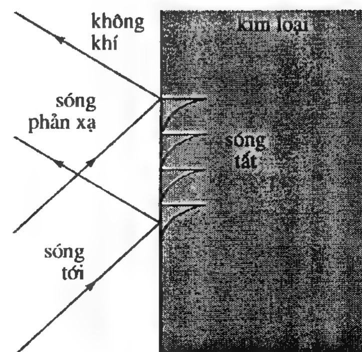
Sự giảm theo hàm mũ quan sát được khác với sự giảm do hiệu ứng da, vì ở đây không có sự phân tán năng lượng của sóng vào môi trường. Kết quả này có vẻ như một nghịch lí : sóng không mất năng lượng do truyền cho môi trường... nhưng lại "biến mất" ! Vậy năng lượng của nó đi đâu ?

Thực ra, để tạo nên trường điện từ dao động, ta phải gửi một sóng điện từ về phía kim loại (*h*.6). Ta có thể dự đoán rằng năng lượng của nó lại được tìm thấy một cách toàn vẹn trong một sóng *phản xạ* bởi mặt kim loại (nó đóng vai trò một đầu cuối lí tưởng đặt ở cuối một đường dây, xem *chương* 3).

Đối với một chất dẫn điện tốt như đồng, hành vi này ứng với $10^{14}\text{Hz} \ll \omega < 10^{16}\text{Hz}$, tức là với những bước sóng thuộc miền : $0{,}03\ \mu\text{m} < \lambda \ll 3\ \mu\text{m}$, nó bao gồm miền nhìn thấy :

$$0{,}4\ \mu\text{m} < \lambda \ll 0{,}8\ \mu\text{m}.$$

Sự phản xạ mà ta đã nói tới giải thích được sự sáng chói của một mặt kim loại (mài nhẵn). Sự chế tạo các gương quang học bằng cách mạ một lớp bạc hay nhôm đã sử dụng tính chất này.



H.6. *Sự phản xạ của một sóng trên một kim loại.*

2.5.3. Vùng trong suốt : $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$

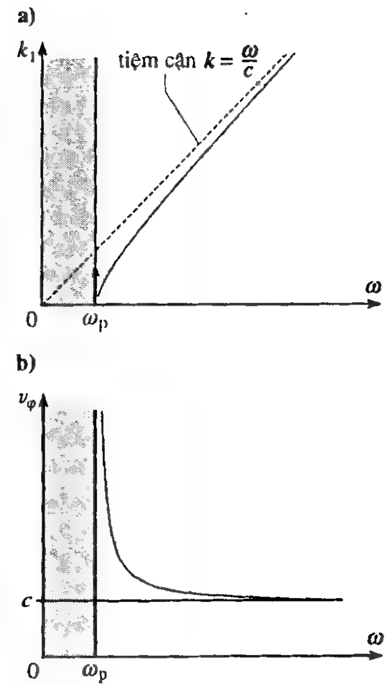
Hệ thức tán sắc ở đây dẫn đến một số sóng thực, dương đối với sự lan truyền theo chiều tăng của x (h.7a) :

$$\underline{k} = k_1 = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$ (hệ thức tán sắc KLEIN-GORDON).

Sóng truyền trong kim loại mà không bị giảm : trong miền phổ này, *kim loại là trong suốt.*

Sự lan truyền vẫn có tán sắc, vì vận tốc pha phụ thuộc tần số (h.7b) :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_1} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}.$$



H.7. *Sự lan truyền tán sắc không giảm trong plasma.*
a. *Số sóng.*
b. *Vận tốc pha.*

Chú ý :

- *Vận tốc này lớn hơn vận tốc truyền ánh sáng trong chân không. Ở* §3, *ta sẽ thấy rằng kết quả này chẳng có gì là chướng cả.*
- *Ta thấy ở đây có sự lan truyền tán sắc không có hấp thụ, ứng với một mô hình plasma không có va chạm. Mô hình này có một khuyết điểm : đáng lẽ ta không được quan sát thấy một chế độ dạng sin vĩnh cửu, bởi vì thời gian thiết lập chế độ đó sẽ là vô hạn (giống như đối với một dao động tử điều hòa có hệ số phẩm chất "vô hạn"). Thực ra các hiện tượng tán sắc và hấp thụ không độc lập với nhau (sự liên quan của chúng vượt ra ngoài phạm vi sách này). Chúng ta sẽ tìm lại được đặc trưng đó khi khảo sát sự tán sắc của các sóng điện từ trong các điện môi, ở chương 8.*
- *Ta nhắc lại rằng mô hình đơn giản của ta có những hạn chế của nó. Nói riêng, nó không áp dụng được trong miền các tần số quá lớn, đặc biệt là đối với các tia X (xem áp dụng 1). Nếu nó cho phép nói về một sự trong suốt quan sát được, chẳng hạn, đối với các kim loại kiềm trong miền tử ngoại, thì nó lại không lí giải được việc sử dụng các tấm chì để làm màn chắn các tia X.*

Áp dụng 5

Plasma của tầng điện li và các sóng hertz

Sử dụng các kết quả trên, hãy đề nghị một cách giải thích định tính đơn giản các hiện tượng sau đây :

a) *cuộc liên lạc vô tuyến điện xuyên Đại Tây Dương đầu tiên đã được* MARCONI *thực hiện năm* 1901. *Thực vậy, có thể nhận được các sóng kilômet phát đi từ các đài phát ở các khoảng cách rất xa ;*

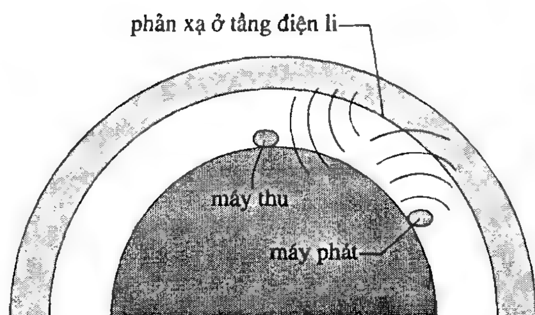
b) *các liên lạc đất – đất có xu hướng bị thay thế bởi các liên lạc đất – vệ tinh – đất, bằng cách sử dụng các tần số vài trăm* MHz.

Cho biết : *mật độ hạt của các êlectrôn trong tầng điện li nhỏ hơn rất nhiều mật độ hạt của một chất lưu êlectrôn dẫn trong một kim loại ; nó vào bậc từ* $10^{10}\,\text{m}^{-3}$ *đến* $10^{12}\,\text{m}^{-3}$.

Các giá trị của mật độ hạt êlectrôn ứng với các *tần số* plasma vào bậc $\nu_p = 1$ MHz và 10 MHz.

a) Đối với các sóng kilômet hoặc hectômet, có tần số cỡ vài trăm kHz, bất đẳng thức $\nu < \nu_p$ được nghiệm đúng. Tầng điện li đóng vai trò một gương phản xạ đối với các sóng này. Chúng có thể được truyền đi những khoảng cách xa (mặt đất, là vật dẫn, cũng tham gia vào sự lan truyền này, nó tựa như được dẫn đi giữa tầng điện li và mặt đất), như *hình* 8 đã gợi lên.

b) Đối với sự liên lạc dùng vệ tinh, phải sử dụng các tần số lớn hơn rõ ràng : với $\nu > \nu_p$, tầng điện li là "trong suốt".



H.8. *Thu một sóng vô tuyến điện sau sự phản xạ ở tầng điện li.*

▶ **Để luyện tập : bài tập 3, 4 và 5.**

3 Bó sóng

Trừ khi có chú thích riêng, trong đoạn này ta sẽ bỏ qua ảnh hưởng của sự hấp thụ : số sóng k sẽ được giả định là số thực. Ta đã biết rằng điều đó có thể ứng với những hệ lí tưởng hóa, hoặc những miền tần số xác định những vùng trong suốt đối với các hệ thực.

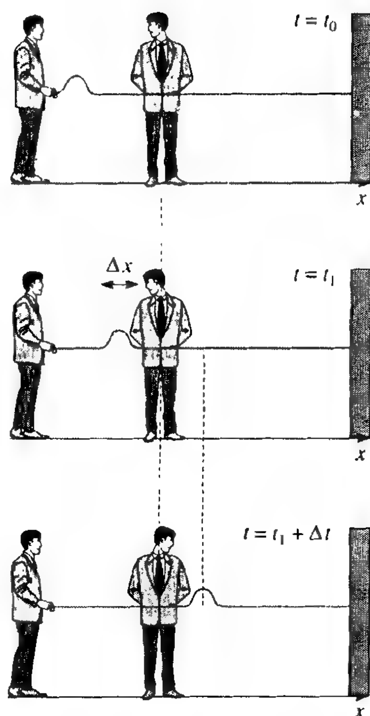
3.1. Sóng vật lí và công cụ SPCĐS

Hãy tưởng tượng rằng một nhà thực nghiệm truyền một chấn động vào một sợi dây dao động (dây lí tưởng, như ở *chương* 2). Sóng ở đây có dạng $f\left(t-\frac{x}{c}\right)$, nó truyền dọc theo sợi dây, bắt đầu từ chỗ kích thích được áp đặt (*h*.9). Một người quan sát đứng gần sợi dây, ở phía hạ lưu nhà thực nghiệm, nhìn thấy tín hiệu đó, có kích thước không gian Δx hữu hạn, đi qua mặt mình trong một khoảng thời gian Δt cũng hữu hạn.

Một tín hiệu vật lí phát ra từ một nguồn và lan truyền đi, thì có kích thước hữu hạn theo thời gian và không gian.

Các SPCĐS là những công cụ tiện dụng, có thể dùng để phân tích các hiện tượng lan truyền tuyến tính. Tuy nhiên không thể nào xác định được một thời điểm hoặc một vị trí tại đó một sóng có dạng $\psi(x,t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx)$ bắt đầu xuất hiện hoặc kết thúc. Hơn nữa, năng lượng gắn với sóng này sẽ là vô hạn ! Như vậy một SPCĐS không thể biểu diễn được một tín hiệu vật lí.

SPCĐS là một công cụ để phân tích các hiện tượng lan truyền. Tự một mình nó không thể mô tả một hiện tượng vật lí quan sát được.



H.9. *Chấn động truyền cho một sợi dây : một thí dụ về sự phát và truyền một tín hiệu vật lí.*

3.2. Sự tạo thành một sóng định xứ

3.2.1. Sự chồng chập của hai sóng đơn sắc

Xét sự chồng chập của hai sóng đơn sắc có cùng biên độ, đồng pha tại $x = 0$ và $t = 0$, có tần số ω_1 và ω_2 (với $\omega_1 > \omega_2$). Trong cách kí hiệu phức, ta viết được :

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \psi_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x),$$

ở đây hệ thức tán sắc bắt buộc : $k_1 = k(\omega_1)$ và $k_2 = k(\omega_2)$.

Giả thử các tần số ω_1 và ω_2 là gần nhau, ta viết :

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \text{ và } \delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \ll \omega_m \ ;$$

$$k_m = \frac{k_1 + k_2}{2} \approx k(\omega_m) \text{ và } \delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}.$$

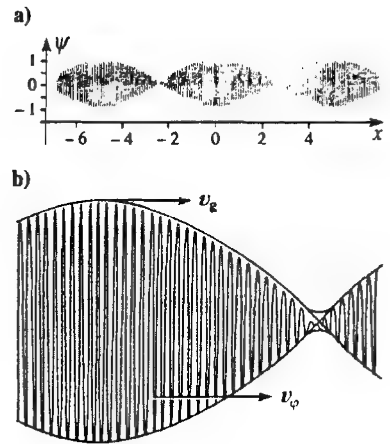
Khi đó biên độ của sóng được viết thành :

$$\psi(x,t) = (2\psi_0 \cos(\delta\omega t - \delta k x))\cos(\omega_m t - k_m x)$$

$$= \psi_m(x,t)\cos(\omega_m t - k_m x).$$

Một ảnh chụp tức thời của sóng (*h*.10) làm lộ rõ hiện tượng phách : biên độ các dao động nhanh của sóng, có tần số không gian k_m, được biến điệu chậm theo tần số không gian δk :

- tín hiệu "nhanh" $\cos(\omega_m t - k_m t)$ lan truyền với vận tốc pha $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$;
- đường bao của tín hiệu (các múi biến điệu) lan truyền với vận tốc $v_g = \dfrac{\delta\omega}{\delta k} \approx \dfrac{d\omega}{dk}$, gọi là vận tốc nhóm. Chúng ta sẽ trở lại kết quả này ở §3.4.



H.10. *Ảnh chụp tức thời một bó gồm hai sóng : đường biểu diễn của* $f(x) = \psi(x, t = t_0)$.

a. *Hiện tượng phách.*

b. *Hình phóng đại đường cong làm lộ rõ vận tốc pha* v_φ *và vận tốc nhóm* v_g.

3.2.2. Quan sát sự chồng chập sóng dạng sin

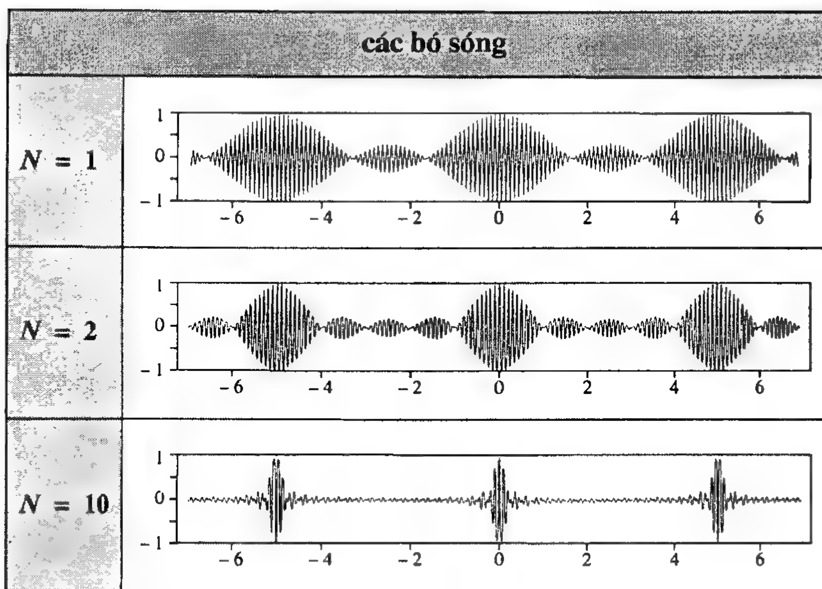
Một SPCĐS đơn lẻ là tuyệt đối không định xứ.

Tổng của hai sóng dạng sin có tần số lân cận là một tín hiệu dao động với tần số trung bình, có biên độ biến thiên chậm : ta có thể nói rằng sóng toàn thể được định xứ chủ yếu ở gần các bụng của các múi biến điệu của biên độ.

Bằng cách chồng chập một số lượng SPCĐS lớn hơn, ta có thể tìm cách giảm hơn nữa kích thước đường bao của tín hiệu. Ta hãy hình dung một bó gồm 2N + 1 sóng phẳng dạng sin, có tần số ω_n lân cận quanh giá trị trung bình ω_m. Ta viết $\omega_n = \omega_m + n\delta\omega$ $(-N \le n \le N)$, với giả định rằng bề rộng phổ $\Delta\omega = (2N+1)\delta\omega$ của bó sóng nghiệm đúng $\Delta\omega \ll \omega_m$. Biên độ của nó là :

$$\psi(x,t) = \sum_{n=-N}^{N} A_0 \cos(\omega_n t - k_n x) \ ; \quad k_n = k(\omega_n).$$

Ta hãy thừa nhận quan điểm của một nhà quan sát đứng tại $x = 0$ và nhìn bó sóng đó đi qua trước mặt mình (*h*.11). Trong mọi trường hợp, người quan sát thấy các "đám sóng" đi qua trước mặt : người đó phát hiện được một tín hiệu dao động nhanh, có biên độ biến điệu chậm. Chú ý rằng thời gian tồn tại của các đám sóng đó càng nhỏ nếu số lượng các SPCĐS chồng chập lên nhau (do đó : bề rộng phổ $\Delta\omega$) càng lớn.



◀ **H.11.** *Quan sát sự đi qua của một bó $2N+1$ sóng tại $x = 0$: đồ thị của :*

$$f(t) = \frac{\psi(x=0,t)}{2N+1}$$

$$\left(\text{ở đây}: \delta\omega = \frac{\omega_m}{50} \right)$$

3.2.3. Các bó sóng định xứ

Sự chồng chập của một tập hợp gián đoạn các SPCĐS có tần số khác nhau $\delta\omega$ là một sóng tuần hoàn có cùng một dáng vẻ vào những thời điểm t, $t + \frac{2\pi}{\delta\omega}$, $t + \frac{4\pi}{\delta\omega}$, v.v... Sự biến điệu biên độ của nó có một chu kì thời gian :

$$T = \frac{2\pi}{\delta\omega}.$$

Một sóng vật lí định xứ trong không gian và thời gian (thí dụ như sự biến dạng mà một nhà thực nghiệm truyền cho một sợi dây rung) là không tuần hoàn. Để tạo ra nó, ta có thể hình dung giới hạn T dần tới $+\infty$, tức là $\delta\omega$ dần tới 0. Muốn giữ cho kích thước thời gian Δt của đỉnh biến điệu có giá trị hữu hạn, ta phải đồng thời giữ cho :

$$\Delta\omega = (2N+1)\,\delta\omega$$

khác không, tức là làm cho số lượng các sóng chồng chập nhau dần tới vô hạn. Như vậy ta phải chồng chập vô số các SPCĐS có các tần số vô cùng gần nhau.

Một bó sóng định xứ trong thời gian và không gian là một sự chồng chập các SPCĐS có *các tần số phân bố liên tục*.

Người ta thường viết biên độ của các bó sóng dưới dạng phức :

$$\underline{\psi}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \underline{A}(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega \quad \text{với} \quad k = k(\omega).$$

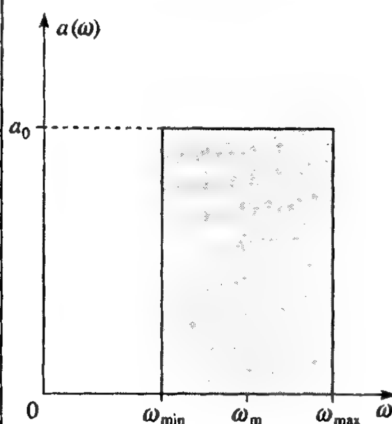
Ta cũng có thể viết biên độ thực dưới dạng (với giả định rằng $\underline{A} = a$ là thực) :

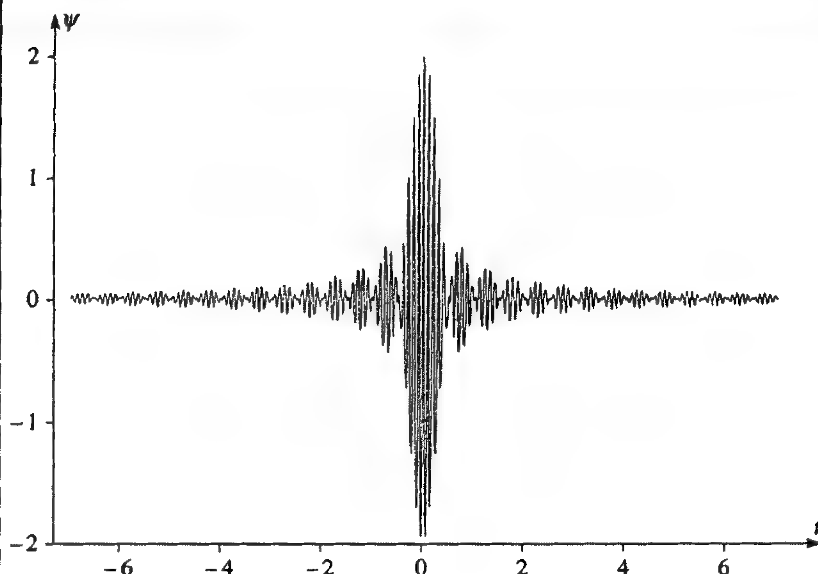
$$\psi(x,t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos(\omega t - kx) d\omega\,.$$

Trên *hình* 12 có biểu diễn các biên độ mà một người quan sát phát hiện được khi nhìn bó sóng đi qua điểm $x = 0$ trong hai trường hợp riêng.

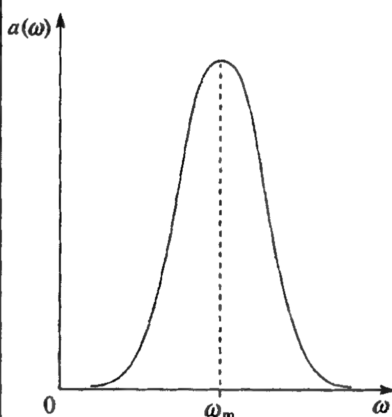
các bó sóng có phổ liên tục

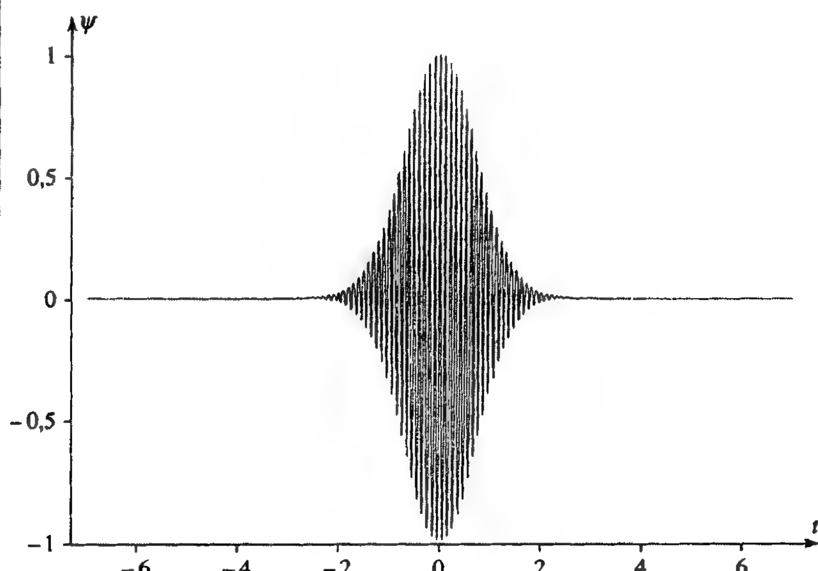
phổ vuông góc





phổ GAUSS





H.12. *Bó sóng có phổ vuông góc hoặc phổ* GAUSS.

3.2.4. Kích thước không gian và kích thước thời gian của một bó sóng

Ta viết biên độ của bó sóng (thí dụ là liên tục) dưới dạng :

$$\psi(x,t) = A_0 \mathcal{R}e\left(\sum_{n=-N}^{N} e^{j(\omega_n t - k_n x)}\right)$$

và thừa nhận quan điểm của một người quan sát đứng tại $x = 0$, nhìn sóng đi qua và xem xét những giao thoa giữa các hàm mũ phức khác nhau xuất hiện trong tổng ở trên.

Vào lúc $t = 0$, tất cả các hàm mũ, tức là tất cả các sóng của bó sóng đều đồng pha tại $x = 0$: biên độ quan sát được là cực đại (*h.*13c).

Trước đó (hoặc sau đó) một chút, tương quan pha của chúng là kém thua (*h.*13b và d), và biên độ của sự chồng chập là nhỏ hơn.

Sớm hơn (hoặc muộn hơn) chút nữa, các độ lệch pha của N sóng trong bó sóng là quan trọng hơn (*h.*13a và *e*) và các hàm mũ phức tương ứng được phân bố một cách hỗn độn trên toàn thể vòng tròn lượng giác : biên độ sóng là nhỏ.

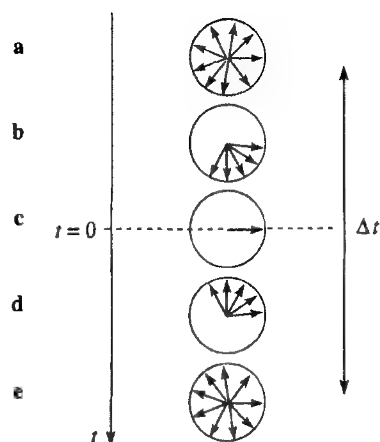
Lập luận định tính đó chứng tỏ rằng đám sóng quan sát được tại $x = 0$ ở lân cận $t = 0$ chỉ tồn tại hữu hạn trong thời gian. Thời gian đặc trưng Δt tương ứng phải sao cho độ lệch pha giữa các sóng tần số cao và tần số thấp của bó sóng có những giá trị không bỏ qua được, tức là :

$$\Delta t \Delta \omega \approx 1.$$

Kết quả này phù hợp với các quan sát của ta : thời gian tồn tại đặc trưng của bó sóng là càng nhỏ nếu phổ của nó càng rộng.

Ta có thể lặp lại lập luận trên để biện luận kích thước không gian Δx của bó sóng trên một hình ảnh tức thời của biên độ của nó. Khi đó ta thu được hệ thức đặc trưng :

$$\Delta x \Delta k \approx 1.$$



H.13. *Sự tương quan giữa các pha của các sóng trong bó sóng.*
c. *Hoàn hảo.*
b. *và* **d.** *Một phần.*
a. *và* **e.** *Hầu như không.*

3.3. Sự lan truyền có tán sắc và không tán sắc

Đối với một sự lan truyền do phương trình d'ALEMBERT chi phối, hệ thức tán sắc $k = \frac{\omega}{c}$ dẫn đến một vận tốc pha $v_\varphi = c$ không phụ thuộc ω. Tất cả các SPCĐS của một bó sóng lan truyền với cùng một vận tốc : sự lan truyền là không tán sắc. Một bó sóng lan truyền với vận tốc c, cũng như tất cả các SPCĐS tạo thành nó. Hai hình ảnh tức thời của bó sóng vào hai thời điểm khác nhau t_1 và t_2 là như nhau, chỉ sai khác nhau một sự tịnh tiến $v_\varphi(t_2 - t_1)$ (*h.*14a).

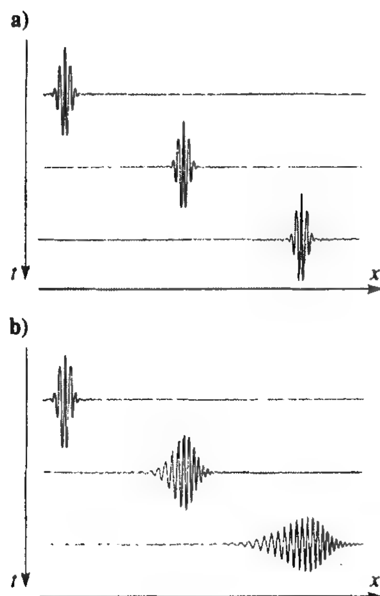
Nếu các SPCĐS của bó sóng lan truyền với các vận tốc pha khác nhau, thì sự lan truyền là có tán sắc, và bó sóng biến dạng trong khi lan truyền. Điều này được minh họa trên hình 14b, trong trường hợp hệ thức tán sắc KLEIN - GORDON thu được trong một miền trong suốt ở §**2.5.3.**

Đối với một sự lan truyền *có tán sắc*, vận tốc pha phụ thuộc mạch số sóng và một bó sóng biến dạng trong quá trình lan truyền.

Sự tán sắc có thể là có hại. Đối với một sự truyền tin dưới dạng nhị nguyên, là tập hợp các đỉnh có thời khoảng δt, thì tốc độ truyền thu tối đa được xác định tiên nghiệm là $\frac{1}{\delta t}$ bit trong một giây. Khi lan truyền trong một môi trường tán sắc, các xung này biến dạng (*h.*15). Sự nở rộng giảm bớt tốc độ truyền tin, vì cần phải có khoảng cách rõ ràng giữa các đỉnh nối tiếp nhau để cho sự nở rộng của chúng không làm chúng trùm lên nhau.

Sự tán sắc có thể là có ích : ở chương 8 ta sẽ thấy rằng các sóng điện từ thuộc miền nhìn thấy không truyền đi với cùng một vận tốc. Sự tán sắc của ánh sáng cho phép thực hiện sự phân tích phổ của nó.

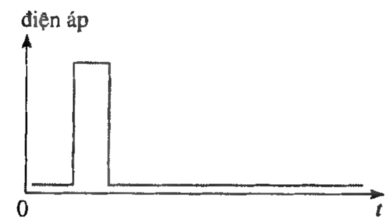
▶ **Để luyện tập : bài tập 2 và 6.**

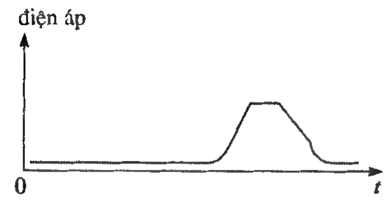


H.14. *Sự lan truyền của một bó sóng.*
a. *Lan truyền không tán sắc.*
b. *Lan truyền có tán sắc.*

3.4. Vận tốc nhóm

3.4.1. Đường bao của một bó sóng





H.15. *Sự lan truyền của một xung điện trong một dây cáp đồng trục : đỉnh bị nở rộng do tán sắc (nó cũng giảm bớt do hấp thụ).*

Xét một bó sóng, có phổ liên tục chẳng hạn, mà biên độ phức là :

$$\underline{\psi}(x,t) = \int_0^{\infty} \underline{A}(\omega)e^{j(\omega t - kx)}d\omega .$$

Đối với một bó sóng có phổ tương đối hẹp, tức là đặc trưng bởi một bề rộng $\Delta\omega$ rất nhỏ so với mạch số trung bình ω_m, ta hãy viết (và đừng quên rằng ta giả định k là thực) :

$$k \approx k_m + \frac{\delta\omega}{v_g}, \text{ trong đó } \begin{cases} \delta\omega = \omega - \omega_m \\ v_g = \left(\dfrac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_m} \end{cases} .$$

Biên độ sóng ước chừng là :

$$\underline{\psi}(x,t) = \left(\int_{\Delta\omega} \underline{A}(\omega)e^{j\delta\omega\left(t - \frac{x}{v_g}\right)}d(\delta\omega)\right)e^{j(\omega_m t - k_m x)}$$

nó ứng với một sóng "trung bình" có tần số ω_m, mà biên độ được biến điệu bởi một thừa số $\underline{F}$ di chuyển với vận tốc v_g :

$$\underline{\psi}(x,t) \approx \underline{F}\left(t - \frac{x}{v_g}\right)e^{j(\omega_m t - k_m x)} .$$

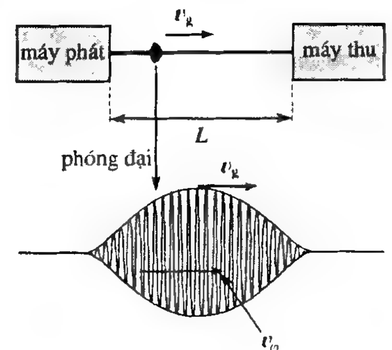
Thừa số này xác định giới hạn đường bao, tức là xác định sự định xứ của bó sóng. Ta có thể nói rằng bó sóng này là một nhóm sóng di chuyển với vận tốc v_g.

<u>*Chú ý :*</u>
Chú ý rằng sự mô tả này chỉ có ý nghĩa nếu các cách viết gần đúng đã thực hiện là chấp nhận được. Bề rộng phổ của bó sóng và sự tán sắc phải là khá nhỏ để có thể viết gần đúng số sóng. Thực ra, chúng ta biết rằng bó sóng biến dạng trong quá trình lan truyền : cách viết thừa số biến điệu $\underline{F}$ dưới dạng một sóng chạy là một cách viết gần đúng.

Trong một môi trường mà sự tán sắc không lớn lắm, thì một bó sóng có bề rộng phổ nhỏ xung quanh ω_m di chuyển với vận tốc nhóm $v_g = \left(\dfrac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_m}$.

3.4.2. Sự truyền thông tin

Để truyền một thông tin, ta có thể đặt một máy phát (người quan sát lắc một sợi dây, nguồn âm, nguồn sóng, ...) và một máy thu (để dò các sóng phát ra) cách nhau một khoảng L (*h.*16). Nếu máy phát gửi đi một tín hiệu vào lúc t_0, mà máy thu dò được vào lúc $t_0 + \Delta t$, ta nói rằng vận tốc truyền thông tin trong môi trường (giả định là đồng nhất) nơi diễn ra hiện tượng truyền, là $\dfrac{L}{\Delta t}$.



H.16. *Phép đo vận tốc truyền thông tin.*

Muốn cho phép đo có ý nghĩa, cần sử dụng những tín hiệu có thời khoảng hạn chế (những xung), tức là những bó sóng. Máy dò ghi lại sự truyền qua

của sóng, bằng cách dò đường bao của bó sóng đang lan truyền. Vậy ta có : $\Delta t \approx \frac{L}{v_g}$.

Vận tốc nhóm $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ là vận tốc truyền thông tin.

Ta biết rằng năng lượng gắn với sóng thì liên kết với biên độ của nó bằng một sự phụ thuộc bậc hai. Thế mà năng lượng gắn với sóng được định xứ trong bó sóng ; vậy bó năng lượng lan truyền với vận tốc nhóm.

Chú ý :

Những điều thận trọng áp dụng cho những khẳng định này cũng là những điều đã nói khi định nghĩa vận tốc lan truyền của một bó sóng. Chúng ta sẽ trở lại vấn đề khó này ở chương 8.

Áp dụng 6

Giới hạn trên của vận tốc truyền thông tin

1) *Vận tốc pha gắn với hệ thức tán sắc KLEIN – GORDON là lớn hơn vận tốc c. Kết quả này có mâu thuẫn với nguyên lí tương đối về một giới hạn trên đúng bằng c của sự truyền thông tin không ?*

2) *Vận tốc nhóm gắn với hệ thức tán sắc đó là bao nhiêu ? Kết luận ?*

1) Vận tốc pha là vận tốc truyền của pha của một SPCĐS. Tuy nhiên một SPCĐS không thể dùng được để chuyển tải một thông tin loại "phát tín hiệu" và "thu tín hiệu" : sóng đó là hoàn toàn không định xứ, ta không thể biết khi nào nó bắt đầu và khi nào nó chấm dứt. Như ta vừa thấy, vận tốc truyền của thông tin không phải là vận tốc pha. Thu được một vận tốc pha lớn hơn c không mâu thuẫn với cơ học tương đối tính.

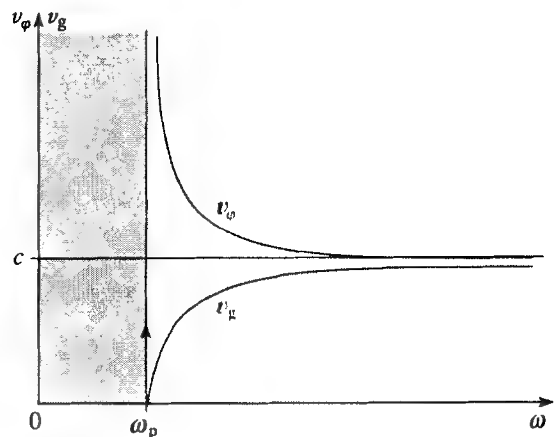
2) Hệ thức tán sắc KLEIN - GORDON là :

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2 \text{ ,do đó } 2\omega d\omega = 2c^2 k dk.$$

Vận tốc nhóm là :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2\frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}},$$

nhỏ hơn c (*h.*17).



H.17. *Hệ thức tán sắc KLEIN – GORDON : vận tốc pha và vận tốc nhóm.*

▶ **Để luyện tập : bài tập 7 và 8.**

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ TÁN SẮC VÀ HẤP THỤ

• Ta có thể khảo sát một bài toán về sự lan truyền do các phương trình tuyến tính chi phối bằng cách sử dụng phép phân tích điều hòa.

• Việc sử dụng phép kí hiệu phức làm cho việc tìm nghiệm của một phương trình lan truyền (vi phân, tuyến tính, có hệ số không đổi) được dễ dàng.

• Một sóng có biên độ phức $\underline{\psi}(x,t) = \underline{\psi}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ là nghiệm của *phương trình lan truyền*, nếu số sóng $\underline{k}$, nói chung là phức $\underline{k} = k_1 - jk_2$, liên quan với tần số ω của sóng dạng sin *bằng hệ thức tán sắc*.

• Phần thực của số sóng xác định vận tốc pha $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k_1} = \dfrac{\omega}{\mathcal{R}e(\underline{k})}$, nói chung nó phụ thuộc ω. Các sóng có tần số khác nhau không lan truyền với cùng một vận tốc : sự lan truyền là có tán sắc.

• Phần ảo của số sóng dẫn đến một sự biến thiên theo hàm mũ của biên độ sóng. Đối với một sự lan truyền có hấp thụ, độ xuyên sâu $\delta = \dfrac{1}{k_2} = -\dfrac{1}{\mathcal{I}m(\underline{k})}$ đặc trưng cho sự giảm theo hàm mũ của sóng (đối với $k_2 > 0$).

■ SỰ LAN TRUYỀN CÁC SÓNG ĐIỆN TỪ TRONG MỘT KIM LOẠI

Trong phạm vi mô hình chất lưu các điện tích tự do, và với phép gần đúng tuyến tính, sự lan truyền một sóng phẳng ngang trong một môi trường dẫn điện tuân theo :

• phương trình chuyển động của chất lưu các điện tích tự do (các êlectrôn) : $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \dfrac{\vec{v}}{\tau} = -\dfrac{e}{m}\vec{E}$;

• các phương trình MAXWELL : $\text{div}\vec{E} = \vec{0}$; $\text{div}\vec{B} = \vec{0}$; $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$,

trong đó vectơ mật độ dòng điện do chuyển động của các êlectrôn có mật độ khối n sinh ra là $\vec{j} = -ne\vec{v}$.

Sự lan truyền này là có tán sắc và hấp thụ. Tiếp theo hiệu ứng da ở tần số thấp là một hành vi plasma không có va chạm ở tần số cao.

■ BÓ SÓNG

• Một tín hiệu vật lí phát ra từ một nguồn và truyền đi thì có kích thước hữu hạn theo thời gian và không gian.

• SPCĐS là một công cụ để phân tích các hiện tượng lan truyền. Tự một mình nó không thể mô tả một hiện tượng vật lí quan sát được.

• Một bó sóng định xứ trong thời gian và không gian là một sự chồng chập các SPCĐS *có tần số phân bố liên tục.*

• Đối với một sự lan truyền *có tán sắc*, vận tốc pha phụ thuộc tần số sóng và một bó sóng bị biến dạng trong quá trình lan truyền.

• Trong một môi trường mà sự tán sắc không lớn quá, một bó sóng có bề rộng phổ nhỏ xung quanh ω_0 di chuyển với vận tốc nhóm $v_g = \left(\dfrac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_m}$.

Vận tốc nhóm là vận tốc truyền thông tin.

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Hiệu ứng da trong một kim loại

Chúng ta khảo sát sự lan truyền của một sóng phẳng đơn sắc điện từ có tần số ω và vectơ sóng $\vec{k}$. Điện trường của nó là :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \text{ với } \vec{E}_0 \text{ thực.}$$

Miền phổ ta xét ứng với các sóng centimet.

Về ứng dụng bằng số, ta sẽ xét trường hợp của đồng, có độ dẫn điện $\gamma_0 = 6{,}0.10^7 \text{S.m}^{-1}$ trong chế độ không phụ thuộc thời gian.

1) Bậc độ lớn của tần số các sóng khảo sát bằng bao nhiêu ? Ta có thể nghĩ gì về độ dẫn điện của kim loại, là phức một cách tiên nghiệm trong miền tần số này ? So sánh biên độ các vectơ mật độ dòng điện dẫn $\vec{j}_{\text{ve}}$ và mật độ dòng điện dịch $\vec{j}_{\text{vd}}$. Viết dạng gần đúng của các phương trình MAXWELL trong môi trường kim loại trong phạm vi khảo sát của ta.

2) Hệ thức tán sắc của các sóng điện từ trong kim loại là thế nào ? Cho biết biểu thức của trường điện từ của sóng lan truyền theo phương trục (Ox), chiều x tăng, trong kim loại ở vùng $x > 0$.

3) Xác định công suất trung bình mà sóng truyền cho kim loại trong một thể tích nguyên tố hình trụ, có tiết diện S vuông góc với (Ox), và các mặt phẳng đặt ở hoành độ x và $x + dx$.

4) So sánh nó với thông lượng của vectơ POYNTING xuyên qua mặt giới hạn thể tích đó và kiểm tra sự cân bằng năng lượng địa phương mà ta dự đoán.

2 Giao thoa của các thành phần một bó sóng

Tính biên độ $\psi(x, t)$ của bó sóng sau đây :

$$\psi(x,t) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} A_0 \cos(\omega_n t - k_n x)$$

có tần số trung bình ω_m, bề rộng phổ $\Delta\omega \ll \omega_m$, bao gồm N SPCĐS có tần số ω_n gần nhau và cách đều nhau. Ta đặt $\delta\omega = \frac{\Delta\omega}{N}$, và để đơn giản hóa các phép tính ta giả định rằng N là lẻ và $\omega_n = \omega_m + n\delta\omega$.

Có thể gán thời khoảng đặc trưng Δt_N nào cho các đám sóng của bó sóng này ? Hãy bình luận sự phụ thuộc của nó vào bề dầy phổ $\Delta\omega$ của nó.

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

3 Dao động của mật độ điện tích trong một kim loại hoặc một plasma

Để mô tả các tính chất điện của một kim loại, ta sử dụng mô hình một chất khí êlectrôn tự do (êlectrôn dẫn) trong một cái khuôn gồm các iôn dương và cố định. Lúc này ta chỉ xét đến tương tác của trường điện từ với các êlectrôn, phần còn lại của vật chất được coi như chân không. Các êlectrôn được giả định là phi tương đối tính, tương tác giữa chúng với nhau được bỏ qua, sự mất mát năng lượng do va chạm với mạng được mô hình hóa bằng một lực tắt dần $-m\frac{\vec{v}}{\tau}$.

Mật độ êlectrôn là n_0 ở trạng thái cân bằng, giá trị ngoài cân bằng n của nó vẫn rất gần với giá trị n_0.

1) Thành lập phương trình vi phân gắn mật độ dòng khối $\vec{j}_v$ và điện trường $\vec{E}$.

2) Rút ra phương trình chi phối sự biến thiên mật độ điện tích khối ρ_v trong lòng môi trường.

3) Một môi trường kim loại lúc đầu bị nhiễu loạn : sự phân bố các điện tích ban đầu của nó làm cho sự trung hòa điện toàn bộ của nó bị sai lệch ở từng nơi. Có thể dự đoán thời gian phục hồi sự trung hòa điện của môi trường kim loại có độ lớn bằng bao nhiêu ?

4) Chứng tỏ rằng nếu bỏ qua các lực tắt dần thì trong chất khí êlectrôn có thể có một kiểu dao động riêng của các điện tích với tần số riêng ω_p mà ta cần chỉ rõ (ω_p là mạch số plasma).

5) Tính ω_p đối với natri và nhôm (coi rằng tất cả các êlectrôn hóa trị của một nguyên tử đều trở thành êlectrôn dẫn). Các nồng độ nguyên tử của chúng là $C_{\text{Na}} = 2{,}65.10^{28} \text{m}^{-3}$ và $C_{\text{Al}} = 6{,}02.10^{28} \text{m}^{-3}$.

Tìm vị trí các giá trị này trong phổ điện từ.

Cho biết : đối với êlectrôn :

$$e = 1,6.10^{-19}\,C\ (\text{môđun})\ \text{và}\ m = 9,1.10^{-31}\,kg\,.$$

6) Đối với một plasma mà các va chạm được bỏ qua, hãy biện luận ảnh hưởng của chuyển động khả dĩ của các iôn có khối lượng M và điện tích αe đối với giá trị của ω_p. Hãy ước tính và bình luận bậc độ lớn của sự biến đổi mà việc tính đến chuyển động của các iôn đã mang lại cho giá trị tần số của plasma.

4 Sóng dọc và sóng ngang trong một plasma

Trong một plasma có mật độ êlectrôn bằng n_0 ở trạng thái cân bằng, ta quan tâm đến sự lan truyền một SPCĐS điện từ mà điện trường là :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}}.\vec{r})}\,.$$

1) Viết phương trình chuyển động của các điện tích phi tương đối tính, bỏ qua các va chạm trong lòng plasma. Tại sao ta có thể bỏ qua chuyển động của các iôn ?

2) Trong chế độ dạng sin ổn định, hãy thành lập biểu thức của vectơ mật độ dòng điện tùy theo trường của sóng. Độ dẫn điện của plasma bằng bao nhiêu ?

3) Hệ thức gắn $\underline{\vec{k}}$, ω và $\underline{\vec{E}}$ mà phương trình truyền sóng đòi hỏi là hệ thức nào ? Phân tích rõ hệ thức đó bằng cách tách riêng các thành phần dọc $\underline{\vec{E}}_{//}$ và ngang $\underline{\vec{E}}_{\perp}$ của điện trường mà biên độ là :

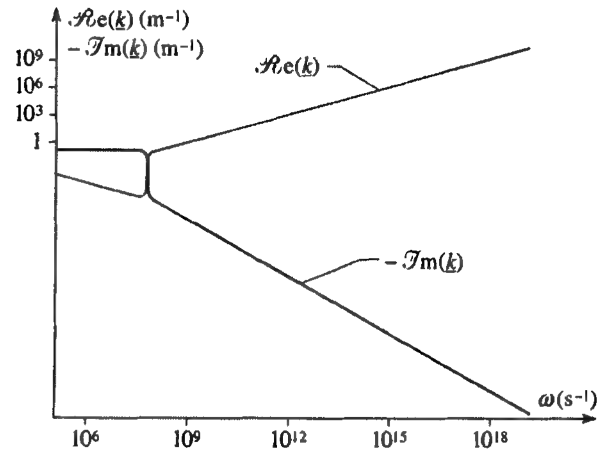
$$\underline{\vec{E}}_0 = \underline{\vec{E}}_{0//} + \underline{\vec{E}}_{0\perp}\,.$$

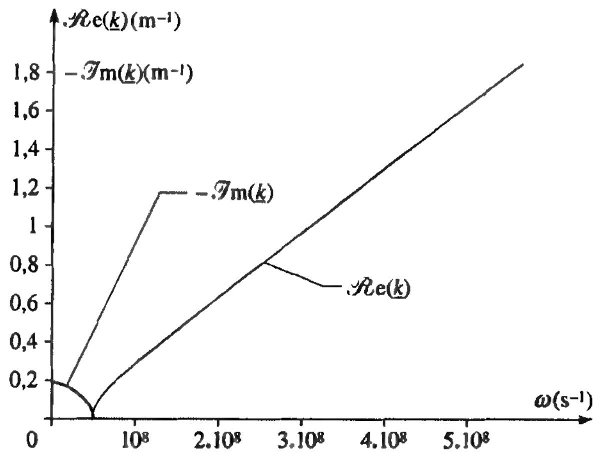
4) Có thể nói gì về các sóng dọc có khả năng tồn tại trong lòng plasma ? Hãy bình luận kết quả này và liên hệ với các kết quả của bài tập 3.

5) Hệ thức tán sắc đặc trưng cho sự lan truyền sóng ngang là hệ thức nào ?

6) Nếu các hiện tượng va chạm được mô hình hóa bằng cách thêm vào phương trình chuyển động của các điện tích một lực phân tán năng lượng $-m\dfrac{\vec{v}}{\tau}$, thì ảnh hưởng của chúng đối với các sóng dọc và các sóng ngang sẽ là thế nào ?

7) Trong trường hợp các sóng ngang, biểu đồ của phần thực và phần ảo của số sóng phức được vẽ dưới đây bằng cách lấy các giá trị bằng số $n_0 = 10^{12}\,m^{-3}$ và $\tau = 10^{-3}\,s$. Biểu đồ thứ nhất làm nổi rõ kết quả khảo sát trong một biểu đồ log – log, trên một dải tần số rộng. Biểu đồ thứ hai được vẽ theo thang đo tuyến tính, trong một vùng hẹp hơn.





Có thể nói gì về ảnh hưởng của các va chạm đối với các sóng này ?

Xác định một miền trong suốt đối với sự lan truyền này.

Có thể nghĩ gì về sự tán sắc đối với các sóng truyền giữa một vệ tinh và Trái Đất xuyên qua plasma tầng điện li được mô hình hóa ở đây, nếu các tần số được sử dụng là vào cỡ GHz ?

5 Sự lan truyền của một sóng trong plasma vũ trụ

Plasma vũ trụ gồm có các êlectrôn khối lượng m, điện tích $-e$, mật độ hạt n, và các iôn điện tích q và mật độ hạt N. Mật độ điện tích toàn bộ bằng không. Chuyển động của các iôn được bỏ qua, và chuyển động của các êlectrôn phi tương đối tính được mô tả bởi vectơ $\vec{v}$.

Với các giả thuyết đó, chúng ta tìm các nghiệm của các phương trình MAXWELL (trừ các trường tĩnh) dưới dạng sóng phẳng đơn sắc có vectơ sóng $\vec{k}$ và điện trường.

$$\underline{\vec{E}}(r,t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}.$$

1) Chứng tỏ rằng từ trường của sóng cũng được mô tả bởi một sóng phẳng có cùng tần số và cùng vectơ sóng.

Cấu trúc của tam diện $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ của sóng là như thế nào ?

2) Xác định biên độ $\dot{j}_{v_0}$ của vectơ mật độ dòng điện khối $\underline{\vec{j}}_v$ của sóng $\underline{\vec{j}}_v(\vec{r},t) = \vec{j}_{v_0} e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$, tùy theo biên độ điện trường của sóng.

3) Bằng cách khảo sát chuyển động của các êlectrôn, hãy biểu thị hằng số α sao cho $\underline{\vec{j}}_v = -j\dfrac{\alpha}{\omega}\dot{E}$.

4) Rút ra hệ thức tán sắc $\omega = \omega(k)$ gắn tần số của sóng với môđun của vectơ sóng.

5) Đặt $\alpha = \varepsilon_0 c^2 K^2$, hãy tính vận tốc pha và vận tốc sóng theo k và K.

Hệ thức nào gắn hai vận tốc đó với nhau ?

6) Hai bó sóng có bước sóng λ_1 và λ_2 được phát ra cùng một lúc bởi một thiên thể ở khoảng cách L. Giả thử $K^2\lambda_1^2$ và $K^2\lambda_2^2 \ll 1$, hãy chứng tỏ rằng các tín hiệu đó được thu nhận với một độ chênh lệch $\delta t = t_2 - t_1$, và xác định nó tùy theo L, K, c và các bước sóng λ_1 và λ_2.

6 Bó sóng có phổ vuông góc hoặc phổ GAUSS

Một tín hiệu vật lí không tuần hoàn biểu diễn bởi một sóng phẳng có thể được đặt dưới dạng một sự chồng chập liên tục của các SPCĐS (một bó sóng). Biên độ của nó có thể viết thành :

$$\psi(x,t) = \mathscr{R}e\left\{\int_{\omega} A(\omega) e^{j(\omega t - k_{(\omega)}x)} d\omega\right\}.$$

Sự phân bố $A(\omega)$ các biên độ các thành phần phổ của sóng xác định phổ của nó.

Giả định rằng bề rộng phổ $\Delta\omega$ của bó sóng đó là nhỏ so với tần số "trung bình" ω_m của bó sóng. Miền tần số này được giả định là ứng với một vùng phổ nằm trong miền trong suốt của môi trường trong đó sóng này lan truyền. Đặt v_g là vận tốc nhóm tương ứng.

Hãy thành lập biểu thức biên độ của bó sóng. Hãy bình luận hình dạng và kích thước của bó sóng đó khi xét hai trường hợp riêng sau đây, trong đó A_0 là một thừa số thực :

a) bó sóng có phổ vuông góc :

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\Delta\omega} \text{ nếu } \omega_m - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega < \omega_m + \frac{\Delta\omega}{2},$$

và $A(\omega) = 0$ nếu không như thế ;

b) bó sóng có phổ GAUSS :

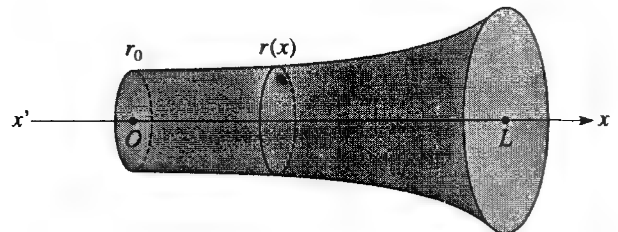
$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}\Delta\omega} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2(\Delta\omega)^2}}.$$

Cho biết : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\alpha^2x^2 + j\beta x)}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}$ đối với mọi β thực và mọi α ảo sao cho $-\dfrac{\pi}{4} < \arg(\alpha) < \dfrac{\pi}{4}$.

7 ★Cái loa

Một cái loa chiều dài bằng L có một sự đối xứng tròn xoay quanh trục $(x'x)$. Bán kính $r(x)$ của nó là một hàm mũ tăng của x :

$$r(x) = r_0 e^{\frac{x}{d}}.$$



Trong một phép gần đúng khá thô sơ, người ta coi rằng các sóng âm được hình thành trong cái loa chỉ phụ thuộc về mặt không gian vào biến x, và rằng không khí truyền sóng âm xét một cách toàn bộ là đứng yên. Khi không có kích thích, áp suất là đều và bằng P_0, nhiệt độ là đều và bằng T_0.

Cũng như trong giáo trình (xem chương 4), ta kí hiệu :

- $\xi(x, t)$ là độ dịch chuyển dọc của lớp không khí có hoành độ nghỉ bằng x ;
- $p(x, t)$ là áp suất âm ; $p(x,t) = P(x,t) - P_0$, trong đó $P(x, t)$ là áp suất không khí khi có sóng âm.

A. Những đặc trưng tổng quát của sóng âm trong cái loa

1) Người ta đặc trưng cho một sóng loại $\xi(x, t)$ như thế nào ? Với điều kiện nào đối với d thì sự biến thiên trong không gian chỉ đối với x thôi đã có vẻ là một sự gần đúng thích hợp ?

2) Gọi ρ_0 là mật độ khối lượng của không khí ở (T_0, P_0). Hãy biểu thị ρ_0 tùy theo T_0, P_0 và khối lượng mol trung bình M của không khí.

3) Gọi χ_s là hệ số nén đẳng entrôpi của không khí, coi như một khí lí tưởng lưỡng nguyên tử. Hãy biểu thị χ_s tùy theo P_0 và tỉ số $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$.

4) Hãy biện minh cho giả thuyết đẳng entrôpi đối với các biến đổi nhiệt động lực học của không khí là nơi có các sóng âm.

5) Bằng cách khảo sát những biến thiên thể tích của một lớp không khí nằm giữa các hoành độ x và $x + dx$ của cái loa, khi ở trạng thái nghỉ, hãy thành lập phương trình liên kết áp suất dư và độ dịch chuyển của chất lưu trong cái loa :

$$p = -\frac{1}{\chi_s}\left(2\frac{\xi}{d} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right).$$

6) Bằng cách áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học vào lớp không khí đó, hãy thành lập phương trình liên kết thứ hai, và chứng tỏ rằng sự lan truyền các sóng âm trong ống dẫn bị chi phối bởi phương trình lan truyền :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{2}{d}\frac{\partial \xi}{\partial x} - \rho_0 S \chi_s \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

7) Nếu cho d dần tới vô hạn thì phương trình trên có dạng đặc biệt nào ?

Hãy xác định vận tốc lan truyền sóng âm trong không khí, kí hiệu là c, và biểu thị c tùy theo χ_s và ρ_0.

8) Cái loa có một độ dài hữu hạn L. Hãy giải thích định tính vì sao điều đó dẫn đến sự tồn tại của các sóng tổng quát chạy vừa theo chiều dương (sóng tới), vừa theo chiều âm (sóng phản hồi) của trục $(x'x)$.

9) Hãy giải thích định tính vì sao hình dạng của cái loa lại giảm sóng phản hồi.

B. Khảo sát một sóng tới dạng sin

Cái loa tiếp nhận tại $x = 0$ một kích thích dạng sin : $\xi(0,t) = a_0 \cos\omega t$. Bỏ qua sóng phản hồi. Ta dùng cách kí hiệu phức bằng cách coi $\underline{\xi}$ là đại lượng $\underline{\xi} = a_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$, trong đó $\underline{k}$ là số sóng, phức một cách tiên nghiệm : $\underline{k} = k' + jk''$, với k' và k'' là thực.

1) Hãy thành lập phương trình tán sắc giữa $\underline{k}$ và ω. Với điều kiện nào đối với ω thì các sóng là sóng chạy ? Ta sẽ đứng trong trường hợp này để giải phần tiếp sau của bài toán. Ta sẽ đưa vào một tần số cắt ω_c.

2) Hãy giải phương trình đó và biểu thị các phần thực $k'(\omega)$ và $k''(\omega)$ với dấu thật chính xác.

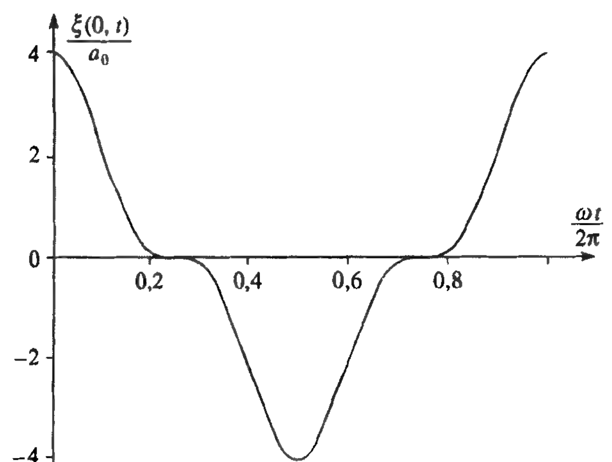
3) Biên độ của sóng $\xi(x, t)$ quan sát ở hoành độ x là bao nhiêu ? Hãy lí giải về mặt năng lượng.

4) Hãy cho định nghĩa của vận tốc pha v_φ và cho biểu thức của v_φ theo ω. Hãy giải thích định tính hiện tượng tán sắc quan sát trong cái loa là gì.

5) Người ta cũng có thể định nghĩa một vận tốc nhóm $v_g = \dfrac{d\omega}{dk'}$. Cho biết ý nghĩa vật lí của nó.

Tính v_g theo ω. Cho biết quan hệ giữa v_φ và v_g.

6) Hãy xác định bước sóng λ tùy theo ω và một trong hai vận tốc trên. Hãy biểu thị tỉ số giữa bước sóng λ tính ở trên và bước sóng λ_0 mà ta sẽ thu được với tiết diện không đổi, tùy theo ω.



C. Kích thích không phải dạng sin

Cái loa nhận tại $x = 0$ một kích thích không phải dạng sin :

$$\xi(0,t) = 4a_0(\cos\omega t)^3.$$

Ta vẫn bỏ qua sóng phản hồi và ta lấy $\omega = \sqrt{2}\dfrac{c}{d}$. Ta kí hiệu a_n là hệ số của $\cos n\omega t$ trong sự khai triển theo chuỗi FOURIER của $\xi(0,t)$. Ta kí hiệu b_n là hệ số của $\sin n\omega t$.

1) Tính các hệ số a_n và b_n đối với mọi giá trị của $n \geq 0$.

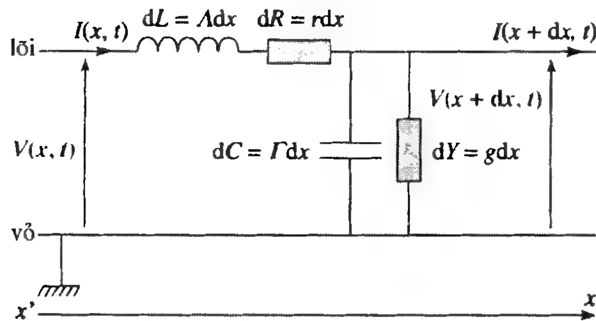
2) Độ dài L bằng bước sóng của âm cơ bản. Tính các hệ số a'_n và b'_n (tùy thuộc a_0) của phép khai triển theo chuỗi FOURIER của $\xi(L,t)$ đối với mọi giá trị của n.

Đường biểu diễn của hàm $\xi(x,t)$ được cho ở trên đây. Hãy vẽ một cách gần đúng đường biểu diễn $\xi(L,t)$ tùy theo t.

Một người nghe đặt tai ở đầu ra của cái loa. So với âm phát ra tại $x = 0$ thì âm nghe được ở $x = L$ bị biến đổi thế nào ?

8 ★Sự lan truyền có tán sắc và hấp thụ trong một đường dây điện

Sơ đồ dưới đây phác họa một khúc nguyên tố có độ dài dx của một đường dây điện trong đó các hao tổn bị gây ra chủ yếu bởi điện trở của các vật dẫn (lõi và vỏ của một dây cáp đồng trục, chẳng hạn) và bởi các chỗ rò trong chất cách điện ngăn cách chúng. Gọi r là điện trở của đường dây và g là độ dẫn nạp rò của nó, các đại lượng này được biểu thị cho mỗi đơn vị độ dài của đường dây (bằng $\Omega.\text{m}^{-1}$ và $\Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$).



1) Hãy thành lập các phương trình liên kết gắn điện áp $V(x,t)$ với dòng điện $I(x,t)$.

2) Phương trình lan truyền các sóng điện từ trong đường dây là phương trình nào ?

Ta đặt :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}, \quad g\Lambda + r\Gamma = 2\frac{K}{c}, \quad rg = \frac{\Omega^2}{c^2},$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{T}} \quad \text{và} \quad R = \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

3) Chứng tỏ rằng các nghiệm dao động của phương trình lan truyền làm xuất hiện các sóng đơn sắc có dạng $\underline{\psi}(x,t) = \underline{\psi}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$, trong đó $\underline{k}$ là phức :

$$\underline{k} = k' - jk''.$$

4) Hãy nêu ý nghĩa vật lí của phần thực k' và phần ảo k'' của $\underline{k}$, và của dấu của tích $k'k''$.

Vận tốc pha của sóng này là bao nhiêu ?

Hãy xác định một độ dài đặc trưng của sự hấp thụ sóng bởi đường dây điện.

5) Chứng tỏ rằng có thể hiệu chỉnh sự tán sắc bằng cách điều chỉnh các đặc trưng của đường dây sao cho có được $Z_c = R$.

BÀI CHỮA

1 *1) Trong miền centimet, bước sóng trong chân không của các sóng điện từ là $\lambda = 10^{-2}$ m, và tần số $\nu = \frac{c}{\lambda}$ là vào cỡ 30 GHz.*

Thời gian hồi phục của một kim loại như đồng, là vào bậc 10^{-14} s, và đối với $\nu\tau \ll 1$ (gọi là "miền tần số thấp" trong giáo trình : §2.4), độ dẫn điện phức của kim loại được coi như độ dẫn điện của nó ở tần số bằng không : $\gamma \approx \gamma_0$.

Các vectơ mật độ dòng điện dẫn và mật độ dòng điện dịch là : $\vec{j}_{vc} = \gamma\vec{E}$ và $\vec{j}_{vd} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. Trong miền tần số ta xét thì :

$$\frac{|\vec{j}_{vc}|}{|\vec{j}_{vd}|} \approx \frac{|\gamma_0 E|}{|\varepsilon_0\omega E|} \approx \frac{6.10^7}{\frac{1}{36\pi.10^9}2\pi\times 3\times 10^{10}} \approx 3{,}6.10^7 \gg 1.$$

Do đó, trong kim loại (có $\rho = 0$, xem bài tập 3) các phương trình MAXWELL có dạng gần đúng :

$$\text{div}\,\vec{B} = \vec{0}\,; \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,; \quad \text{div}\,\vec{E} = \vec{0}\,; \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\gamma_0\vec{E}.$$

2) Ta rút ra phương trình lan truyền của điện trường : $\Delta\vec{E} = \mu_0\gamma_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, và hệ thức tán sắc : $\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma_0\omega$, tức là $\underline{k} = \pm\frac{1-j}{\delta}$, trong đó $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$ là bề dày của da (xem §2.4).

Đối với trường hợp đang xét, trường của sóng là :

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}}(x,t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)} \\ \underline{\vec{B}}(x,t) = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}(x,t)}{\omega} = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega}\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)} \end{cases}$$

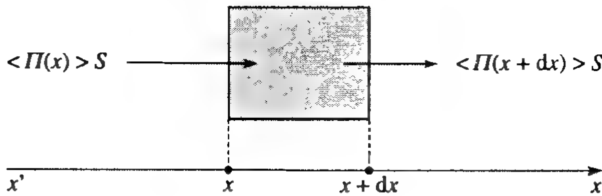
3) Sóng nhường năng lượng cho môi trường, công suất trung bình tiêu tán do hiệu ứng JOULE trong đơn vị thể tích là $\frac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{\vec{j}}.\underline{\vec{E}}^*) = \frac{\gamma_0}{2}|E|^2$.

Vậy công suất trung bình tiêu tán trong thể tích ta xét là :

$$d\mathcal{P} = \frac{1}{2}\gamma_0 E_0^2 e^{-2\frac{x}{\delta}} S\,dx\,.$$

4) Giá trị trung bình của vectơ POYNTING là :

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \langle\Pi\rangle\vec{e}_x = \frac{1}{2\mu_0}\mathcal{R}e(\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*) = \frac{E_0^2}{2\mu_0\delta\omega}e^{-2\frac{x}{\delta}}\vec{e}_x\,.$$



Thông lượng trung bình của năng lượng đi qua mặt giới hạn thể tích nguyên tố đang xét là :

$$S(\langle\Pi(x)\rangle - \langle\Pi(x+dx)\rangle) = \frac{SE_0^2}{2\mu_0\delta\omega}\left(\frac{-2dx}{\delta}e^{-2\frac{x}{\delta}}\right)$$

$$= -\frac{\gamma_0 E_0^2}{2}S\,dx\,e^{-2\frac{x}{\delta}}\,.$$

Ta thấy lại, với một sai khác về dấu, công suất tiêu tán do hiệu ứng JOULE trong thể tích đó. Kết quả này diễn đạt sự cân bằng năng lượng, đúng như ta chờ đợi.

2 *Cũng như các tần số* ω_n*, các số sóng* k_n *là tương đối gần nhau, ta viết được* $k_n \approx k_m + \frac{n\delta\omega}{v_g}$*, trong đó* k_m *chỉ số sóng trung bình của bó sóng và* v_g *chỉ vận tốc nhóm* $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega=\omega_m}$.

Biên độ sóng là :

$$\psi(x,t) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} A_0\cos(\omega_n t - k_n x)$$

$$= A_0\mathcal{R}e\left(\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{j(\omega_n t - k_n x)}\right)$$

$$= A_0\mathcal{R}e\left\{e^{j(\omega_m t - k_m x)}\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{jn\delta\omega\left(t-\frac{x}{v_g}\right)}\right\}.$$

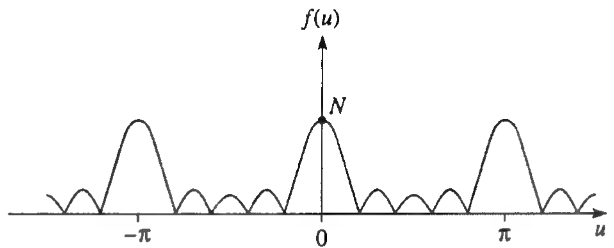
Cuối cùng, sự đánh giá chuỗi nhân cho ta :

$$\psi(x,t) = A_0\left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\left(t-\frac{x}{v_g}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\delta\omega}{2}\left(t-\frac{x}{v_g}\right)\right)}\right)\cos(\omega_m t - k_m x)\,.$$

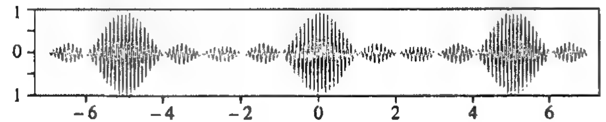
Ta nhận ra được tích của một số hạng dao động nhanh (với tần số ω_m*) với một thừa số biến điệu biến thiên tương đối chậm.*

Đối với $x = 0$*, và với kí hiệu* $u = \frac{\delta\omega t}{2}$*, biên độ bị biến điệu bởi thừa số* $f(u) = \left|\frac{\sin(Nu)}{\sin(u)}\right|$*. Sơ đồ dưới đây cho phép hiểu được các đường bao của các bó sóng trong hình 11 của §**3.2.2**.*

- ***Thừa số biến điệu f(u) đối với N = 5***



- ***Bó sóng***



Thừa số biến điệu triệt tiêu ở hai phía của $u = 0$*, đối với* $u = \pm\frac{\pi}{N}$*, tức là* $t = \pm\frac{2\pi}{\Delta\omega}$*. Vậy ta có thể gán cho mỗi "đám" của bó sóng một thời khoảng* Δt_N *vào cỡ* $\frac{1}{\Delta\omega}$*. Nó càng ngắn nếu bề rộng phổ càng lớn.*

3 1) *Phương trình chuyển động của các êlectrôn là :*

$$m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E} - m\frac{\vec{v}}{\tau}\,.$$

Vectơ mật độ dòng điện là $\vec{j}_v = -ne\vec{v} \approx -n_0 e\vec{v}$*. Phương trình vi phân gắn* $\vec{j}_v$ *và* $\vec{E}$ *là* $\frac{\partial\vec{j}_v}{\partial t} + \frac{\vec{j}_v}{\tau} = \frac{n_0 e^2}{m}\vec{E}$.

2) *Phương trình diễn đạt sự bảo toàn điện tích là :* $\frac{\partial\rho_v}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j}_v = 0$.

*Lấy divc của phương trình vi phân thu được ở câu **1)** và phương trình MAXWELL-GAUSS, ta được :*

$$\frac{\partial^2\rho_v}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial\rho_v}{\partial t} + \frac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0}\rho_v = 0\,.$$

3) *Phương trình đó cũng có thể được viết thành* $\frac{\partial^2\rho_v}{\partial t^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial\rho_v}{\partial t}+\omega_p^2\rho_v=0$, *trong đó* $\omega_p=\sqrt{\frac{n_0e^2}{m\varepsilon_0}}$ *là tần số plasma của môi trường kim loại. Ta nhận ra một phương trình của một dao động tử tuyến tính tắt dần. Trong chừng mực mà* ω_p *lớn hơn* $\frac{1}{\tau}$ *rất nhiều (xem giáo trình : áp dụng 3), các nghiệm* r_1 *và* r_2 *của đa thức đặc trưng của nó có thể coi như là* $r_{12}=-\frac{1}{2\tau}\pm j\omega_p$.

Vậy chế độ chuyển tiếp trở về sự trung hòa điện của kim loại là thuộc kiểu giả tuần hoàn.

Thời gian đặc trưng cho sự giảm theo hàm mũ của các dao động là τ, *vào cỡ* 10^{-14}s *đối với một kim loại.*

4) *Nếu bỏ qua các va chạm* ($\tau\to\infty$), *phương trình đó trở thành* $\frac{\partial^2\rho_v}{\partial t^2}+\omega_p^2\rho_v=0$, *trong đó tần số riêng là tần số plasma của môi trường.*

5) • *Natri :*

$$\omega_p=\sqrt{\frac{1C_{Na}e^2}{m\varepsilon_0}}=9{,}2.10^{15}\,\text{rad.s}^{-1}\,;\;\lambda_p=\frac{2\pi c}{\omega_p}=0{,}205\,\mu\text{m}$$

thuộc miền tử ngoại.

• *Nhôm :*

$$\omega_p=\sqrt{\frac{3C_{Al}e^2}{m\varepsilon_0}}=2{,}4.10^{16}\,\text{rad.s}^{-1}\,;\;\lambda_p=\frac{2\pi c}{\omega_p}=0{,}078\,\mu\text{m}$$

là xa hơn trong miền tử ngoại.

6) *Phương trình chuyển động của các êlectrôn là* $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\frac{e}{m}\vec{E}$.

Phương trình của các iôn là $\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=\frac{\alpha e}{M}\vec{E}$. *Do sự trung hòa tổng thể của plasma, mật độ iôn là* $N_0\alpha=n_0$. *Vectơ mật độ dòng điện bằng :*

$$\vec{j}_v=-n_0e\vec{v}+N_0\alpha e\vec{V}\,,\text{ vậy }\frac{\partial\vec{j}_v}{\partial t}=\left(\frac{n_0e^2}{m}+\frac{N_0\alpha^2e^2}{M}\right)\vec{E}\,.$$

*Phương trình điều hành các dao động của mật độ điện tích trong lòng môi trường là (xem câu **2**) :* $\frac{\partial^2\rho_v}{\partial t^2}+\Omega_p^2\rho_v=0$ *với* $\Omega_p=\omega_p\sqrt{1+\alpha\frac{m}{M}}$.

Tần số plasma mới này khác rất ít giá trị trước đó vì α *là vào cỡ đơn vị và tỉ số giữa M và m lớn hơn 2000 (tỉ số giữa khối lượng prôtôn và khối lượng êlectrôn). Sự hiệu chỉnh này có ích lợi rất hạn chế, vì các sự gần đúng đã dẫn đến kết quả này thường có cùng bậc độ lớn với sự hiệu chỉnh.*

4 1) *Các phép gần đúng thường dùng trong giáo trình (§. **2.2**) cho phép viết phương trình chuyển động của êlectrôn dưới dạng đã đơn giản hóa :*

$$m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-e\vec{E}\,.$$

2) *Plasma được giả định là ít bị xáo động, và mật độ electrôn có thể coi là bằng* n_0. *Vectơ mật độ dòng điện được viết là* $\underline{\vec{j}}=-n_0e\underline{\vec{v}}=\frac{n_0e^2}{jm\omega}\underline{\vec{E}}$ *trong chế độ dạng sin ổn định và trong phép kí hiệu phức. Độ dẫn điện tương ứng là* $\underline{\gamma}=-j\frac{n_0e^2}{m\omega}$, *thuần túy ảo. Trong plasma không có va chạm, các trường dao động* $\vec{j}$ *và* $\vec{E}$ *vuông pha với nhau.*

3) *Từ các phương trình* MAXWELL :

$$\text{div}\,\vec{B}=\vec{0}\,;\;\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,;\;\text{div}\,\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,;\;\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,,$$

ta rút ra phương trình lan truyền của điện trường :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E})=-\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}=-\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\,,$$

tức là, đối với SPCĐS đang khảo sát :

$$-j\underline{\vec{k}}\wedge(-j\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}})=\varepsilon_0\mu_0(\omega^2-\omega_p^2)\underline{\vec{E}}\,,\text{ với }\omega_p=\sqrt{\frac{n_0e^2}{m\varepsilon_0}}\,.$$

Chiếu xuống phương vectơ sóng và trong mặt phẳng vuông góc với vectơ sóng, ta được :

$$\begin{cases}\vec{0}=\varepsilon_0\mu_0(\omega^2-\omega_p^2)\underline{\vec{E}}_{//}\\(\underline{k})^2\,\underline{\vec{E}}_\perp=\varepsilon_0\mu_0(\omega^2-\omega_p^2)\underline{\vec{E}}_\perp\end{cases}$$

4) *Sự tồn tại các sóng dọc tuân theo điều kiện* $\omega=\omega_p$. *Ở đây ta thấy lại các dao động plasma đã thu được ở bài tập 3. Mô hình lan truyền này loại trừ sự tồn tại của các sóng dọc, khi tần số sóng khảo sát khác với tần số riêng của plasma.*

5) *Đối với các sóng ngang, hệ thức tán sắc là* $\underline{k}^2=\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}$, *thuộc kiểu* "KLEIN-GORDON", *thu được trong giáo trình (§**2.5**) đối với một kim loại ở tần số cao* $\left(\omega\gg\frac{1}{\tau}\right)$.

6) *Đối với các sóng dọc, các dao động với mạch số* ω_p, *hiệu quả của các va chạm dẫn đến một sự giảm biên độ của các dao động đó (xem bài tập 3). Đối với các sóng ngang, hệ thức tán sắc trở thành :*

$$\underline{k}^2=\frac{\omega^2-\dfrac{\omega_p^2}{1+\dfrac{1}{j\omega\tau}}}{c^2}\quad\text{(xem §}\mathbf{2.3}\text{)}.$$

7) *Tần số plasma bằng* $\omega_p\approx18\pi$ MHz, *lớn hơn* $\frac{1}{\tau}$ *rất nhiều ; giá trị của* $\frac{1}{\tau}$ *rất nhỏ hơn các giá trị xuất hiện ở các miền quét trên các mô phỏng. Trong tất cả các áp dụng bằng số được xét, các va chạm có rất ít ảnh hưởng.*

ω_p xuất hiện rõ ràng trên các đồ thị, là giới hạn chuyển tiếp khá đột ngột giữa một miền $\omega < \omega_p$ với $\mathcal{Re}(\underline{k}) \ll -\mathcal{Im}(\underline{k})$ và một miền $\omega > \omega_p$ với $\mathcal{Re}(\underline{k}) \gg -\mathcal{Im}(\underline{k})$.

Trong miền $\omega < \omega_p$, plasma không trong suốt: một sóng đi tới nó sẽ phản xạ (hầu như) hoàn toàn (xem chương 9).

Trong miền $\omega > \omega_p$, plasma là trong suốt. Đối với các tần số vào cỡ GHz, tức là $\omega \gg \omega_p$, sự tán sắc là không đáng kể vì $k \approx \dfrac{\omega}{c}$.

5 1) Tính tích phân theo thời gian phương trình MAXWELL-FARADAY: $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, ta được hệ thức cấu trúc của sóng phẳng, nó cho phép biểu đạt trường của sóng đó: $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \vec{B}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$ với $\vec{B}_0 = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}_0}{\omega}$.

Từ trường thu được là trường ngang. Nếu mật độ điện tích của môi trường vẫn bằng không thì đive của điện trường bằng không, và điện trường cũng là trường ngang (có thể đối chiếu với bài tập 4 để có được một ý niệm chính xác hơn về tính chất ngang của điện trường). Khi đó ta đã hội đủ được các yếu tố cần thiết để khẳng định rằng tam diện ($\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{k}$) của sóng là thuận và có ba góc vuông.

2) Sử dụng phương trình MAXWELL-FARADAY $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_v + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, ta được $\underline{\vec{j}}_v(\vec{r}, t) = \vec{j}_{v_0} e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$, với:

$$\vec{j}_{v_0} = \frac{-j\vec{k} \wedge \vec{B}_0}{\mu_0} - j\varepsilon_0\omega\vec{E}_0 = -j\varepsilon_0\omega\left(1 - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right)\vec{E}_0.$$

3) Với những phép gần đúng thường dùng (xem giáo trình: §2.2), phương trình chuyển động của các êlectrôn có dạng đã đơn giản hóa $m\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E}$, và ta được:

$$\underline{\vec{j}}_v = -n_0 e \underline{\vec{v}} = -j\frac{n_0 e^2}{m\omega}\underline{\vec{E}}, \text{ vậy } \alpha = \frac{n_0 e^2}{m}.$$

4) Ta thu được hệ thức tán sắc của các sóng ngang trong plasma bằng cách so sánh hai biểu thức trên đây của $\vec{j}_v$, do đó $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ với $\omega_p = \sqrt{\dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$ là tần số riêng của plasma.

5) Ta dùng kí hiệu $\omega_p^2 = c^2K^2$. Sự lan truyền trong lòng plasma có thể xảy ra với $\omega > \omega_p$. Trong miền trong suốt này, vận tốc pha là $v_\varphi = c\sqrt{1 + \dfrac{K^2}{k^2}}$ và vận tốc nhóm là $v_g = \dfrac{c}{\sqrt{1 + \dfrac{K^2}{k^2}}}$.

Các vận tốc này gắn với nhau bởi hệ thức $v_\varphi v_g = c^2$.

6) Các bó sóng di chuyển với vận tốc nhóm, và sự chênh lệch cần tìm là:

$$\delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{v_{g2}} - \frac{L}{v_{g1}} = \frac{L}{c}\left(\sqrt{1 + \frac{\lambda_2^2 K^2}{4\pi^2}} - \sqrt{1 + \frac{\lambda_1^2 K^2}{4\pi^2}}\right), \text{ tức là:}$$

$$\delta t \approx \frac{K^2 L}{8\pi^2 c}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \text{ nếu } \omega_1 \gg \omega_p \text{ và } \omega_2 \gg \omega_p.$$

6 a) Đối với bó sóng có phổ vuông góc:

$$\psi(x,t) = A_0 \mathcal{Re}\left(\int_{\omega=\omega_m - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega=\omega_m + \frac{\Delta\omega}{2}} e^{j(\omega t - k(\omega)x)} \frac{d\omega}{\Delta\omega}\right).$$

Kích thước phổ của bó sóng là hẹp, khi đặt $\delta\omega = (\omega - \omega_m)$, ta có thể viết:

$$\omega t - kx \approx [\omega_m t - k_m x] + \left[\delta\omega t - \frac{dk}{d\omega}\delta\omega x\right]$$

$$= [\omega_m t - k_m x] + \delta\omega\left[t - \frac{x}{v_g}\right],$$

và viết sóng dưới một dạng gần đúng, làm xuất hiện vận tốc nhóm v_g:

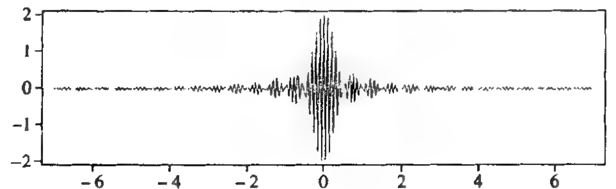
$$\psi(x,t) = A_0 \mathcal{Re}\left(e^{j(\omega_m t - k_m x)} \int_{\delta\omega = -\frac{\Delta\omega}{2}}^{\delta\omega = +\frac{\Delta\omega}{2}} e^{j\delta\omega\left(t - \frac{x}{v_g}\right)} \frac{d(\delta\omega)}{\Delta\omega}\right)$$

$$= A_0 \cos(\omega_m t - k_m x)\left(\frac{\sin\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(t - \frac{x}{v_g}\right)\right]}{\frac{\Delta\omega}{2}\left(t - \frac{x}{v_g}\right)}\right)$$

$$= A_0 \operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(t - \frac{x}{v_g}\right)\right]\cos(\omega_m t - k_m x)$$

với cách kí hiệu $\operatorname{sinc}(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\alpha}$ là hàm "sin cơ bản". Có thể định nghĩa bề rộng đặc trưng của hàm này là khoảng cách giữa các giá trị bằng không đầu tiên ($\alpha = \pm\pi$) của hàm này và cực đại của nó ($\alpha = 0$), tức là $\Delta\alpha = 2\pi$.

Ở đây ta thu được một biểu thức của biên độ bó sóng cho phép xác định rõ hơn dáng vẻ của một hình ảnh tức thời của bó sóng vẽ trong giáo trình (§3.2.3).



Thừa số biến điệu của bó sóng là $\operatorname{sinc}\left[\dfrac{\Delta\omega}{2}\left(t - \dfrac{x}{v_g}\right)\right]$.

Bề rộng thời gian của bó sóng là $\Delta t = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$, tức là thời gian đặc trưng của sự tồn tại một bó sóng mà một người quan sát đứng ở một

hoành độ cho trước nhìn thấy đi qua trước mặt mình. Bề rộng không gian của bó sóng, là kích thước đặc trưng của một hình ảnh tức thời (t cố định) của sóng, là $\Delta x = \frac{2\pi v_g}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\Delta k}$. *Ta thấy lại các hệ thức của giáo trình về bậc độ lớn :* $\Delta x \Delta k \approx 1$ *và* $\Delta t \Delta\omega \approx 1$.

b) *Đối với bó sóng có phổ* GAUSS,

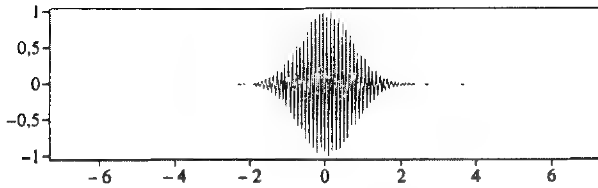
$$\psi(x,t) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}\Delta\omega} \mathcal{R}e\left(\int_\omega e^{j(\omega t - kx)} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2(\Delta\omega)^2}} d\omega\right)$$

$$\approx \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}\Delta\omega}$$

$$\mathcal{R}e\left(e^{j(\omega_m t - k_m x)} \int_\omega \exp\left[j(\omega-\omega_m)\left(t - \frac{x}{v_g}\right) - \frac{(\omega-\omega_0)^2}{2(\Delta\omega)^2}\right] d\omega\right)$$

$$= A_0 \exp\left[-\frac{(\Delta\omega)^2}{2}\left(t - \frac{x}{v_g}\right)^2\right] \cos(\omega_m t - k_m x)$$

là biên độ mà sơ đồ dưới đây biểu diễn một hình ảnh tức thời (đã mô phỏng trong giáo trình, §3.2.3).



Thừa số biến điệu $\exp\left[-\frac{(\Delta\omega)^2}{2}\left(t - \frac{x}{v_g}\right)^2\right]$ *ứng với một đường bao* GAUSS *của bó sóng có tâm tại* $x = v_g t$, *có bề rộng thời gian* Δt *và bề rộng không gian vẫn còn thỏa mãn* $\Delta x \Delta k \approx 1$ *và* $\Delta t \Delta\omega \approx 1$.

7

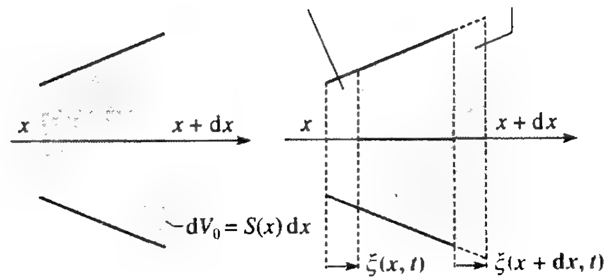
A. 1) *Sóng ta xét là một sóng phẳng : độ dịch chuyển là như nhau tại mọi điểm trên cùng một mặt phẳng vuông góc với phương truyền sóng (Ox). Giả thiết này là chấp nhận được nếu cái loa không loe ra quá đột ngột, điều đó yêu cầu* $d \gg \lambda_0$, *ở đây* λ_0 *là bước sóng của sóng âm.*

2) *Coi không khí như một khí lí tưởng, ta có :* $\rho_0 = \frac{MP_0}{RT_0}$.

3) *Trong sự biến thiên đẳng entrôpi của một khí lí tưởng có hệ số γ thì tích* $P\rho^{-\gamma}$ *là không đổi, vậy :*

$$\chi_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = \frac{1}{\gamma^P}.$$

4) *Phép gần đúng đoạn nhiệt ứng với các sóng có tần số lớn vừa phải (tới khoảng 100kHz trong không khí). Đối với chúng sự chuyển tải nhiệt (gắn với những sự không đồng đều về nhiệt độ do sóng âm gây ra) là không đáng kể trong phạm vi kích thước của chu kì sóng, tức là thời gian đặc trưng của sự biến thiên của sóng (xem chương 4).*



5) *Những nhiễu loạn của môi trường do sóng âm gây ra là nhỏ :* $|\rho - \rho_0| \ll \rho_0$ *và* $|p| \ll P_0$, *ta viết được :*

$$\rho - \rho_0 \approx \rho_0 \chi_S P \quad (1).$$

Mặt khác, ta xét biến thiên thể tích của lớp chất lỏng nằm giữa các hoành độ x và x + dx (ở trạng thái nghỉ) khi nó dịch chuyển : trước dịch chuyển, thể tích của nó là $dV_0 = S(x)dx$, *sau dịch chuyển, nó là (xem sơ đồ dưới đây) :*

$$dV \approx dV_0 + S(x+dx)\xi(x+dx,t) - S(x)\xi(x,t) \approx dV_0\left[1 + \frac{1}{S}\frac{\partial(S\xi)}{\partial x}\right].$$

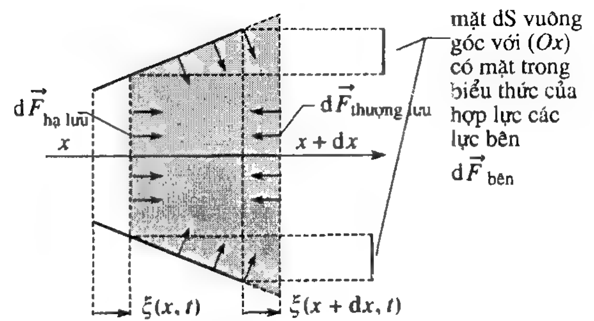
Vậy mật độ khối lượng mới khác ρ_0 *không nhiều, và bằng :*

$$\rho = \rho_0 \frac{\delta V_0}{\delta V} \approx \rho_0\left(1 - \frac{1}{S}\frac{\partial(S\xi)}{\partial x}\right).$$

So sánh biểu thức đó với cách viết (1), ta có $p = -\frac{1}{\chi_S S}\frac{\partial(S\xi)}{\partial x}$.

Tiết diện của cái loa là $S(x) = \pi r_{(x)}^2 = \pi r_0^2 e^{2\frac{x}{d}}$ *và cuối cùng có thể viết phương trình vi phân đó thành :*

$$p = -\frac{1}{\chi_S}\left(2\frac{\xi}{d} + \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) \quad (2).$$



6) *Đối với yếu tố chất lưu đang xét, là hệ kín mà ta theo dõi chuyển động, có khối lượng* $dm = \mu_0 S(x)dx$, *hệ thức cơ bản của động lực học được viết thành :*

$$dm\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = d\vec{F}_{\text{hạ lưu}} + d\vec{F}_{\text{thượng lưu}} + d\vec{F}_{\text{bên}}$$

(xem sơ đồ trên đây).

- *ở hạ lưu :* $d\vec{F}_{\text{hạ lưu}} = p(x,t)S(x)\vec{e}_x$;
- *ở thượng lưu :* $d\vec{F}_{\text{thượng lưu}} = -p(x+dx,t)S(x+dx)\vec{e}_x$;

• *các thành bên đối xứng trục quanh (Ox) là nguồn gốc của :*

$$d\vec{F}_{\text{bên}} = p(x,t)(S(x+dx)-S(x))\vec{e}_x .$$

Chú ý :

• *Kí hiệu $p(x, t)$ chỉ áp suất dư của lớp chất lưu nằm ở hoành độ x khi ở trạng thái nghỉ. Ở thời điểm t, đó là áp suất dư tác dụng tại $x+\xi(x,t)$, nơi mà lớp chất lưu có mặt vào lúc đó. Đó là cách kí hiệu LAGRANGE.*

• *Độ dịch chuyển ξ là rất nhỏ, đặc biệt là so với d, và ta có thể lẫn lộn $S(x)$ với $S(x+\xi(x,t))$, và $S(x+dx+\xi(x+dx,t))$ với $S(x+dx)$.*

Tổng của ba số hạng này ứng với :

$$d\vec{F}_{\text{hạ lưu}} + d\vec{F}_{\text{thượng lưu}} + d\vec{F}_{\text{bên}} \approx S(x+dx)(p(x,t)-p(x+dx))$$

$$\approx -S(x)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}dx .$$

Ta rút ra $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}$ *(3). Hệ thức này đồng nhất với hệ thức thu được trong giáo trình.*

Từ các phương trình (2) và (3), cuối cùng ta rút ra phương trình lan truyền các sóng âm phẳng trong cái loa.

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{2}{d}\frac{\partial\xi}{\partial x} - \rho_0\chi_S\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0 .$$

7) *Khi d trở nên rất lớn (so với bước sóng), cái loa có hành vi hầu như một ống có tiết diện không đổi, và ta thấy lại được phương trình lan truyền d'ALEMBERT đã thành lập trong giáo trình đối với các sóng lan truyền trong một môi trường không có giới hạn riêng :*

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - \rho_0\chi_S\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0 .$$

Vận tốc gán cho sự lan truyền đó là $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_S}}$.

8) *Sự chuyển tiếp từ cái loa ra không khí bên ngoài ứng với một sự gián đoạn các đặc trưng của môi trường lan truyền. Ta biết rằng sóng tới nói chung không thể một mình nó thỏa mãn được các điều kiện biên tương ứng, và làm phát sinh một sóng truyền qua và một sóng phản xạ.*

9) *Chú ý rằng sự mở rộng tiết diện của cái loa, có dạng miệng loe, có xu hướng thực hiện một sự thích nghi gần đúng của trở kháng giữa cái loa và môi trường ngoài (một cách lí tưởng, sự thích nghi sẽ được thực hiện đối với một cái loa có tiết diện cuối vô hạn), điều đó hoàn toàn không đúng đối với một cái ống có bán kính không đổi r_0. Do vậy biên độ của sóng phản hồi dù sao cũng là rất nhỏ.*

B. 1) *Đưa vào phương trình lan truyền cách kí hiệu phức* $\underline{\xi}(x,t) = a_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$, *ta thu được hệ thức tán sắc :*

$$\underline{k}^2 + 2j\frac{\underline{k}}{d} = \frac{\omega^2}{c^2} .$$

Hệ thức đó cũng có thể được viết thành, $\left(\underline{k} + j\frac{1}{d}\right)^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$ *với* $\omega_c = \frac{c}{d}$.

Các nghiệm của nó là :

$$\underline{k} = j\left(-\frac{1}{d} \pm \sqrt{\frac{\omega^2-\omega_c^2}{c^2}}\right) \quad \text{đối với} \quad \omega > \omega_c$$

$$\text{và} \quad \underline{k} = j\left(-\frac{1}{d} \pm \sqrt{\frac{\omega_c^2-\omega^2}{c^2}}\right) \quad \text{đối với} \quad \omega < \omega_c .$$

Chỉ trường hợp thứ nhất cho phép thu được những nghiệm chạy ; vậy tần số ω_c tựa như một tần số cắt thấp, dưới tần số đó không thể có các sóng chạy lan truyền.

2) *Đối với một sóng lan truyền với tần số $\omega > \omega_c$ theo chiều tăng của x, phần thực của $\underline{k}$ phải là dương và nghiệm tương ứng là :*

$$\underline{k} = k' + jk'' = \sqrt{\frac{\omega^2-\omega_c^2}{c^2}} - j\frac{1}{d} .$$

3) *Ở hoành độ x, biên độ (thực) của sóng là :*

$$\xi(x,t) = a_0 e^{-\frac{x}{d}}\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega^2-\omega_c^2}{c^2}}x\right).$$

Biên độ giảm khi sóng tiến lên, điều đó thoạt đầu có vẻ kì lạ, vì trong mô hình này ta đã không đưa vào một số hạng tiêu tán nào. Tuy nhiên, ta nhận xét rằng thông lượng trung bình của năng lượng đi qua một tiết diện của ống dẫn là (theo cách kí hiệu thực) :

$$\phi(x) = \left\langle pS\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\rangle = \pi r_0^2 e^{2\frac{x}{d}}\left\langle\frac{1}{\chi_S}\left(\frac{2\xi}{d} + \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\rangle$$

$$= \pi r_0^2 e^{2\frac{x}{d}}\frac{1}{\chi_S}k'\omega\frac{a_0^2 e^{-2\frac{x}{d}}}{2} = \frac{\pi r_0^2 a_0^2\omega\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}{2c\chi_S} .$$

Thông lượng không phụ thuộc hoành độ x : năng lượng do sóng chuyển tải được bảo toàn. Như vậy sự giảm biên độ chỉ liên quan tới sự mở rộng tiết diện của cái loa.

4) *Vận tốc pha, tức vận tốc di chuyển của các mặt phẳng đồng pha, là :*

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} .$$

Vận tốc này phụ thuộc tần số sóng. Vậy các thành phần đơn sắc khác nhau của một tín hiệu vật lí do cái loa truyền đi không lan truyền với cùng một vận tốc : chúng bị tán sắc trong quá trình lan truyền, và nói chung tín hiệu bị biến dạng.

5) *Vận tốc nhóm là vận tốc truyền của đường bao một bó sóng. Ở đây nó bằng* $v_g = c\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$. *Ta thấy rằng trong trường hợp này tích $v_\varphi v_g$ không đổi và bằng c^2.*

6) *Bước sóng của sóng mà cái loa dẫn đi là :*

$$\lambda=\frac{2\pi}{k'}=\frac{2\pi c}{\omega}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}.$$

Bước sóng bằng $\lambda_0=\frac{2\pi c}{\omega}$ *đối với một ống có tiết diện không đổi, vậy :*

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}.$$

C. 1) *Sự khai triển tín hiệu tuần hoàn đang xét theo chuỗi FOURIER có thể được thực hiện trực tiếp bằng cách tuyến tính hóa :*

$$\cos^3\omega t=\cos\omega t\left(\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\right)=\frac{3\cos\omega t+\cos 3\omega t}{4}$$

Bằng cách đồng nhất hóa, ta được : $a_1=3a_0$, $a_3=a_0$. *Các hệ số* a_n *khác và tất cả các* b_n *đều bằng không.*

2) *Từ biểu thức của* $\xi(0,t)=a_0(3\cos\omega t+\cos 3\omega t)$, *bằng cách vận dụng định lí chồng chập và cách kí hiệu thực, ta rút ra biểu thức của :*

$$\xi(L,t)=a_0e^{-\frac{L}{d}}\left(3\cos\left[\omega\left(t-\frac{L}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}\right)\right]+\cos\left[3\omega\left(t-\frac{L}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{9\omega^2}}\right)\right]\right).$$

Đối với $\omega=\sqrt{2}\frac{c}{d}=\sqrt{2}\omega_c$ *và* $L=\lambda(\omega)=2\pi d$, *biểu thức đó trở thành :*

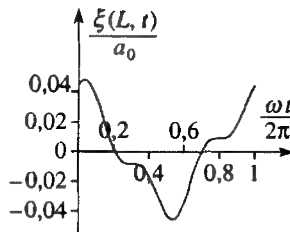
$$\xi(L,t)=a_0e^{-2\pi}(3\cos(\omega t)+\cos(3\omega t-2\pi\sqrt{17}))$$

và ta tìm được các hệ số của FOURIER :

$$a'_1=3a_0e^{-2\pi}\ ;\ a'_3=a_0e^{-2\pi}\cos 2\pi\sqrt{17}\ ;$$

$b'_3=a_0e^{-2\pi}\sin 2\pi\sqrt{17}$, *tất cả các hệ số khác đều bằng không.*

Hai số hạng (chứa ω và 3ω) của chuỗi FOURIER giảm dần như nhau, nhưng lệch pha với nhau khi lan truyền trong cái loa : âm sắc của âm đi ra khỏi cái loa khác với âm sắc phát ra lúc đầu.



8

1) *Các phương trình liên kết là :*

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\Lambda\frac{\partial I}{\partial t}-rI \quad \text{và} \quad \frac{\partial I}{\partial x}=-\Gamma\frac{\partial V}{\partial t}-gV.$$

2) *Ta rút ra phương trình lan truyền :*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\Lambda\Gamma\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-(r\Gamma+g\Lambda)\frac{\partial V}{\partial t}-rgV=0,$$

hay

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-2\frac{K}{c}\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\Omega^2}{c^2}V=0$$

(các phương trình này cũng được I nghiệm đúng).

3) *Giả thử* $\underline{\psi}(x,t)=\underline{\phi}(x)e^{j\omega t}$ *là một nghiệm dao động của phương trình lan truyền. Biên độ* $\underline{\Phi}(x)$ *nghiệm đúng phương trình vi phân :*

$$\frac{d^2\underline{\Phi}(x)}{dx^2}+\left[-2j\omega\frac{K}{c}+\frac{(\omega^2-\Omega^2)}{c^2}\right]\underline{\Phi}(x)=0.$$

mà các nghiệm có dạng $\underline{\Phi}(x)=\underline{\Phi}_0^+e^{j\underline{k}_+x}+\underline{\Phi}_0^-e^{j\underline{k}_-x}$, *trong đó* $\underline{k}_+$ *và* $\underline{k}_-$ *là những nghiệm đối nhau của phương trình bậc hai :*

$$\underline{k}^2=\frac{(\omega^2-\Omega^2)}{c^2}-2j\omega\frac{K}{c}.$$

Các nghiệm này có thể viết được thành :

$$\underline{k}=k'-jk" \quad \text{với} \begin{cases} k'^2-k"^2=\dfrac{(\omega^2-\Omega^2)}{c^2} \\ k'k"=\dfrac{\omega K}{c} \end{cases}.$$

Chúng ứng với các sóng chạy dạng :

$$\psi(x,t)=\mathcal{R}e(\underline{\psi}(x,t)=|\underline{\Phi}_0|e^{-k"x}\cos(\omega t-k'x+\varphi_0).$$

Số hạng $\cos(\omega t-k'x+\varphi_0)$ *ứng với một sóng chạy. Số hạng* $e^{-k"x}$ *diễn tả sự hấp thụ năng lượng sóng bởi đường dây có hao tổn, có thể nhận xét rằng tích k'k" là dương : hàm mũ giảm theo chiều truyền của sóng và diễn tả một sự giảm dần gắn với những khuyết tật của đường dây. Pha chứa trong côsin và truyền với vận tốc :*

$$v_\varphi=\frac{\omega}{k'}.$$

Hàm mũ có thể viết thành $e^{-k"x}=e^{\pm\frac{x}{L}}$, *trong đó L là khoảng cách đặc trưng của sự giảm của sóng do đường dây, xác định bởi* $L=\frac{1}{|k"|}$.

5) *Đường dây sẽ không có tán sắc nếu vận tốc pha không phụ thuộc tần số, tức là nếu k' tỉ lệ với ω.*

Khử k" khỏi hệ phương trình mà k' và k" nghiệm đúng, ta được :

$$k'^4-\left(\frac{\omega^2-\Omega^2}{c^2}\right)k'^2-\frac{K^2\omega^2}{c^2}=0,$$

sau đó, bằng cách chọn nghiệm dương k'^2 *của phương trình trùng phương này, ta được :*

$$k'=\pm\sqrt{\left(\frac{\omega^2-\Omega^2}{2c^2}\right)+\sqrt{\left(\frac{\omega^2-\Omega^2}{2c^2}\right)^2+\frac{K^2\omega^2}{c^2}}}.$$

Ta thấy rằng đối với ω rất lớn thì $k'\approx\frac{\omega}{c}$, *k' tỉ lệ với ω nếu* $k'=\frac{\omega}{c}$ *ở mọi tần số. Điều đó bắt buộc :*

$$\left(\frac{\omega^2-\Omega^2}{2c^2}\right)^2+\frac{K^2\omega^2}{c^2}=\left(\frac{\omega^2-\Omega^2}{2c^2}\right)^2, \text{ tức là } K=\frac{\Omega}{c}, \text{ hay } R=Z_c.$$

Nhận xét : Dù sao thì đường bao của bó sóng vẫn biến dạng, vì sự giảm biên độ của các SPCĐS mà nó bao còn phụ thuộc tần số của chúng nữa (hiệu chỉnh được sự tán sắc, nhưng không hiệu chỉnh được sự hấp thụ). Tuy nhiên sự mở rộng đặc trưng của nó vẫn hầu như không đổi.

8 SÓNG ĐIỆN TỪ TRONG ĐIỆN MÔI

MỤC TIÊU

■ Mô hình phân cực, chỉ số.

■ Tán sắc và hấp thụ trong một điện môi.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

■ Dao động điều hòa tắt dần.

■ Các phương trình MAXWELL trong môi trường vật chất.

■ Tán sắc và hấp thụ.

Mở đầu

Ở chương 7, chúng ta đã đề cập các hiện tượng tán sắc và hấp thụ sóng.

Đặc biệt, khi khảo sát một mô hình sơ cấp về sự lan truyền sóng điện từ trong một môi trường dẫn điện, ta đã quan sát sự tồn tại các miền trong suốt và miền hấp thụ.

Một môi trường cách điện không chứa các điện tích dẫn (cũng gọi là điện tích tự do, vì chúng có thể di chuyển trong lòng của toàn thể vật liệu), mà chứa các điện tích gọi là điện tích liên kết, vì chuyển động của chúng có tầm xa hạn chế.

Dưới tác dụng của trường điện từ của một sóng, các điện tích này (êlectrôn, nguyên tử, ...) dao động "tại chỗ" theo tần số của sóng.

Ở mức độ vĩ mô, những tần số đặc trưng gắn với dao động của các điện tích liên kết thể hiện ở sự tồn tại của rất nhiều các vùng hấp thụ và vùng trong suốt.

Trong chương này, chúng ta sẽ nói về các hiện tượng đó, nói chung là phức tạp, bằng cách sử dụng mô hình sơ cấp của "điện tích liên kết đàn hồi".

1 Sự lan truyền trong một điện môi

1.1. Các phương trình MAXWELL

1.1.1. Điện tích và dòng điện

Một môi trường vật chất có thể :

• mang các *điện tích* mà ta biểu diễn bằng mật độ điện tích khối ρ ;

• là nơi diễn ra các *hiện tượng dẫn điện*, biểu diễn bởi một mật độ dòng điện khối $\vec{j}$.

Các điện tích và dòng điện đó có thể di chuyển trong toàn thể môi trường, chúng được gọi là *điện tích "tự do"* và *dòng điện "tự do"*, hay *điện tích dẫn* và *dòng điện dẫn*.

Nói chung nó cũng là nơi diễn ra :

• các *hiện tượng phân cực* gây ra bởi sự dịch chuyển trong một phạm vi hạn chế của các điện tích (biến dạng của các đám mây êlectrôn, dịch chuyển của các hạt nhân) tạo thành các nguyên tử, phân tử hoặc iôn của môi trường. Các lưỡng cực điện sơ cấp đó được mô hình hóa ở thang bậc vĩ mô bởi độ phân cực $\vec{P}$ của môi trường, là mômen lưỡng cực điện của một đơn vị thể tích. Một sự không đồng nhất về phân cực làm xuất hiện các điện tích phân cực địa phương. Những biến thiên theo thời gian của sự phân cực gây ra các dòng phân cực. Chúng được biểu diễn bởi (xem H-Prépa, Điện từ học, lớp độ nhị) :

$$\rho_{pc} = -\text{div}\vec{P} \quad \text{và} \quad \vec{j}_{pc} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} ;$$

• các *hiện tượng từ hóa*, do các cá thể tạo thành môi trường cũng đóng vai trò các lưỡng cực từ sơ cấp, biểu diễn ở thang bậc vĩ mô bởi độ từ hóa $\vec{M}$, là mômen từ của một đơn vị thể tích của môi trường. Gắn với độ từ hóa đó là một mật độ dòng khối :

$$\vec{j}_m = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{M} .$$

Các điện tích và dòng điện này gắn với sự dịch chuyển trong phạm vi rất hạn chế của các điện tích, được gọi là các *điện tích"liên kết"* và *dòng"liên kết"*.

1.1.2. Các phương trình MAXWELL

Các tính chất của trường điện từ chứa đựng trong các phương trình MAXWELL. Cũng như trong chân không các phương trình trong đó các nguồn không xuất hiện tường minh là :

$$\text{div}\vec{B} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} .$$

Chúng ta quan tâm đến trường *vĩ mô*, và bên cạnh các mật độ điện tích khối và mật độ dòng khối "tự do", chúng ta phải đưa vào các phương trình MAXWELL-GAUSS và MAXWELL-AMPÈRE các mật độ điện tích khối và

mật độ dòng khối tạo ra bởi sự phân cực và sự từ hóa môi trường. Việc sử dụng vectơ điện dịch $\vec{D}$ và vectơ kích thích từ $\vec{H}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \text{ và } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

cho phép viết các phương trình đó mà chỉ làm xuất hiện các điện tích tự do và dòng điện tự do ρ và $\vec{j}$:

$$\text{div}\,\vec{D} = \rho \text{ và } \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

1.2. Điện môi tuyến tính, đồng nhất và đẳng hướng

1.2.1. Điện môi

Từ nay ta sẽ quan tâm đến sự lan truyền sóng điện từ trong các vật liệu cách điện : $\vec{j} = \vec{0}$ và không có điện tích : $\rho = 0$ (chất cách điện chỉ chứa các điện tích và dòng điện "liên kết"), thí dụ như thủy tinh của một lăng kính có ánh sáng truyền qua.

Trong nhiều trường hợp, tính chất "từ" của môi trường là không đáng kể (độ từ hóa $\vec{M}$ hầu như bằng không) và ta sẽ coi trường $\vec{B}$ là bằng $\mu_0 \vec{H}$.

Các phương trình MAXWELL chi phối sự biến thiên của trường điện từ trong một điện môi cách điện và không tích điện, mà ta bỏ qua các tính chất từ, là :

$$\text{div}\,\vec{D} = 0; \quad \text{div}\vec{B} = 0; \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

1.2.2. Môi trường tuyến tính

Đối với nhiều môi trường, và nếu trường điện từ không quá lớn, mối liên hệ giữa sự phân cực của môi trường và trường điện từ là tuyến tính. Điều đó có nghĩa là các thành phần của các đại lượng vectơ này liên hệ với nhau bằng một phương trình vi phân tuyến tính. Do đó, ta có thể viết đối với các môi trường này, trong chế độ dạng sin với tần số ω và trong phép kí hiệu phức :

$$\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 [\underline{\chi}_e] \underline{\vec{E}}, \quad \text{vậy} \quad \underline{\vec{D}} = [\underline{\varepsilon}] \underline{\vec{E}} \quad \text{với} \quad [\underline{\varepsilon}] = \varepsilon_0 (1 + [\underline{\chi}_e]),$$

trong đó các toán tử độ cảm điện môi $[\underline{\chi}_e]$ và hằng số điện môi $[\underline{\varepsilon}]$ của môi trường tuyến tính được biểu diễn trong một cơ sở phép chiếu cho bởi hai ma trận 3×3 có các hệ số phức *tiên nghiệm*.

1.2.3. Môi trường tuyến tính, đồng nhất và đẳng hướng (tđđ)

Môi trường tuyến tính là đồng nhất nếu các tính chất của nó không phụ thuộc điểm M.

Nó là đẳng hướng nếu các ma trận $[\underline{\chi}_e]$ và $[\underline{\varepsilon}]$ là vô hướng (không có phương ưu tiên).

Khi đó các tính chất điện môi của môi trường được mô tả một cách đơn giản bởi :

$$\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \underline{\chi}_e \underline{\vec{E}}, \quad \text{vậy} \quad \underline{\vec{D}} = \underline{\varepsilon}\underline{\vec{E}} \quad \text{với} \quad \underline{\varepsilon} = \varepsilon_0(1 + \underline{\chi}_e)$$

Hằng số điện môi tỉ đối của môi trường là $\underline{\varepsilon}_r$, xác định bởi $\underline{\varepsilon} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r$.

1.3. Sự lan truyền các sóng điện môi trong một môi trường tdđ

1.3.1. Phương trình lan truyền

Trong một điện môi tdđ cách điện và không tích điện, các phương trình MAXWELL được viết đối với một trường dạng sin và trong cách kí hiệu phức :

$$\text{div}\underline{\vec{E}} = 0 \ ; \quad \text{div}\underline{\vec{B}} = 0 \ ; \quad \overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}; \quad \overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\varepsilon} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}.$$

Các phương trình này về mặt hình thức tương đương với các phương trình mà ta đã sử dụng khi khảo sát sự lan truyền các sóng điện từ trong chân không (xem chương 5) : chỉ cần thay hằng số điện môi ε_0 của chân không bằng hằng số điện môi $\underline{\varepsilon} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r$ của môi trường tdđ.

Có thể rút ra ngay các phương trình lan truyền của trường điện từ :

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{\underline{\varepsilon}_r}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{và} \quad \Delta\underline{\vec{B}} - \frac{\underline{\varepsilon}_r}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{B}}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

Chú ý rằng hệ số $\underline{\varepsilon}_r$, phức *tiên nghiệm*, được xác định đối với tần số ω của trường điện từ của sóng đơn sắc ta xét.

Trong một môi trường tuyến tính, đồng nhất, đẳng hướng (tdđ), trường của một sóng điện từ đơn sắc thỏa mãn phương trình d'ALEMBERT, trong cách kí hiệu phức :

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{\underline{\varepsilon}_r}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{và} \quad \Delta\underline{\vec{B}} - \frac{\underline{\varepsilon}_r}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{B}}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

1.3.2. Hệ thức tán sắc - Chỉ số của một môi trường

Đối với một SPCĐS có mạch số ω và vectơ sóng $\underline{\vec{k}}$, phương trình lan truyền đòi hỏi có hệ thức tán sắc :

$$\underline{k}^2 = \underline{\varepsilon}\mu_0\omega^2 = \underline{\varepsilon}_r \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Ta hình dung một SPCĐS có mạch số ω, có vectơ sóng, $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\vec{e}_x$, lan truyền theo phương trục (Ox) chẳng hạn. Số sóng $\underline{k}$ của nó liên hệ với tần số của nó bằng một hệ thức mà ta viết dưới dạng :

$$\underline{k} = \pm\underline{n}\frac{\omega}{c},$$

trong đó $\underline{n}$ là nghiệm có phần thực dương hoặc bằng không của phương trình $\underline{n}^2 = \underline{\varepsilon}_r$. Đại lượng $\underline{n}$ được gọi là *chỉ số của môi trường*.

Chỉ số này nói chung là phức và là hàm của tần số sóng. Hệ thức tán sắc trên dẫn đến các hiện tượng tán sắc và hấp thụ như ta đã mô tả ở *chương* 7.

Áp dụng 1

Điện môi hay môi trường dẫn điện ?

1) *Chứng tỏ rằng sự lan truyền trong lòng một môi trường dẫn điện có độ dẫn điện phức γ trong chế độ dạng sin ổn định có mạch số ω, có thể được đưa về hệ hình thức ở trên.*

Hãy chỉ rõ giá trị của hằng số điện môi "tương đương" có thể gán cho vật dẫn.

2) *Trong trường hợp các tần số cao (hành vi plasma nêu lên ở chương 7), khi bỏ qua các hiệu ứng tiêu tán, mối liên hệ giữa "chiết suất" của môi trường dẫn điện, tần số sóng và tần số plasma của môi trường là thế nào ?*

1) Sự lan truyền các sóng điện từ trong môi trường dẫn điện bị chi phối bởi hệ phương trình MAXWELL :

$$\text{div}\vec{E} = 0\ ; \quad \text{div}\vec{B} = 0\ ; \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\ ;$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\ ;$$

trong chế độ dạng sin và trong phép kí hiệu phức, chúng dẫn đến phương trình lan truyền :

$$\Delta\underline{\vec{E}} = \mu_0\underline{\gamma}\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} \text{ (vì } \vec{j} = \gamma\dot{E}\text{)}$$

và đến phương trình tán sắc $c^2\underline{k}^2 = \omega^2 - j\dfrac{\gamma\omega}{\varepsilon_0}$.

Hệ thức này có thể được đưa về dạng :

$$\underline{k}^2 = \underline{\varepsilon}_r\frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{với} \quad \underline{\varepsilon}_r = 1 + \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon_0}.$$

2) Ở tần số cao, hệ thức tán sắc trở thành : $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ (xem chương 7, §**2.5**). Đối với $\omega < \omega_p$, chiết suất là thuần ảo :

$$\underline{n} = -j\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}\,.$$

Đối với $\omega > \omega_p$, nó là thực : $\underline{n} = n = \sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}$.

Đối với việc khảo sát sự lan truyền các sóng điện từ, thì sự phân biệt giữa một môi trường dẫn điện và một điện môi có vẻ chỉ là thuần túy hình thức.

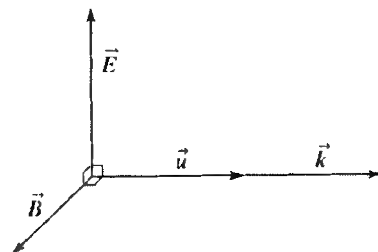
1.3.3. Cấu trúc trường điện từ

Chúng ta đã nhận xét rằng các phương trình MAXWELL ở đây tương đương về mặt hình thức với các phương trình của chân không, với điều kiện là thay hằng số điện môi ε_0 của chân không bằng hằng số $\underline{\varepsilon} = \varepsilon_0\underline{\varepsilon}_r$ của môi trường tđđ.

Chúng ta rút ra rằng trong một điện môi tđđ cách điện và không tích điện, thì một SPCĐS điện từ truyền theo phương vectơ đơn vị $\vec{u}$ nghiệm đúng hệ thức cấu trúc :

$$\underline{\dot{B}} = \frac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \underline{n}\frac{\vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}}{c}.$$

Các vectơ $\underline{\vec{E}}$, $\underline{\vec{B}}$ và $\vec{u}$ tạo thành một tam diện thuận có ba góc vuông (*h*.1).



H.1. *Cấu trúc trường điện từ của một SPCĐS trong một điện môi.*

<u>*Chú ý :*</u>

Số sóng là phức, hệ thức cấu trúc chỉ ra rằng điện trường và từ trường không đồng pha, trái với trường hợp chân không. Tuy nhiên chúng là đồng pha trong một miền trong suốt của môi trường, ứng với $\underline{k}$ thực.

Áp dụng 2

Vectơ POYNTING của SPCĐS

1) *Biểu thức tổng quát của vectơ POYNTING là thế nào trong một môi trường vật chất, rồi trong một điện môi mà tính chất từ là không đáng kể ?*

2) *Trung bình theo thời gian của nó là bao nhiêu trong trường hợp của SPCĐS xác định trên đây (trong một điện môi có tính chất từ không đáng kể) ?*

1) Trong một môi trường vật chất, vectơ POYNTING được xác định trong phép kí hiệu thực bởi $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$.

Đối với một điện môi mà ta bỏ qua các tính chất từ, ta thấy lại :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

2) Trung bình theo thời gian của vectơ POYNTING là, trong phép kí hiệu phức :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2}\mathcal{R}\mathrm{e}\left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0} \right)$$

tức là, đối với SPCĐS xét ở đây :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge (\underline{n}\vec{u} \wedge \underline{\vec{E}})^*}{\mu_0 c} \right) = \frac{\mathrm{Re}(\underline{n}^*)(\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^*)}{2\mu_0 c}\vec{u}.$$

2 Phân cực, tán sắc và hấp thụ

2.1. Khảo sát một mô hình của sự phân cực

Để diễn đạt hằng số điện môi của một môi trường, là một đại lượng vĩ mô, ta cần khảo sát ở thang bậc vi mô tương tác của trường điện từ với các điện tích liên kết của môi trường : êlectrôn hay hạt nhân tạo thành các nguyên tử, hoặc các phân tử của môi trường, iôn của một tinh thể iôn, ...

Ở thang bậc này (vi mô), một sự khảo sát như vậy đòi hỏi sử dụng cơ học lượng tử, điều đó vượt ra ngoài phạm vi sách này. Chúng ta chỉ định sẽ sử dụng một mô hình cổ điển sơ cấp cho phép hình dung khá tốt các quan sát thực nghiệm.

2.1.1. Mô hình điện tích liên kết đàn hồi

Chúng ta đã sử dụng mô hình này của nhà vật lí học Hà Lan Hendrik Antoon LORENTZ (1853 – 1928) để hình dung sự tán xạ của bức xạ Mặt Trời bởi các phân tử của khí quyển (*xem chương* 6).

Trường của một sóng điện từ làm chuyển động các điện tích liên kết của môi trường vật chất trong đó nó lan truyền. Nếu đáp ứng là tuyến tính, một sóng đơn sắc bắt các điện tích này dao động với tần số ω.

Trong phạm vi mô hình này, một điện tích liên kết (khối lượng m và điện tích q) chịu tác dụng của :

• một lực hồi phục *đàn hồi*, tỉ lệ với độ dịch chuyển $\vec{r}$ của nó so với vị trí cân bằng : $\vec{f} = -k\vec{r}$;

• một lực nhằm diễn tả các hiện tượng tiêu tán năng lượng (va chạm, bức xạ, ...) tức là, khi đưa vào một thời gian hồi phục τ :

$$\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v} \;;$$

• lực LORENTZ do trường điện từ của sóng gây ra, trong đó ta bỏ qua (một cách cổ điển, đối với một điện tích phi tương đối tính) ảnh hưởng của số hạng từ $\vec{f} = q\vec{E}$.

Chú ý :

• *Trường của sóng là đều ở thang bậc của phân tử, nếu bước sóng lớn hơn hẳn kích thước các hạt của môi trường (kích thước của một nguyên tử có độ lớn khoảng* 0,1mm).

• *Đối với một môi trường ít đậm đặc (trường hợp chất khí), chúng ta bỏ qua một cách tiên nghiệm ảnh hưởng của các trường bức xạ bởi các nguyên tử hoặc phân tử lân cận. Trong trường hợp khác (chất lỏng, chất rắn), ta sẽ thừa nhận rằng việc bỏ qua chúng không thay đổi cơ bản những kết quả mà ta dự kiến sẽ tìm thấy.*

Vậy phương trình chuyển động của điện tích là :

$$m\vec{a} = -k\vec{r} - m\frac{\vec{v}}{\tau} + q\vec{E}, \qquad \text{tức là} \qquad \ddot{\vec{r}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{q\vec{E}}{m},$$

trong đó $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ là tần số riêng của dao động tử tắt dần này và $Q = \omega_0\tau$ là hệ số phẩm chất của nó.

Trong chế độ dạng sin ổn định, độ dịch chuyển của điện tích viết theo kí hiệu phức là :

$$\underline{\vec{r}} = \frac{\dfrac{q}{m\omega_0^2}}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}\underline{\vec{E}}.$$

2.1.2. Sự phân cực trong chế độ dạng sin

Môi trường khảo sát là trung hòa trong toàn bộ. Gắn với độ dịch chuyển $\vec{r}$ của điện tích q là một mômen lưỡng cực sơ cấp $\vec{p} = q\vec{r}$, trong cách kí hiệu phức là $\underline{\vec{p}} = \underline{\alpha}\underline{\vec{E}}$, trong đó α là *hệ số phân cực.*

Vectơ phân cực của môi trường lđđ chứa N điện tích liên kết (giả định là như nhau) trong mỗi đơn vị thể tích, là $\underline{\vec{P}} = N\underline{\vec{p}}$. Ta được :

$$\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0\underline{\chi}_e\underline{\vec{E}} \text{ với } \underline{\chi}_e = \frac{\chi_0}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}},$$

trong đó $\chi_0 = \dfrac{Nq^2}{m\varepsilon_0\omega_0^2}$ là độ cảm tĩnh điện ($\omega \approx 0$).

$\underline{\chi}_e$ là phức ; ta đặt $\underline{\chi}_e = \chi_1 - j\chi_2$ với :

$$\chi_1 = \chi_1(\omega) = \chi_0 \frac{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$$

và $$\chi_2 = \chi_2(\omega) = \chi_0 \frac{\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}.$$

Nhận xét :

Chúng ta không phân biệt điện trường cho phép diễn đạt mômen lưỡng cực sơ cấp $\vec{p} = \underline{\alpha}\vec{\underline{E}}$, và điện trường gắn với sự phân cực bởi $\vec{\underline{P}} = \varepsilon_0 \underline{\chi}_e \vec{\underline{E}}$:

- *cái thứ nhất là điện trường có ý nghĩa vi mô, là trường địa phương mà cá thể bị nó phân cực "nhìn thấy" ;*
- *cái thứ hai là điện trường vĩ mô, là trường tham gia vào cách viết các phương trình MAXWELL trong môi trường.*

Sự lẫn lộn này có vẻ là thích hợp trong trường các môi trường loãng, có độ cảm nhỏ ; đối với trường hợp này thì trường do các hạt khác của môi trường gây ra sẽ ít làm nhiễu loạn trường tác dụng vào vật chất. Ta chấp nhận rằng trong trường hợp các môi trường đậm đặc, sự lẫn lộn này là đáng nghi ngờ, tuy nhiên nó cũng ít làm nhiễu loạn các kết luận đơn giản của sự khảo sát này.

Mô hình điện tích liên kết đàn hồi cho phép diễn đạt được sự phụ thuộc của độ cảm điện môi $\underline{\chi}_e$ phức của một điện môi vào tần số ω của chế độ dạng sin mà ta xét.

Áp dụng 3

Công suất trung bình tiêu tán

Bằng nhiều phương pháp khác nhau, hãy biểu thị mật độ công suất khối trung bình (trong chế độ dạng sin) tiêu tán trong lòng môi trường, bằng cách liên hệ nó với độ cảm điện.

Ta biết rằng những biến thiên độ phân cực của môi trường gây ra một dòng phân cực :

$$\vec{\underline{j}}_{pc} = \frac{\partial \vec{\underline{P}}}{\partial t}$$

Vậy mật độ công suất khối trung bình bị tiêu tán là :

$$\langle \mathscr{P} \rangle = \frac{1}{2}\mathscr{R}e(\vec{\underline{j}}_{pc}.\vec{\underline{E}}^*) = \frac{1}{2}\mathscr{R}e(j\omega\vec{\underline{P}}.\vec{\underline{E}}^*)$$

$$= \frac{1}{2}\mathscr{R}e(j\omega\varepsilon_0\underline{\chi}_e\vec{\underline{E}}.\vec{\underline{E}}^*) = \frac{1}{2}\omega\varepsilon_0\chi_2(\vec{\underline{E}}.\vec{\underline{E}}^*)$$

Sự tiêu tán năng lượng gắn trực tiếp với phần $\chi_2 = -\mathscr{I}m(\underline{\chi}_e)$ của độ cảm phức của môi trường.

Chúng ta cũng có thể trở lại số hạng tiêu tán chứa trong phương trình chuyển động của điện *tích liên* kết đàn hồi, và viết :

$$\langle \mathscr{P} \rangle = -N\frac{1}{2}\mathscr{R}e\left(-\frac{m}{\tau}\underline{\vec{v}}.\underline{\vec{v}}^*\right)$$

$$= \frac{Nm\omega_0}{2Q}\left|\frac{j\omega\dot{\underline{P}}}{qN}\right|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\omega^2\frac{|\underline{\chi}_e|^2}{Q\omega_0\chi_0}(\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^*).$$

Biểu thị phần ảo :

$$\chi_2 = \chi_0\frac{\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$$

của độ cảm điện, chúng ta tìm lại được kết quả ở trên.

Ta vẽ các đồ thị biểu diễn biến thiên của χ_1 và χ_2 theo tần số ω (*h*.2), khi hệ số phẩm chất Q là lớn (là trường hợp thường gặp ; $Q \approx 10^3$ đến 10^4). Ta thấy rằng χ_1 triệt tiêu đối với $\omega = \omega_0$, trong khi χ_2 là cực đại đối với một giá trị của ω rất gần ω_0 (Q càng lớn thì ω càng gần ω_0). Ta có thể kiểm tra thấy rằng đối với một hệ số phẩm chất lớn thì giá trị đặc trưng của miền phổ, tập trung vào $\omega = \omega_0$, tại đó các đại lượng này biến thiên đáng kể, là :

$$\Delta\omega \approx \omega_m - \omega_M \approx \frac{\omega_0}{Q}.$$

Áp dụng 3 đã chỉ rõ rằng công suất tiêu tán trong lòng điện môi gắn trực tiếp với phần $\chi_2 = -\mathscr{I}m(\underline{\chi}_e)$ của độ cảm phức của môi trường. Trong miền phổ này, χ_2 lớn đáng kể và sự hấp thụ năng lượng điện từ bởi môi trường cũng vậy. Ngoài miền đó, χ_2 rất nhỏ và sự tiêu tán năng lượng điện từ cũng vậy.

▶ **Để luyện tập : bài tập 3 và 4.**

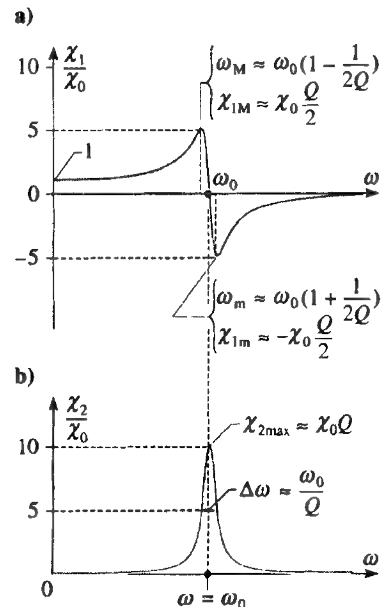
2.1.3. Sự phân cực hoàn toàn của môi trường

Thông thường, một môi trường chứa nhiều loại điện tích liên kết có khả năng di chuyển dưới tác dụng của điện trường của một sóng điện từ :

- các êlectrôn của các nguyên tử hoặc phân tử của môi trường (và trong một nguyên tử, các êlectrôn ở dưới sâu không có chung những đặc trưng như những êlectrôn ở ngoại vi) ;
- các hạt nhân (có khối lượng rất gần bằng khối lượng của nguyên tử tương ứng) ;
- các iôn, nếu môi trường là một chất rắn iôn.

Tất cả các điện tích liên kết khác nhau đó, có điện tích q_i, khối lượng m_i, được phân bố thành nhiều kiểu dao động tử có tần số riêng ω_{0i} và hệ số phẩm chất Q_i, các độ dịch chuyển $\vec{r}_i$ của chúng được viết thành :

$$\underline{\vec{r}}_i = \frac{\dfrac{q_i}{m_i\omega_{0i}^2}}{1+j\dfrac{\omega}{Q_i\omega_{0i}}-\dfrac{\omega^2}{\omega_{0i}^2}}\underline{\vec{E}}.$$



H.2. *Mô hình điện tích liên kết đàn hồi và độ cảm điện môi (mô phỏng đối với $Q = 10$)*
a. *Phần thực* $\chi_1 = \mathscr{R}e(\underline{\chi}_e)$. *Các cực trị được tính cho :*

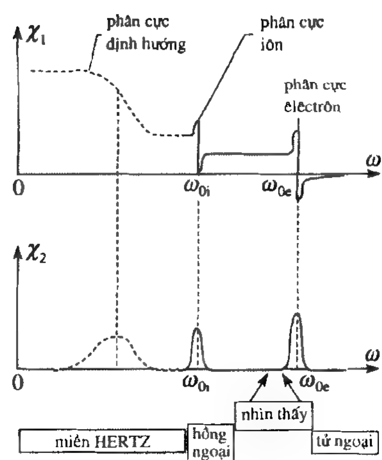
$$\omega_{M,m} \approx \omega_0\left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right).$$

b. *Phần ảo* $\chi_2 = -\mathscr{I}m(\underline{\chi}_e)$.

Giả thử rằng một hạt sơ cấp (nguyên tử, phân tử hay iôn) có a_i điện tích liên kết với cùng khối lượng m_i, cùng điện tích q_i, cùng tần số riêng ω_{0i} và cùng hệ số phẩm chất Q_i (như vậy tất cả các êlectrôn ngoại vi của một nguyên tử có thể có cùng một hành vi), và rằng môi trường chứa N hạt cơ bản trong một đơn vị thể tích, thì vectơ phân cực của môi trường được viết thành :

$$\underline{\vec{P}} = N\left(\sum_i \frac{a_i q_i^2}{m_i \omega_{0i}^2} \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{Q_i \omega_{0i}} - \dfrac{\omega^2}{\omega_{0i}^2}}\right)\underline{\vec{E}}.$$

Ứng với mỗi kiểu dao động tử là một vùng hấp thụ. Giữa các vùng này, sự tiêu tán năng lượng trong lòng môi trường là rất nhỏ.



H.3. *Sự tham gia của các kiểu phân cực khác nhau (sơ đồ, trục tần số chia độ theo thang lôga).*

2.1.4. Các bậc độ lớn

Chúng ta lưu ý đến các tần số đặc trưng :

- những tần số đặc trưng của sự *phân cực êlectrôn* ω_{0e} nằm trong miền nhìn thấy và miền tử ngoại (tần số vào bậc từ 10^{14} Hz đến 10^{15} Hz) ;
- những *tần số riêng* gắn với chuyển động của các nguyên tử của một phân tử, hoặc các iôn của một tinh thể iôn, nặng hơn các êlectrôn rất nhiều, thì nhỏ hơn rõ rệt. Những tần số đặc trưng của sự *phân cực nguyên tử* hoặc *phân cực iôn* ω_{0i} xuất hiện trong miền hồng ngoại (tần số vào bậc từ 10^{12} Hz đến 10^{14} Hz).

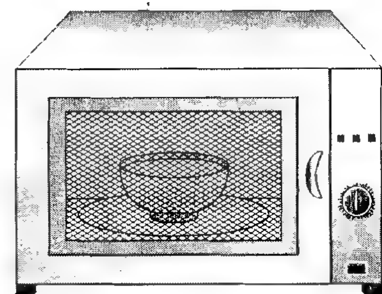
Các hệ số phẩm chất là lớn (trung bình là 10^{14}), thành thử ta quan sát được các vùng hấp thụ khác nhau ứng với các sự phân cực êlectrôn và phân cực iôn.

Hình 3 gợi ra dáng vẻ của các đồ thị của $\chi_1 = \chi_1(\omega)$ và $\chi_2 = \chi_2(\omega)$, với mỗi kiểu chỉ xét một tần số, kí hiệu là ω_{0e} và ω_{0i}. Sự hấp thụ là đáng kể trong các vùng mà χ_2 không thể bỏ qua được (trong đó χ_1 biến thiên đáng kể). Ở ngoài các vùng đó, trong các miền khá rộng, χ_2 hầu như bằng không (và χ_1 biến thiên ít theo tần số). Sự hấp thụ là không đáng kể : môi trường là trong suốt đối với sóng điện từ.

Đường cong chấm chấm gợi ra ảnh hưởng của một sự *phân cực định hướng*, hay *phân cực lưỡng cực*. Ở miền hồng ngoại xa và miền HERTZ, đối với một môi trường bao gồm các phân tử có cực, thì tất cả phân tử có thể dao động trong trường của sóng (Áp dụng 4 đề xuất một sự mô hình hóa của vấn đề này).

Như vậy, nước có :

- một vùng trong suốt trong miền nhìn thấy ;
- một vùng hấp thụ trong miền tử ngoại (những chuyển tiếp giữa các mức êlectrôn trong phân tử) và trong miền hồng ngoại (các kiểu dao động của phân tử) ;
- một sự hấp thụ quan trọng trong miền hồng ngoại ;
- một sự hấp thụ trong miền các sóng centimet, làm cơ sở cho sự hoạt động của các lò vi ba, chúng "đun nóng" nước chứa trong các thực phẩm (*h*.4).



H.4. *Trong một lò vi ba, các sóng điện từ centimet do các manhêtrôn sinh ra "đun nóng" các phân tử nước chứa trong các thực phẩm.*

Cuối cùng, ta chú ý rằng trong miền các tia X (có các tần số rất lớn, vào bậc từ 10^{17} Hz đến 10^{20} Hz), $\underline{\chi}_e$ là thực và luôn luôn dần tới số không từ

các giá trị âm. Như vậy phần lớn các môi trường là tương đối trong suốt đối với các tia X.

Một môi trường có các miền tần số trong đó độ cảm là thực ($\chi_2 \approx 0$) và biến thiên chậm theo tần số. Các miền này phân cách nhau bởi các vùng hấp thụ trong đó độ cảm phức biến thiên nhanh theo tần số.

Áp dụng 4

Mô hình phân cực DEBYE

1) *Khi đặt trong một điện trường đều không đổi, một môi trường tdđ với độ cảm tĩnh điện χ_0 có được một độ phân cực đều $\vec{P}_0$. Khi ta khử điện trường, thực nghiệm chứng tỏ rằng sự phân cực của môi trường không mất đi tức thời, mà giảm theo một định luật hàm mũ có hằng số thời gian τ:*

$$\vec{P} = \vec{P}_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Ngược lại, khi được đặt vào một trường đều $\vec{E}_0$, độ phân cực $\vec{P}$ dần tới $\vec{P}_0$ theo hàm mũ, với cùng hằng số thời gian.

a) *Hãy xác định giá trị của $\vec{P}_0$.*

b) *Phương trình vi phân chi phối sự biến thiên của vectơ phân cực $\vec{P}$ là phương trình nào ?*

2) *Bây giờ có một sóng điện từ dạng sin, tần số ω, đi qua môi trường.*

Cho rằng phương trình vi phân ở trên vẫn còn có giá trị (bỏ qua ảnh hưởng của trường $\vec{B}$), và dùng cách kí hiệu phức, hãy tìm độ cảm điện môi phức $\underline{\chi}_e = \chi_1 - j\chi_2$ của môi trường này.

Vẽ các đường cong $\chi_1(\omega)$ và $\chi_2(\omega)$.

b) *Chứng tỏ rằng các giá trị χ_1 và χ_2 thu được bằng cách sử dụng mô hình điện tích liên kết đàn hồi cũng giống như các phương trình thu được ở đây, nếu áp dụng những sự gần đúng (cần nói rõ).*

1) a) Theo định nghĩa của độ cảm điện môi tĩnh χ_0, thì $\vec{P}_0 = \varepsilon_0\chi_0\vec{E}_0$.

b) Phương trình vi phân là $\frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{\vec{P}}{\tau} = \vec{0}$ khi khử cực, hoặc $\frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{\vec{P}_0}{\tau} = \frac{\varepsilon_0\chi_0}{\tau}\vec{E}_0$ khi phân cực.

2) a) Trong chế độ dạng sin ổn định, và dùng cách kí hiệu phức $\underline{\vec{P}} = \underline{\vec{P}}_0 e^{j\omega t}$, phương trình vi phân đòi hỏi :

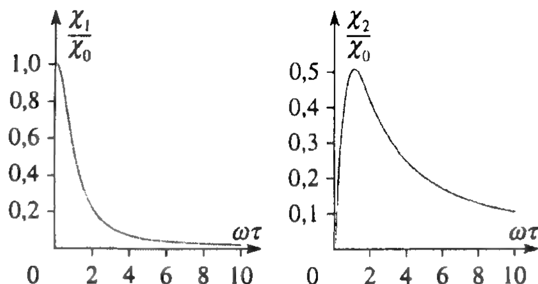
$$\left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)\underline{\vec{P}} = \frac{\varepsilon_0\chi_0}{\tau}\underline{\vec{E}},$$

tức là $$\underline{\vec{P}} = \frac{\varepsilon_0\chi_0}{1 + j\omega\tau}\underline{\vec{E}} = \varepsilon_0\underline{\chi}_e\underline{\vec{E}}.$$

Ta rút ra :

$$\chi_1 = \chi_0\frac{1}{1+(\omega\tau)^2} \quad \text{và} \quad \chi_2 = \chi_0\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}.$$

Các biến thiên được biểu diễn trên *hình* 5.



H.5. *Độ cảm điện môi của mô hình DEBYE (nó giải thích các phần chấm chấm trên các đường cong $\chi_1(\omega)$ và $\chi_2(\omega)$ của hình 3).*

b) Mô hình điện tích liên kết đàn hồi dẫn tới những kết quả giống như mô hình DEBYE với điều kiện bỏ qua số hạng gia tốc trong phương trình chuyển động. Điều đó cũng giống như là bỏ qua các số hạng chứa ω^2 so với các số hạng khác trong biểu thức của độ cảm điện, tức là :

$$\underline{\chi}_e \approx \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + j\dfrac{\omega_0}{Q}\omega} = \frac{\chi_0}{1 + j\left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)},$$

giống như biểu thức ở trên, nếu đặt :

$$\tau = \frac{1}{Q\omega_0}.$$

2.2. Tán sắc và hấp thụ

Từ biểu thức của độ cảm điện môi $\underline{\chi}_e$, ta rút ra hằng số điện môi của môi trường :

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r = \varepsilon_1 - j\varepsilon_2 \qquad \text{với} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0(1 + \chi_1) \quad \text{và} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \chi_2 .$$

$\underline{\varepsilon}$ có mặt trong hệ thức tán sắc của SPCĐS điện từ :

$$\underline{k}^2 = \underline{\varepsilon}_r \frac{\omega^2}{c^2}, \qquad \text{tức là} \quad \underline{k} = k_1 - jk_2 = \pm \underline{n}\frac{\omega}{c}.$$

Chỉ số n của môi trường nói chung là phức, và được xác định đối với một tần số ω cho trước như là nghiệm có phần thực dương của $\underline{n}^2 = \underline{\varepsilon}_r$. Ta viết :

$$\underline{n} = n_1 - jn_2 = (\underline{\varepsilon}_r)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{do đó} \quad n_1^2 - n_2^2 = \varepsilon_1 \ \text{ và } \ 2n_1n_2 = \varepsilon_2 .$$

Điện trường (đương nhiên là ngang, xem §**1.3.3**) của một SPCĐS truyền theo phương và chiều của trục (Ox) được viết là :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-k_2 x} e^{j(\omega t - k_1 x)} \quad \left(\text{với } k_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \text{ và } k_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \text{ dương}\right),$$

tức là, nếu trở về cách kí hiệu thực (với giả định $\vec{E}_0$ là thực : $\underline{\vec{E}}_0 = \vec{E}_0$) :

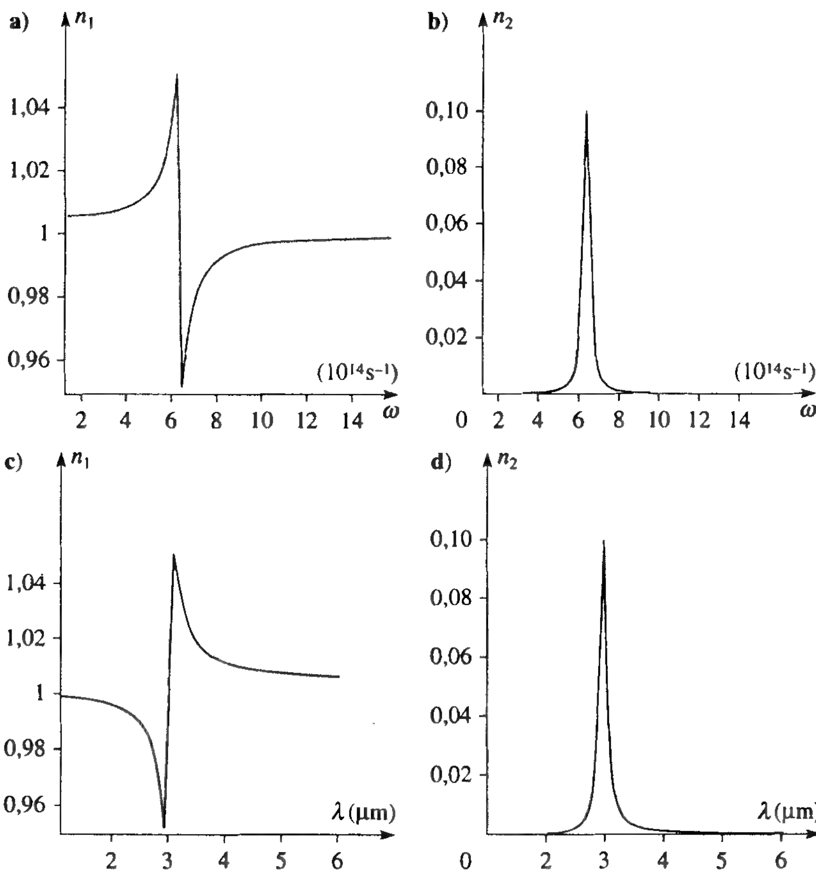
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k_2 x} \cos(\omega t - k_1 x).$$

• Chỉ số n_1 là chỉ số khúc xạ mà ta sử dụng trong quang học. Nó cho phép biểu thị vận tốc pha của một SPCĐS :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_1} = \frac{c}{n_1}, \text{ trong đó } n_1 \text{ đặc trưng cho sự tán sắc của môi trường.}$$

• Hệ số n_2 đặc trưng cho sự hấp thụ sóng bởi môi trường. Đó là chỉ số tắt dần.

Các đường cong vẽ trên hình 6 chỉ rõ biến thiên của chỉ số khúc xạ n_1 và chỉ số tắt dần n_2 của môi trường trong phạm vi mô hình điện tích liên kết đàn hồi, theo bước sóng trong chân không. Các đường cong này rất giống các đường cong trên hình 2 (trên đó biểu diễn χ_1 và χ_2 theo ω) : các vùng trong suốt khá rộng với sự tán sắc nhỏ được ngăn cách bởi các cửa sổ tương đối hẹp tại đó tán sắc và hấp thụ là lớn.



◀ **H.6.** *Mô phỏng các đường cong* n_1 *và* n_2 *đối với* $\chi_0 = 10^{-2}$ *(môi trường loãng) với chỉ một tần số riêng* ω_0 *ứng với* $\lambda_0 = 3\mu m$ *(hồng ngoại, phân cực nguyên tử) và* $Q = 10$ *(để dễ đọc các đường cong).*
a. $n_1 = f(\omega)$. **b.** $n_2 = f(\omega)$.
c. $n_1 = f(\lambda)$. **d.** $n_2 = f(\lambda)$.

Mô hình sơ cấp mà ta đã đề xuất dễ gây tranh cãi, nhưng được các quan sát thực nghiệm khẳng định : hình 7 cho các đường cong thực nghiệm ứng với nước trong miền hồng ngoại.

2.3. Vùng trong suốt

2.3.1. Chiết suất

Trong một vùng trong suốt, tán sắc và hấp thụ là yếu. Khi đó ta viết được : $\varepsilon \approx \varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$. Chỉ số của môi trường đồng nhất với chiết suất của nó

$$\underline{n} \approx n_1 \gg n_2 .$$

Xét một môi trường chỉ có một loại điện tích liên kết. Ta có thể dùng dạng gần đúng :

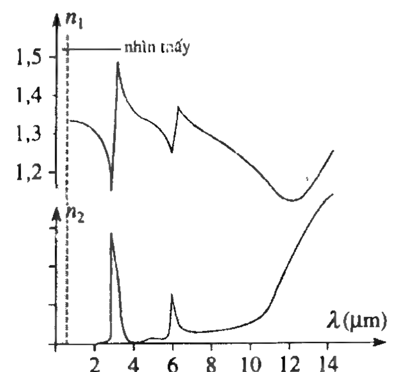
$$\varepsilon_r = 1 + \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{với} \quad \varepsilon_r > 0 ,$$

trong đó số hạng tắt dần đã được bỏ qua (điều đó giống như lấy $Q = \infty$).

Trong một miền tần số mà chỉ số quang học của môi trường là thực, một sóng điện từ lan truyền mà không bị yếu đi : môi trường là trong suốt đối với sóng đó.

Khi đó sự tán sắc là tương đối nhỏ.

Thủy tinh, nước, khí quyển là trong suốt đối với ánh sáng nhìn thấy.



H.7. *Các đường cong thực nghiệm* $n_1(\lambda)$ *và* $n_2(\lambda)$ *đối với nước, từ miền tử ngoại gần* ($\lambda = 0,6\mu m$) *đến miền hồng ngoại gần* (λ = 0,8μm)*. Ta thấy lại sự hấp thụ trong các miền hồng ngoại và tử ngoại, đã nêu lên ở* **§2.1.4**.

Áp dụng 5

Công thức CAUCHY đối với chiết suất của một loại thủy tinh

Trong miền nhìn thấy, hằng số điện môi tỉ đối của một loại thủy tinh được xác định đúng bởi hệ thức ở trên, tần số riêng ω_0 nằm ở miền tử ngoại xa.

Hãy chứng tỏ rằng trong miền tần số này chiết suất của thủy tinh tuân theo định luật CAUCHY :

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}.$$

Giả định rằng $\omega \ll \omega_0$, ta được :

$$n^2 = \varepsilon_r \approx 1 + \chi_0\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}\right).$$

Bước sóng trong chân không là $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$, do đó :

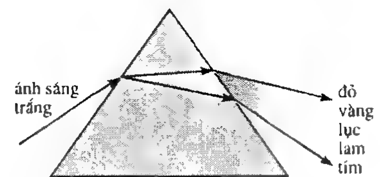
$$n^2 = (1+\chi_0) + \left(\frac{2\pi c}{\omega_0}\right)^2 \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{2\pi c}{\omega_0}\right)^4 \frac{1}{\lambda^4}.$$

Công thức CAUCHY mô tả rất tốt sự tán sắc của nhiều loại thủy tinh dùng trong quang học. Mô hình sơ cấp của ta không đủ để tường thuật các hiện tượng phức tạp có mặt trong tương tác giữa sóng và môi trường, cho nên thực ra thì các hệ số A, B và C được xác định bằng thực nghiệm.

Công thức gần đúng $n^2 = A + \dfrac{B}{\lambda^2}$ nhiều khi cũng đã là đủ.

2.3.2. Tán sắc bình thường

Sự biến thiên của chiết suất giải thích sự tán sắc ánh sáng bởi một lăng kính thủy tinh (*h.*8). Độ lệch tăng cùng với chiết suất của thấu kính, tức là từ màu đỏ đến màu tím (xem công thức CAUCHY, *Áp dụng* 5). Cũng chính sự tán sắc của ánh sáng trắng xuất phát từ Mặt Trời bởi những giọt nước li ti trong khí quyển ẩm ướt, đã gây ra những cầu vồng sau một trận mưa lớn (*h.*9).



H.8. *Sự tán sắc ánh sáng bởi một lăng kính.*

Do chiết suất biến thiên tương đối ít theo tần số, một bó sóng lan truyền trong một môi trường như vậy sẽ ít bị biến dạng. Sử dụng hệ thức tán sắc, ta có :

$$k = n\frac{\omega}{c}, \qquad \text{vậy} \qquad \mathrm{d}k = \frac{\mathrm{d}\omega}{c}\left(n + \omega\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}\right).$$

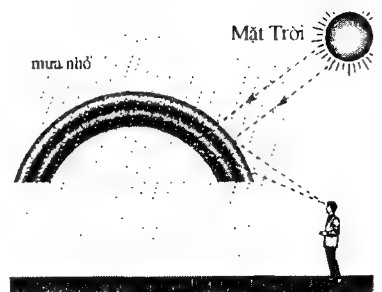
Do đó vận tốc nhóm của một bó sóng là :

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c}{n + \omega\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}} = \frac{v_\varphi}{1 + \dfrac{\omega}{n}\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}}$$

với vận tốc pha $v_\varphi = \dfrac{c}{n}$.

Vì chiết suất lớn hơn 1, trừ phi ở các tần số rất cao (và có khi ở những vùng hấp thụ), nên vận tốc pha v_φ nói chung nhỏ hơn c.

Trong vùng trong suốt này ; n là một hàm đồng biến của tần số (xem định luật CAUCHY chẳng hạn), thành thử v_g cũng nhỏ hơn c.



H.9. *Cầu vồng được tạo ra bởi sự tán sắc ánh sáng mặt trời do các hạt nước nhỏ li ti.*

Trong các vùng mà vận tốc pha và vận tốc nhóm cùng nhỏ hơn c, sự tán sắc được gọi là "bình thường".

Trong một vùng trong suốt, vận tốc nhóm của một bó sóng ứng với vận tốc truyền năng lượng gắn với bó sóng đó, nhỏ hơn c.

Áp dụng 6

Hệ thức RAYLEIGH giữa vận tốc pha và vận tốc nhóm

Hệ thức gắn vận tốc nhóm v_g, vận tốc pha v_φ, bước sóng λ_{mt} trong môi trường, xác định bởi $\lambda_{mt} = \frac{\lambda}{n}$ và đạo hàm $\frac{dv_\varphi}{d\lambda_{mt}}$ là hệ thức nào ?

λ chỉ bước sóng trong chân không.

Sử dụng bảng các dữ liệu bằng số đối với cacbon sunfua, một môi trường trong suốt và rất tán sắc trong miền các sóng ánh sáng, hãy tính vận tốc nhóm v_g đối với bước sóng $\lambda = 550\text{nm}$.

So sánh giá trị thu được với giá trị cho bởi thực nghiệm, là :

$$v_g = \frac{c}{1{,}77}.$$

λ (nm)	589	550	486
chỉ số *n*	1,628	1,640	1,652

Vận tốc nhóm là :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v_\varphi k)}{dk} = v_\varphi + k\frac{dv_\varphi}{dk}.$$

Sử dụng $k = n\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_{mt}}$, ta thu được công thức RAYLEIGH :

$$v_g = v_\varphi - \lambda_{mt}\frac{dv_\varphi}{d\lambda_{mt}}.$$

Gắn các chỉ số 1, 2, 3 với các giá trị khác nhau của bảng số (từ trái sang phải), ta có thể tính được :

$$v_g = v_\varphi - \lambda_{mt}\frac{dv_\varphi}{d\lambda_{mt}}$$

$$\approx \frac{c}{n_2} - \frac{\lambda_2}{n_2}\frac{\frac{c}{n_3} - \frac{c}{n_1}}{\frac{\lambda_3}{n_3} - \frac{\lambda_1}{n_1}} = \frac{c}{1{,}768}.$$

Chúng ta tìm lại được giá trị thực nghiệm, sai khác 0,1%.

▶ **Để luyện tập : bài tập 1.**

2.4. Vùng hấp thụ

Từ nay, ta đứng trong một vùng tần số ở lân cận một mạch số riêng ω_0 của môi trường.

2.4.1. Chỉ số phức

Các phần ảo của hằng số điện môi và của chỉ số của môi trường không còn có thể bỏ qua được nữa.

Biên độ một sóng điện từ có mạch số ω, lan truyền trong môi trường theo phương và chiều trục (Ox), giảm theo hàm mũ với khoảng cách nó truyền qua trong môi trường, vì nó tỉ lệ với :

$$e^{-k_2 x} = e^{-n_2 \frac{\omega x}{c}}.$$

Trong một miền tần số mà hằng số điện môi tỉ đối $\underline{\varepsilon}_r$ của một môi trường là phức (chiết suất xác định bởi $\underline{n}^2 = \underline{\varepsilon}_r$ cũng là phức) thì môi trường hấp thụ các sóng điện từ đi qua nó.

■ Thủy tinh hấp thụ bức xạ tử ngoại mà bước sóng nhỏ hơn 320 nm (kính râm bảo vệ mắt khỏi các bức xạ tử ngoại trong ánh sáng mặt trời) (*h.*10).

Ôzôn và điôxi đều có một vùng hấp thụ trong miền tử ngoại, điều đó giải thích vai trò bảo vệ của ôzôn và của khí quyển.

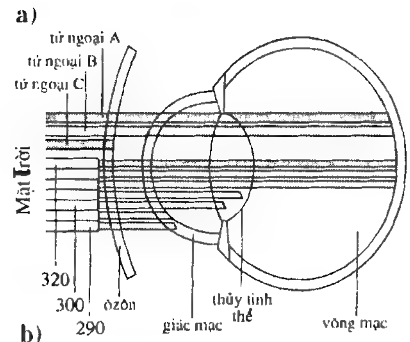
■ Nước hấp thụ bức xạ hồng ngoại mà bước sóng lớn hơn 1400 m.

Cacbon điôxit cũng có một vùng hấp thụ trong miền hồng ngoại.

Tính chất đó cho phép giải thích hiệu ứng nhà kính của khí quyển : các tia Mặt Trời đi qua khí quyển bị mặt đất hấp thụ ; mặt đất nóng lên và phát ra một bức xạ hồng ngoại. Chính bức xạ hồng ngoại này bị hơi nước và cacbon điôxit trong khí quyển hấp thụ, và làm khí quyển nóng lên. Ở một kích thước nhỏ hơn, một nhà kính trong vườn cũng sử dụng nguyên tắc đó, vì thủy tinh hấp thụ bức xạ hồng ngoại có bước sóng lớn hơn 2500 nm.

▶ **Để luyện tập : bài tập 2.**

a)



b)

loại	% ánh sáng truyền qua	sử dụng
0	80% đến 100%	
1	43% đến 80%	
2	18% đến 43%	
3	8% đến 18%	
4	3% đến 8%	

H.10 a. *Sự xuyên qua của bức xạ.*
b. *Các cấp bậc bảo vệ của kính râm theo tiêu chuẩn của Cộng đồng châu Âu.*

2.4.2. Tán sắc dị thường trong một vùng hấp thụ

Trong một vùng hấp thụ, n_1 có thể nhỏ hơn 1, và vận tốc pha $v_\varphi = \frac{\omega}{k_1} = \frac{c}{n_1}$ có thể lớn hơn c. Mặt khác, đạo hàm $\frac{dn_1}{d\omega}$ có thể có giá trị âm. Bằng cách ngoại suy biểu thức của vận tốc nhóm thu được trong trường hợp tán sắc bình thường (§**2.3.2**), ta nhận thấy rằng vận tốc nhóm tương ứng cũng có thể lớn hơn c. Các kết quả đáng ngạc nhiên này khiến ta nói đến sự *tán sắc dị thường*.

Thực ra, trong một vùng hấp thụ, sự tán sắc là rất quan trọng. Một bó sóng bị biến dạng mạnh trong quá trình lan truyền, đến nỗi không còn xác định được biên độ ("đỉnh" của đường bao) của nó nữa.

Ngay cả nếu ta xác định nó bằng $v_g = \frac{d\omega}{dk_1}$ thì vận tốc nhóm cũng không còn có ý nghĩa vật lí đơn giản (và giá trị bằng số của nó có thể lớn hơn c !), và nhất là không ứng với vận tốc truyền năng lượng của bó sóng nữa.

Trong một vùng hấp thụ, một sóng bị yếu đi và sự tán sắc là rất quan trọng. Vận tốc nhóm không còn có ý nghĩa vật lí thực nữa.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ SỰ LAN TRUYỀN TRONG MỘT ĐIỆN MÔI

• Các phương trình MAXWELL chi phối biến thiên của trường điện từ trong một điện môi cách điện và không tích điện, mà ta bỏ qua các tính chất từ, là :

$\mathrm{div}\vec{D} = 0$; $\mathrm{div}\vec{B} = 0$;

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} .$$

• Trong một môi trường tuyến tính, đồng nhất và đẳng hướng (tđđ), trường của một sóng điện từ đơn sắc thỏa mãn phương trình d'ALEMBERT (trong cách kí hiệu phức) :

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{\underline{\varepsilon}_r}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta\underline{\vec{B}} - \frac{\underline{\varepsilon}_r}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{B}}}{\partial t^2} = \vec{0} .$$

Chỉ số quang học $\underline{n}$ của môi trường (tđđ) là nghiệm có phần thực dương của $\underline{n}^2 = \underline{\varepsilon}_r$; $\underline{n}$ là phức tiên nghiệm và phụ thuộc tần số ω của sóng đơn sắc.

■ PHÂN CỰC TRONG CHẾ ĐỘ BIẾN ĐỔI

• Mô hình điện tích liên kết đàn hồi cho phép diễn đạt được sự phụ thuộc của độ cảm điện môi $\underline{\chi}_e$ phức của một điện môi vào tần số ω của chế độ dạng sin mà ta xét ;

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \chi_1(\omega) - j\chi_2(\omega) .$$

• Một môi trường có các miền tần số trong đó độ cảm là thực ($\chi \approx 0$) và biến thiên chậm theo tần số. Các miền này phân cách nhau bởi các vùng hấp thụ trong đó độ cảm phức biến thiên nhanh theo tần số.

■ TÁN SẮC VÀ HẤP THỤ

• Miền trong suốt

Trong một miền tần số mà chỉ số quang học của môi trường là thực, một sóng điện từ lan truyền mà không bị giảm : môi trường là trong suốt đối với sóng đó : khi đó sự tán sắc là tương đối nhỏ.

Trong một vùng trong suốt, vận tốc nhóm của một bó sóng ứng với vận tốc truyền năng lượng gắn với bó sóng đó, nhỏ hơn c.

• Miền hấp thụ

Trong một miền tần số mà hằng số điện môi tỉ đối $\underline{\varepsilon}_r$ của một môi trường là phức (chỉ số $\underline{n}$ cũng là phức) thì môi trường hấp thụ các sóng điện từ đi qua nó.

Trong một vùng hấp thụ, một sóng bị giảm dần và sự tán sắc là rất quan trọng. Vận tốc nhóm không còn có ý nghĩa vật lí thực nữa.

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Sự lan truyền một bó sóng trong thủy tinh

Một loại thủy tinh thông dụng có các chiết suất :

- $n_1 = 1{,}552$ đối với bước sóng lam $\lambda_1 = 486$ nm ;
- $n_2 = 1{,}514$ đối với bước sóng đỏ $\lambda_2 = 656$ nm ;

Trong miền này, thủy tinh là hoàn toàn trong suốt đối với các sóng ánh sáng.

1) Ước lượng bậc độ lớn của đạo hàm $\dfrac{dn}{d\lambda}$.

2) Xuất phát từ hệ số tán sắc giữa số sóng k và tần số ω, $k = n\dfrac{\omega}{c}$, hãy tìm một hệ thức giữa vận tốc nhóm v_g, vận tốc pha v_φ, n và ω, và một hệ thức giữa v_g, v_φ, n và λ.

3) Tính bậc độ lớn của khoảng cách d mà một bó sóng có bước sóng trung bình λ_0 (nằm giữa λ_1 và λ_2) để cho pha của sóng biến thiên từ π đến cực đại của bó sóng (có thể gọi n_0 là chỉ số của thủy tinh đối với bước sóng λ_0).

2 Chiết suất của một môi trường dẫn điện

Một SPCĐS có tần số ω truyền theo phương và chiều của trục (Ox). Trong cách kí hiệu phức, ta viết $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ là điện trường của sóng đó (giả định E_0 là thực) ; số sóng $\underline{k}$ là phức tiên nghiệm : $\underline{k} = k_1 - jk_2$ với k_1 và k_2 là thực và dương.

1) Sóng truyền trong một kim loại. Trong miền tần số thấp kim loại có độ dẫn thực và dương γ_0, không phụ thuộc tần số, có hằng số điện môi ε_0 và hằng số từ thẩm μ_0 như của chân không ($\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\,\text{F.m}^{-1}$). Trong miền tần số ta xét, ta giả định $\varepsilon_0\omega \ll \gamma_0$.

a) Bằng cách so sánh các hệ thức tán sắc thu được đối với một điện môi và một môi trường kim loại, hãy xác định chiết suất phức $\underline{n}$ của kim loại.

b) Đối với một chất dẫn điện tốt, γ_0 vào bậc $10^7\,\text{S.m}^{-1}$. Hãy tìm biểu thức của vận tốc pha và khoảng cách đặc trưng cho sự tắt dần của sóng trong kim loại. Hãy cho các giá trị bằng số đối với $\omega = 10^6\,\text{rad.s}^{-1}$ và $\omega = 10^9\,\text{rad.s}^{-1}$.

2) Sóng truyền trong nước biển đặc trưng trong cùng miền tần số đó bằng độ dẫn điện $\gamma_0 = 4\,\text{S.m}^{-1}$ và hằng số điện môi tỉ đối $\varepsilon_r = 80$.

a) Hãy tìm hệ số tán sắc trong nước biển (chú ý không nhất thiết là $\varepsilon_r\varepsilon_0\omega \ll \gamma_0$).

b) Thừa số nào tạo nên sự giảm dần của sóng trong nước biển ? Tìm biểu thức mật độ công suất khối trung bình mà sóng truyền cho nước biển, tùy theo các dữ kiện và hoành độ x.

c) Khoảng cách đặc trưng cho sự giảm dần của sóng là bao nhiêu ? Hãy tính đối với $\omega = 10^6\,\text{rad.s}^{-1}$ và với $\omega = 10^9\,\text{rad.s}^{-1}$. Thông tin với các tàu ngầm có dễ không ? Nên sử dụng khoảng tần số nào ?

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

3 ★Lade nhiều kiểu dao động

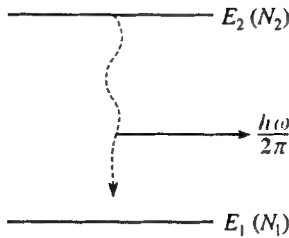
Một phân tử có thể chuyển từ một trạng thái năng lượng E_1 sang một trạng thái năng lượng E_2 bằng cách phóng ra hoặc hấp thụ một phôtôn có tần số $\omega_0 = 2\pi\dfrac{|E_2 - E_1|}{h}$, trong đó h là hằng số PLANCK. Ta xét một môi trường mà các phân tử chủ yếu nằm ở hai trạng thái năng lượng E_1 và E_2 $(E_2 > E_1)$, với N_1 và N_2 phân tử trong mỗi đơn vị thể tích. Có một sóng điện từ phẳng đơn sắc, tần số ω gần với ω_0 truyền qua nó. Cơ học lượng tử dẫn đến biểu thức hằng số điện môi tỉ đối của loại môi trường này là :

$$\underline{\varepsilon_r} = 1 + \frac{q^2}{2m\varepsilon_0\omega_0}(N_1 - N_2)f\frac{1}{\omega_0 - \omega + j\Gamma} = \varepsilon_1 - j\varepsilon_2,$$

trong đó q và m là môđun của điện tích và khối lượng của êlectrôn, f và Γ là hai hằng số dương, với $\Gamma \ll \omega_0$. Ta giả định rằng $|\varepsilon_1 - 1| \ll 1$ và $|\varepsilon_2| \ll 1$.

Cho biết : $\omega_0 = 3.10^{15}\,\text{rad.s}^{-1}$ và $\dfrac{\Gamma}{\omega_0} = 3.10^{-6}$.

1) Chỉ rõ thứ nguyên của f.



2) Dấu của $(N_2 - N_1)$ ở trạng thái cân bằng nhiệt là gì, khi tính đến định luật BOLTZMANN ?

Trong một laze He-Ne, người ta duy trì các "độ cư trú" N_2 và N_1 không đổi với $N_2 > N_1$ (sự đảo ngược độ cư trú). Trong quá trình truyền sóng khi đó điều gì sẽ xảy ra ?

3) Ống laze có một đầu đóng bởi một gương phẳng lí tưởng (hệ số phản xạ năng lượng bằng 1) và đầu kia bởi một gương phẳng có các lớp nhiều điện môi, mà hệ số phản xạ năng lượng bằng $R = 0{,}99$. Khoảng cách giữa hai gương song song và vuông góc với trục truyền sóng (Ox) là $L = 1\,\text{m}$.

a) Nếu trong một cái hốc như thế là chân không thì tần số ω_p của các sóng điện từ có thể cộng hưởng trong cái hốc đó để tạo ra các sóng dừng là bao nhiêu ? Tại sao các sóng đó lại tắt dần ?

b) Khi có mặt một môi trường khuếch đại thì giá trị cực tiểu $(N_2 - N_1)_{\min} = N_0$ cần có để một tần số ω có thể tồn tại không giảm dần là bao nhiêu ?

c) Nếu $(N_2 - N_1) = 2N_0$, hãy chỉ rõ khoảng cách của tất cả các tần số khả dĩ là bao nhiêu (người ta nói rằng có sự va chạm của dao động đối với tất cả khoảng tần số này).

d) Viết phương trình xác định những tần số ω'_p mà cái hốc đã chọn lựa trong khoảng va chạm, tùy theo ω_p và chỉ số khúc xạ n_1 của môi trường. Sau này, ta sẽ xét $n \approx 1$ và do đó $\omega'_p \approx \omega_p$.

Cho biết số lượng các "vạch" khác nhau (tức là các tần số khác nhau) thu được trên khoảng va chạm trong chùm ra ; người ta nói rằng lade hoạt động theo nhiều kiểu.

e) Để đơn giản, ta giả định rằng chùm ra gồm có $(2J+1)$ SPCĐS có cùng biên độ $\vec{E}_0$, truyền trong không khí mà không tắt dần (và không khuếch đại !), có các tần số phân bố đều đặn từ $(\omega_0 - \Gamma)$ đến $(\omega_0 + \Gamma)$, và rằng tất cả các SPCĐS này là đồng pha khi đi ra khỏi cái hốc (tại $x = 0$). Chứng tỏ rằng tín hiệu đi ra là một sự nối tiếp nhau của các xung ánh sáng có tần số trung bình ω_0. Độ lăn dài của các xung đó là bao nhiêu ? Nó có phụ thuộc số lượng các kiểu dao động không ?

4 ★Sự lan truyền trong một môi trường đẳng hướng đặt trong một từ trường tĩnh, hiệu ứng FARADAY

Ta xét một mô hình đơn giản hóa của nguyên tử, trong đó đám mây êlectrôn được biểu diễn một cách tổng thể bằng tâm quán tính G_- của nó, có khối lượng m và điện tích $-q$. Tâm quán tính G_+ của hạt nhân là cố định trong hệ quy chiếu $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ giả định là một hệ GALILÉE. Ta đặt $\vec{r} = \overrightarrow{G_+G_-}$. Ta sẽ khảo sát chuyển động của G_- bằng cách thừa nhận một mặt sự tồn tại của một lực hồi phục có nguồn gốc điện, tác dụng giữa G_+ và G_-, theo kiểu $\vec{F}_1 = -s\vec{r}$, và mặt khác một lực kiểu ma sát nhớt $\vec{F}_2 = -h\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, trong đó s và h là những hằng số dương (mô hình điện tích liên kết đàn hồi). Người ta lại cho hệ này chịu tác dụng của một điện trường dạng sin biểu diễn dưới dạng phức bằng :

$$\underline{\vec{E}} = (\underline{E}_x\vec{e}_x + \underline{E}_y\vec{e}_y + \underline{E}_z\vec{e}_z)e^{j\omega t}$$

và của một từ trường tĩnh $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ với $B_0 > 0$.

1) Thành lập hệ thức ma trận liên kết $\underline{\vec{r}}$ và $\underline{\vec{E}}$ theo kiểu $\underline{\vec{r}} = (\underline{M})(\underline{\vec{E}})$ ở chế độ dạng sin cưỡng bức (và theo cách kí hiệu phức).

2) Môi trường đồng nhất và đẳng hướng chứa N nguyên tử kiểu trên trong mỗi đơn vị thể tích ; vectơ phân cực điện $\vec{P}$ bằng mật độ khối của mômen lưỡng cực, ở đây là : $\vec{P} = -Nq\vec{r}$.

Chứng tỏ rằng vectơ điện dịch $\underline{\vec{D}}$ (theo cách kí hiệu phức) có thể được viết dưới dạng :

$$\underline{\vec{D}} = (\underline{\varepsilon})\underline{\vec{E}} \quad \text{với} \quad (\underline{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_0\varepsilon_r & j\varepsilon_0 b & 0 \\ -j\varepsilon_0 b & \varepsilon_0\varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0\varepsilon_r \end{pmatrix},$$

trong đó ε_0 là hằng số điện môi của chân không.

Để giải câu này, ta thừa nhận rằng :

$$(q\omega B_0)^2 \ll \left|s - m\omega^2 + jh\omega\right|^2.$$

Hãy tìm biểu thức của $\underline{\varepsilon}_r$ và $\underline{b}$.

Trong phần tiếp của bài toán, ta thừa nhận rằng lực làm tắt dần là nhỏ so với các lực khác (tức là ta bỏ qua mọi hiện tượng hấp thụ) và ta sẽ chỉ ra rằng trong

các điều kiện đó thì $\underline{\varepsilon}_r$ và $\underline{b}$ có thể coi như các số thực và ta sẽ chỉ rõ biểu thức của chúng.

3) Trong môi trường nói trên, mà hằng số từ thẩm là μ_0, có một sóng điện từ lan truyền, điện trường của nó là :

$$\underline{\vec{E}} = (\underline{E}_x\vec{e}_x + \underline{E}_y\vec{e}_y)e^{j\omega t} = (\underline{E}_{0x}\vec{e}_x + \underline{E}_{0y}\vec{e}_y)e^{j(\omega t - kz)},$$

trong đó $\underline{E}_{0x}$ và $\underline{E}_{0y}$ là những hằng số có thể là phức và k chỉ một hằng số thực, dương.

a) Với điều kiện nào ta có thể sử dụng hệ thức ma trận liên kết $\underline{\vec{D}}$ và $\underline{\vec{E}}$ trong câu **2**).

b) Chứng tỏ rằng $\underline{E}_{0x}$ và $\underline{E}_{0y}$ nhất thiết nghiệm đúng :

- hoặc $\underline{E}_{0x} = j\underline{E}_{0y}$ với $k = k_g$;
- hoặc $\underline{E}_{0x} = -j\underline{E}_{0y}$ với $k = k_d$.

Tính k_g và k_d.

Đầu mút của vectơ thực $\vec{E}$ vẽ ra hình gì trên một mặt phẳng sóng trong mỗi trường hợp trên ?

b) Điều gì sẽ xảy ra nếu môi trường như vậy được đặt trong một từ trường có cùng độ lớn nhưng ngược dấu ?

4) Ở đầu vào của môi trường như vậy (tại z = 0), người ta đặt một điện trường phân cực thẳng $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\omega t\vec{e}_x$ (trong cách viết thực). Hãy xác định trường thu được sau khi đi qua một đoạn d trong môi trường. Trạng thái phân cực biến đổi thế nào trên quãng đường d ?

BÀI CHỮA

1 1) $\frac{dn}{d\lambda}$ *vào bậc* $\frac{dn}{d\lambda} \approx \frac{n_2 - n_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = -4,7.10^4\,m^{-1}$.

2) *Hệ thức cần tìm đã được thành lập trong giáo trình* (§**2.3.2**) :

$$v_g = \frac{v_\varphi}{1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}}.$$

Biết rằng $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ *kéo theo* $\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{d\lambda}{\lambda}$, *hệ thức trên cũng được viết thành* $v_g = \frac{v_\varphi}{1 - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}}$.

3) *Bó sóng phải mất thời gian* t_d *để đi hết quãng đường d sao cho :*

$$d = v_g t_d = v_\varphi t_d - \frac{\lambda_0}{2n_0},$$

vì một độ lệch pha bằng π *ứng với một nửa chu kì không gian của pha (pha có một chu kì không gian bằng* $\frac{\lambda_0}{n_0}$ *trong một môi trường có chỉ số* n_0 *: sự có mặt của dấu "–" là do* $v_g < v_\varphi$.

Khử t_d, *ta rút ra* $d = -\frac{\frac{\lambda_0}{2n_0}}{1 - \frac{v_\varphi}{v_g}}$, *và khi sử dụng các kết quả của câu* **2**), *ta được :*

$$d = -\frac{1}{2\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)}.$$

Ta tìm được một khoảng cách rất nhỏ, vào cỡ d = 10µm.

2 1) a) *Ở chương 7 (§2.4), đối với các tần số thấp (trong miền này dòng điện dịch là không đáng kể so với dòng điện dẫn, đối với một sóng dạng sin điều đó thể hiện bằng* $\varepsilon_0\omega \ll \gamma_0$ *), ta đã tìm thấy cho một kim loại hệ thức tán sắc* $\underline{k}^2 = -j\gamma_0\mu_0\omega$, *từ đó ta rút ra :*

$$\underline{k} = (1-j)\sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}}.$$

Trong một điện môi có chỉ số $\underline{n}$, *hệ thức tán sắc được viết là* $\underline{k} = \underline{n}\frac{\omega}{c}$. *Đồng nhất hóa hai hệ thức này, ta rút ra "chỉ số"* $\underline{n}$ *của kim loại* $\underline{n} = (1-j)\sqrt{\frac{\gamma_0}{2\varepsilon_0\omega}}$ *có dạng* $\underline{n} = n_1 - jn_2$.

b) *Trong kim loại, điện trường có thể được viết dưới dạng :*

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j\omega\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right)}$$

bằng cách xác định một khoảng cách đặc trưng cho sự giảm dần của sóng :

$$\delta = \frac{1}{n_1}\frac{c}{\omega} = c\sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{\gamma_0\omega}}$$

và một vận tốc pha $v_\varphi = \frac{c}{n_1} = c\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\gamma_0}}$.

ω (rad.s^{-1})	10^6	10^9
$\lambda = 2\pi\frac{c}{\omega}(m)$	1900	1,9
v_φ (m.s^{-1})	400	$12,6.10^3$
δ (µm)	400	12,6

2) a) *Trong nước biển, các phương trình* MAXWELL *và định luật* OHM $\vec{j} = \gamma_0\vec{E}$ *dẫn đến phương trình lan truyền :*

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\gamma_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},$$

từ đó, ta rút ra hệ thức tán sắc :

$$\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma_0\omega + \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2}$$

mà ta có thể viết dưới dạng $\underline{k}^2 = (n_1 - jn_2)^2 \frac{\omega^2}{c^2}$, *với :* $n_1^2 - n_2^2 = \varepsilon_r$

và $2n_1n_2 = \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0\omega}$ *(vì* $\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$ *).*

b) *Người ta nhận thấy rằng sự giảm dần của sóng trong nước biển là do sự có mặt của thừa số* γ_0, *tức là sự có mặt trong nước của các điện tích tự do, ở đây là các iôn.*

Trong áp dụng 3, ta đã tính công suất trung bình tiêu tán trong một điện môi. Ở đây ta đề xuất một phương pháp khác, sử dụng vectơ POYNTING. *Áp dụng 2 đã cho phép tìm được giá trị trung bình của vectơ đó :*

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{n_1}{2\mu_0 c}(\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^*)\vec{e}_x ,$$

tức là, khi đặt $k_2 = n_2\frac{\omega}{c}$, $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{n_1}{2\mu_0 c} E_0^2 e^{-2k_2x}\vec{e}_x$.

Trong một hình trụ có tiết diện S, nằm giữa hai hoành độ x và x + dx, có một công suất trung bình $\langle \Pi(x) \rangle S$ *đi vào và một công suất trung bình* $\langle \Pi(x+dx) \rangle S$. *Vậy trong hình trụ còn lại một công suất trung bình :*

$$\langle \Pi(x) \rangle S - \langle \Pi(x+dx) \rangle S = -\frac{d\langle \Pi(x) \rangle}{dx} dxS$$

$$= 2k_2 \frac{n_1}{2\mu_0 c} E_0^2 e^{-2k_2x} Sdx .$$

Vậy trong mỗi đơn vị thể tích môi trường nhận một công suất trung bình :

$$\langle \mathscr{P} \rangle = 2k_2 \frac{n_1}{2\mu_0 c} E_0^2 e^{-2k_2x} = \varepsilon_0 n_1 n_2 \omega E_0^2 e^{-2k_2x}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\mu_0\gamma_0\omega^2 E_0^2 e^{-2k_2x}$$

(và ta thấy lại được kết quả của áp dụng 4).

c) *Xuất phát từ hai hệ thức xác định* n_1 *và* n_2 *đã thu được ở câu* **2) a)**, *ta có thể khử* n_1 *để thu được một phương trình chứa* n_2 *:*

$$n_2^4 + \varepsilon_r n_2^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0\omega}\right)^2 = 0 ,$$

mà nghiệm dương duy nhất là :

$$n_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-\varepsilon_r + \sqrt{\varepsilon_r^2 + \left(\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0\omega}\right)^2}\right)} .$$

Nếu $\varepsilon_r\varepsilon_0\omega \ll \gamma_0$, *ta có thể xét công thức gần đúng* $n_2 \approx \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\varepsilon_0\omega}}$.

Khoảng cách đặc trưng cho sự giảm dần của sóng trong nước là :

$$\delta' = \frac{1}{k_2} = \frac{1}{n_2}\frac{c}{\omega} .$$

ω (rad.s^{-1})	10^6	10^9
n_2	475 *(công thức gần đúng sử dụng được)*	13,7 *(công thức gần đúng "đúng" sử dụng được)*
δ'(cm)	63	2

Ta nhận thấy rằng sự tắt dần của sóng trong nước biển là rất đáng kể, và nên dùng các sóng tần số "thấp" thì tốt hơn.

3 **1)** *f không có thứ nguyên.*

2) *Khi có cân bằng nhiệt, định luật phân bố* BOLTZMANN *chỉ ra rằng* N_i *tỉ lệ với* $e^{-\frac{E_i}{kT}}$ *và do đó* $N_2 < N_1$.

Khi duy trì $(N_2 - N_1) > 0$ *trong một lade, ta áp đặt một chỉ số phức của môi trường* $\underline{n} = n_1 - jn_2$ *sao cho* n_1 *là dương và* n_2 *là âm (môi trường được gọi là môi trường hoạt động). Biết rằng* $(n_1 - jn_2)^2 = \underline{\varepsilon}_r = \varepsilon_1 - j\varepsilon_2$, n_1 *và* n_2 *xấp xỉ bằng (sử dụng các giả thiết của đề bài :* $|\varepsilon_1 - 1| \ll 1$ *và* $|\varepsilon_2| \ll 1$ *) :*

$$n_1 \approx 1 + \frac{\varepsilon_1}{2} = 1 + \frac{q^2}{4m\varepsilon_0\omega_0}(N_1 - N_2)f\frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2}(>0) ;$$

$$n_2 \approx \frac{\varepsilon_2}{2} = \frac{q^2}{4m\varepsilon_0\omega_0}(N_1 - N_2)f\frac{\Gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2}(<0) .$$

Như vậy, một SPCĐS truyền theo phương và chiều của trục (Ox), tức là :

$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-k_2x} e^{j(\omega t - k_1x)}$ *với* $k_1 = n_1\frac{\omega}{c} > 0$ *và* $k_2 = n_2\frac{\omega}{c} < 0$, *được khuếch đại trong quá trình lan truyền.*

3) a) $\omega_p = p\pi\frac{c}{L}$ *với p nguyên và c là vận tốc ánh sáng trong chân không (xem bài tập giải sẵn 2, chương 5)*

Các sóng này tắt dần, vì một trong các gương không phản xạ hoàn toàn, và cho một phần năng lượng điện từ thoát ra. Thực ra, sự đảo ngược độ cư trú trong cái hốc tạo ra một môi trường "khuếch đại" đối với sóng điện từ, điều đó cho phép bù lại những thất thoát.

b) *Giá trị trung bình của môđun vectơ* POYNTING, *tỉ lệ với* $\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^*$ *có thể được đặt dưới dạng :*

$$\langle \Pi \rangle = \langle \Pi_0 \rangle e^{-2k_2x} .$$

Sau một lần đi và về sóng đã truyền qua một khoảng cách 2L và đã phản xạ một lần trên mỗi gương. Số lượng có sự giảm dần của sóng, nếu :

$$Re^{-2k_2 2L} \geq 1 .$$

Đặt $N_r = -\frac{m\varepsilon_0\Gamma c}{q^2 fL}\ln R$, *ta sẽ có ở giới hạn :*

$$(N_2 - N_1) = N_r\frac{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2}{\Gamma^2}\frac{\omega_0}{\omega} \quad \text{với } N_r > 0 .$$

Hàm $g(\omega)=\dfrac{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2}{\Gamma^2}\dfrac{\omega_0}{\omega}$ có một cực tiểu. Khi ta giả định $\Gamma \ll \omega_0$, ta thu được cực tiểu đó bằng 1 đối với một giá trị của tần số lân cận ω_0. Ta rút ra :

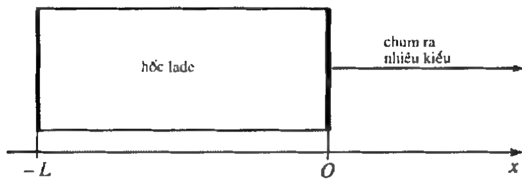
$$N_0=(N_2-N_1)_{\min}=N_r .$$

c) *Đối với* $(N_2-N_1)=2N_0$, *cần có* $g(\omega)\le 2$ *điều đó được thực hiện đối với các tần số nằm giữa* $\omega_1=\omega_0-\Gamma$ *và* $\omega_2=\omega_0+\Gamma$ *(vẫn giả định rằng* $\Gamma \ll \omega_0$*), tức là trong một khoảng tần số* $\Delta\omega=2\Gamma$ *xung quanh* ω_0.

d) *Trong một môi trường có chỉ số khúc xạ* n_1, *điều kiện sóng dừng thu được ở câu* **3) a)** *trở thành* $\omega'_p=p\pi\dfrac{c}{n_1L}$. *Ta nhất định lại tìm thấy* $\omega'_p\approx\omega_p=p\pi\dfrac{c}{L}$ *nếu ta giả định* $n_1\approx 1$. *Các kiểu dao động có thể tồn tại trong khoảng tần số* $\Delta\omega$ *nghiệm đúng :*

$$\omega_0-\Gamma\le\omega_p=p\pi\frac{c}{L}\le\omega_0+\Gamma .$$

Sự áp dụng bằng số chỉ ra rằng 19 giá trị của p thỏa mãn hệ thức trên : chùm lade chứa 19 vạch.



e) *Vấn đề này đã được giải quyết khi giải bài tập 2, chương 7. Ta giả định rằng chỉ số của không khí bằng 1. Trong điều kiện đó, không có tán sắc của sóng ra, vận tốc pha và vận tốc nhóm của "bó sóng" đều bằng c. Ta đặt :* $\delta\omega=\dfrac{\Delta\omega}{2J+1}$, $\omega_p=\omega_0+p\delta\omega$ *và* $k_p=k_0+\dfrac{p\delta\omega}{c}$,

ta được :

$$\vec{E}(x,t)=\sum_{p=-J}^{J}\vec{E}_0\cos(\omega_pt-k_px)$$

$$=\vec{E}_0\left(\frac{\sin\left(\dfrac{\Delta\omega}{2}\left(t-\dfrac{x}{c}\right)\right)}{\sin\left(\dfrac{\delta\omega}{2}\left(t-\dfrac{x}{c}\right)\right)}\right)\cos(\omega_0t-k_0x)$$

*Sóng này đã được trình bày ở bài tập 2, chương 7 (và cũng ở §**3.2.2**, chương 7). Đúng là nó gồm một dãy các tần số có thời khoảng* Δt *và bậc* $\dfrac{1}{\Delta\omega}$ *: thời khoảng này không phụ thuộc số các kiểu.*

4 **1)** *Ta áp dụng định lí tâm quán tính cho đám mây êlectrôn :*

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-q\left(\vec{E}+\frac{d\vec{r}}{dt}\wedge\vec{B}_0\right)-s\vec{r}-h\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Trong chế độ dạng sin cưỡng bức, và trong cách kí hiệu phức, ta tìm một nghiệm có dạng $\underline{\vec{r}}=\underline{\vec{r}}_0e^{j\omega t}$, *do đó :*

$$-m\omega^2\underline{\vec{r}}=-q(\underline{\vec{E}}+j\omega\underline{\vec{r}}\wedge\vec{B}_0)-s\underline{\vec{r}}-j\omega h\underline{\vec{r}}$$

hay là, khi đưa vào các thành phần phức $(\underline{x},\underline{y},\underline{z})$ *của* $\underline{\vec{r}}$:

$$\begin{cases}(s-m\omega^2+jh\omega)\underline{x}+j\omega qB_0\underline{y}=-q\underline{E}_x\\-j\omega qB_0\underline{x}+(s-m\omega^2+jh\omega)\underline{y}=-q\underline{E}_y\\(s-m\omega^2+jh\omega)\underline{z}=-q\underline{E}_z\end{cases}.$$

Ta rút ra :

$$\underline{x}=-\frac{q(s-m\omega^2+j\omega h)}{(s-m\omega^2+j\omega h)^2-q^2\omega^2B_0^2}\underline{E}_x+\frac{j\omega q^2B_0}{(s-m\omega^2+j\omega h)^2-q^2\omega^2B_0^2}\underline{E}_y$$

$$\underline{y}=-\frac{j\omega q^2B_0}{(s-m\omega^2+j\omega h)^2-q^2\omega^2B_0^2}\underline{E}_x-\frac{q(s-m\omega^2+j\omega h)}{(s-m\omega^2+j\omega h)^2-q^2\omega^2B_0^2}\underline{E}_y$$

$$\underline{z}=-\frac{q}{s-m\omega^2+j\omega h}\underline{E}_z .$$

Như vậy, ta kiểm tra được rằng $\underline{\vec{r}}$ *và* $\underline{\vec{E}}$ *quả thực được liên kết bởi một hệ thức ma trận kiểu :*

$$\underline{\vec{r}}=(\underline{M})\underline{\vec{E}} .$$

2) *Với giả định rằng* $(q\omega B_0)^2\ll\left|s-m\omega^2+jh\omega\right|^2$, *ta có thể giản ước các biểu thức trên :*

$$\underline{x}=-\frac{q}{s-m\omega^2+j\omega h}\underline{E}_x+\frac{j\omega q^2B_0}{(s-m\omega^2+j\omega h)^2}\underline{E}_y$$

$$\underline{y}=-\frac{j\omega q^2B_0}{(s-m\omega^2+j\omega h)^2}\underline{E}_x-\frac{q}{s-m\omega^2+j\omega h}\underline{E}_y$$

$$\underline{z}=-\frac{q}{s-m\omega^2+j\omega h}\underline{E}_z .$$

Quả vậy, vectơ điện dịch $\underline{\vec{D}}$ *(trong cách kí hiệu phức) :*

$$\underline{\vec{D}}=\varepsilon_0\underline{\vec{E}}+\underline{\vec{P}}=\varepsilon_0\underline{\vec{E}}-Nq\underline{\vec{r}} ,$$

có thể được viết dưới dạng :

$$\underline{\vec{D}}=(\underline{\varepsilon})\underline{\vec{E}}=\begin{pmatrix}\varepsilon_0\varepsilon_r & j\varepsilon_0b & 0\\-j\varepsilon_0b & \varepsilon_0\varepsilon_r & 0\\0 & 0 & \varepsilon_0\varepsilon_r\end{pmatrix}\underline{\vec{E}}$$

với $\underline{\varepsilon}_r=1+\dfrac{Nq^2}{\varepsilon_0(s-m\omega^2+j\omega h)}$ *và* $\underline{b}=\dfrac{N\omega q^3B_0}{\varepsilon_0(s-m\omega^2+j\omega h)^2}$.

Khi thừa số tắt dần là không đáng kể ($h\approx 0$)*, ta thấy rằng* $\underline{\varepsilon}_r$ *và* $\underline{b}$ *là thực :*

$$\underline{\varepsilon}_r=\varepsilon_r=1+\frac{Nq^2}{\varepsilon_0(s-m\omega^2)}\text{ và }\underline{b}=b=\frac{N\omega q^3B_0}{\varepsilon_0(s-m\omega^2)^2} .$$

3) a) *Muốn sử dụng được hệ thức giữa $\underline{\vec{D}}$ và $\underline{\vec{E}}$ đã thu được trước đây, phải bỏ qua ảnh hưởng của lực từ mà trường $\vec{B}$ của sóng tác dụng lên đám mây êlectrôn của các nguyên tử, tức là phải giả định rằng :*

$$\|\vec{E}\| \ll \left\|\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B}\right\|.$$

Sự gần đúng này là hoàn toàn có cơ sở : bạn đọc có thể kiểm tra điều đó bằng cách tính từ trường $\underline{\vec{B}}$ vào cuối bài tập và đừng quên rằng vận tốc $\frac{d\vec{r}}{dt}$ của đám mây êlectrôn là rất nhỏ so với vận tốc c của ánh sáng trong chân không.

b) Từ các phương trình MAXWELL, ta rút ra phương trình lan truyền bằng cách tính :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu_0\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2},$$

do đó, theo cách kí hiệu phức :

$$\Delta\underline{\vec{E}} = \mu_0\frac{\partial^2\underline{\vec{D}}}{\partial t^2} = \mu_0(\underline{\varepsilon})\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$$

(vì ở đây, với trường coi là ngang, $\text{div}\vec{D} = \vec{0}$ dẫn đến $\text{div}\vec{E} = \vec{0}$).

Đưa trường $\underline{\vec{E}} = (\underline{E}_{0x}\vec{e}_x + \underline{E}_{0y}\vec{e}_y)e^{j(\omega t - kz)}$ vào phương trình lan truyền, ta được ;

$$\begin{cases}\left(k^2 - \varepsilon_r\frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{E}_{0x} - jb\frac{\omega^2}{c^2}\underline{E}_{0y} = 0\\ jb\frac{\omega^2}{c^2}\underline{E}_{0x} + \left(k^2 - \varepsilon_r\frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{E}_{0y} = 0\end{cases}$$

Hệ phương trình có hai nghiệm $\underline{E}_{0x}$ và $\underline{E}_{0y}$ khác không nếu định thức của nó bằng không, do đó :

$$k^2 - \varepsilon_r\frac{\omega^2}{c^2} = \pm b\frac{\omega^2}{c^2}.$$

Chọn dấu "+" thì phải có $\underline{E}_{0x} = j\underline{E}_{0y}$, tức là :

$$k = k_g = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r + b} \quad \text{với } \varepsilon_r > |b|.$$

Chọn dấu "−" thì phải có $\underline{E}_{0x} = -j\underline{E}_{0y}$, tức là :

$$k = k_d = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r - b}.$$

Trở lại cách kí hiệu thực (và giả định $\underline{E}_{0x} = E_{0x}$ thực), ta viết được điện trường :

- *trong trường hợp dấu "+" :*

$$\vec{E}\begin{cases}E_x = E_{0x}\cos(\omega t - k_g z)\\ E_y = E_{0x}\sin(\omega t - k_g z)\end{cases}$$

Trường được phân cực tròn trái ;

- *trong trường hợp dấu "−" :*

$$\vec{E}\begin{cases}E_x = E_{0x}\cos(\omega t - k_d z)\\ E_y = -E_{0x}\sin(\omega t - k_d z)\end{cases}$$

Trường được phân cực tròn phải.

c) *Nếu $\vec{B}$ đổi chiều thì b đổi dấu.*

4) *Ta có thể phân tích điện trường thành tổng của hai điện trường phân cực tròn và ngược chiều nhau :*

$$\vec{E}(0,t) = E_0\cos\omega t\vec{e}_x = \vec{E}_g(0,t)\begin{cases}\frac{E_0}{2}\cos\omega t\\ \frac{E_0}{2}\sin\omega t\\ 0\end{cases} + \vec{E}_d(0,t)\begin{cases}\frac{E_0}{2}\cos\omega t\\ -\frac{E_0}{2}\sin\omega t\\ 0\end{cases}$$

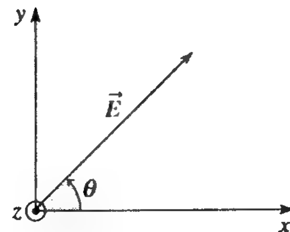
Sau một khoảng cách d, trường trở thành :

$$\vec{E}(d,t) = \vec{E}_g(d,t)\begin{cases}\frac{E_0}{2}\cos(\omega t - k_g d)\\ \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - k_g d)\\ 0\end{cases} + \vec{E}_d(d,t)\begin{cases}\frac{E_0}{2}\cos(\omega t - k_d d)\\ -\frac{E_0}{2}\sin(\omega t - k_d d),\\ 0\end{cases}$$

$$\text{tức là } \vec{E}(d,t)\begin{cases}E_x = E_0\cos\left(\frac{k_g - k_d}{2}\right)d\cos\left(\omega t - \frac{k_g + k_d}{2}d\right)\\ E_y = -E_0\sin\left(\frac{k_g - k_d}{2}\right)d\cos\left(\omega t - \frac{k_g + k_d}{2}d\right).\\ E_z = 0\end{cases}$$

Ta thấy rằng điện trường có sự phân cực thẳng, phương của nó trong mặt phẳng sóng tạo với trục (Ox) một góc θ xác định bởi :

$$tg\theta = \frac{E_y}{E_x} = -tg\left(\frac{k_g - k_d}{2}\right)d.$$



Trong khi lan truyền, điện trường giữ nguyên sự phân cực thẳng, phương của nó quay quanh trục (Oz), góc quay θ tỉ lệ với khoảng cách mà sóng đã truyền qua.

PHẢN XẠ VÀ KHÚC XẠ CỦA SÓNG ĐIỆN TỪ

9

Mở đầu

Các phương trình MAXWELL chi phối sự biến thiên và sự lan truyền của trường điện từ. Bằng cách sử dụng chúng để biểu đạt các điều kiện biên ở giao diện của hai môi trường, chúng ta sẽ nghiên cứu sự phản xạ và sự truyền qua của các sóng đó trên giao diện này.

Cách tiếp cận theo phương pháp sóng sẽ cho phép ta thấy lại những định luật mà ta đã gặp trong giáo trình quang hình học (xem H–Prépa, Quang học, lớp đệ nhất) : các định luật SNELL–DESCARTES.

Như vậy, ta có thể thấy rằng các phương trình MAXWELL cho phép tìm lại được tất cả các định luật của quang hình học (và hơn nữa, của toàn bộ quang học).

Hơn nữa, chúng ta sẽ biểu thị những tỉ lệ của sóng phản xạ và sóng truyền qua, như là hàm của sóng tới.

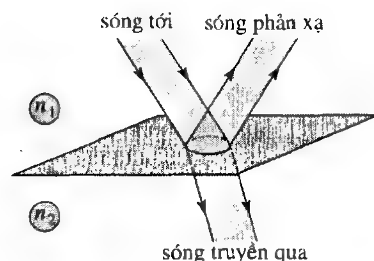
MỤC TIÊU

- Các định luật DESCARTES.
- Các hệ số phản xạ và truyền qua trong trường hợp sự tới vuông góc.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Các phương trình MAXWELL trong môi trường vật chất.
- Sự lan truyền các sóng điện từ trong điện môi.

1 Các định luật phản xạ và khúc xạ



H.1. *Phản xạ và khúc xạ của một sóng trên một lưỡng chất.*

1.1. Mô tả vấn đề

Xét hai điện môi ① và ②, tuyến tính, đồng nhất, đẳng hướng, có tính chất từ gần với tính chất của chân không (độ từ thẩm μ_0), có các chỉ số n_1 và n_2, và phân cách nhau bởi một mặt phẳng (ở giới hạn, là mặt phẳng cục bộ ở cỡ độ lớn của bước sóng) đứng yên. Trong quang hình học, mặt đó thường được gọi là *lưỡng chất*. Ở đây ta sẽ đứng ở các vùng trong suốt ; các chỉ số n_1 và n_2 là thực.

Trong các bài tập (*xem bài tập* 5 và 6), chúng ta sẽ đề cập các chỉ số phức.

Một SPCĐS tới, có tần số ω, lan truyền trong môi trường ①. Khi đi tới mặt phân cách (phẳng) giữa hai môi trường, thí nghiệm chứng tỏ rằng sóng đó nói chung làm phát sinh một sóng phản xạ và một sóng truyền qua (*h*.1) mà ta có thể giả định là sóng phẳng, chạy và đơn sắc, có cùng tần số ω với sóng tới. Giả định cuối này không được làm chúng ta ngạc nhiên : sóng phản xạ và sóng truyền qua được sinh ra bởi sóng tới có tần số ω, và bởi các sóng do tất cả các lưỡng cực dao động bức xạ ra. Các lưỡng cực đó là các nguyên tử hoặc phân tử của các môi trường tuyến tính ① và ② đã được kích thích ở tần số ω của sóng tới (*xem chương* 6).

Các trường điện từ của các sóng này tuân theo các phương trình MAXWELL trong các môi trường tương ứng của chúng và tuân theo các điều kiện biên trên giao diện phân cách hai môi trường.

1.2. Phương trình MAXWELL và điều kiện biên

Các môi trường không chứa điện tích và dòng điện (các nguồn của trường điện từ được giả định là ở rất xa), nên ta viết được các phương trình MAXWELL cho mọi điểm của không gian (trừ ở liền kề mặt phân cách ; ở đó $n_i = n_1$ ở môi trường ① và $n_i = n_2$ ở môi trường ②) :

$$\left|\begin{array}{l} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}\,\vec{D} = \vec{0} \qquad\qquad \text{với } \vec{D} = \varepsilon_0 n_i^2 \vec{E}. \\ \text{div}\,\vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \dfrac{n_i^2}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}\right.$$

Trên mặt phân cách giữa hai môi trường không có điện tích và dòng điện, ta có :

- sự liên tục của thành phần tiếp tuyến của trường $\vec{E}$;
- sự liên tục của thành phần pháp tuyến của vectơ điện dịch $\vec{D}$;
- sự liên tục của trường $\vec{B}$ (nhắc lại rằng ta đã giả định rằng $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$).

1.3. Sóng tới, sóng phản xạ và sóng khúc xạ (hay sóng truyền qua)



H.2. *René Descartes* (1596 - 1650).

SPCĐS tới truyền theo phương vectơ đơn vị $\vec{u}_1$ trong môi trường ①. Trường điện từ của sóng đó được viết là :

$$\underline{\vec{E}}_1 = \underline{\vec{E}}_{01}e^{j(\omega t - \vec{k}_1.\vec{r})} \quad \text{và} \quad \underline{\vec{B}}_1 = n_1\frac{\vec{u}_1 \wedge \underline{\vec{E}}_1}{c} \quad \text{với} \quad \vec{k}_1 = n_1\frac{\omega}{c}\vec{u}_1.$$

SPCĐS phản xạ trong môi trường ① truyền theo phương vectơ đơn vị $\vec{u}'_1$:

$$\underline{\vec{E}}'_1 = \underline{\vec{E}}'_{01}e^{j(\omega t - \vec{k}'_1.\vec{r})} \quad \text{và} \quad \underline{\vec{B}}'_1 = n_1\frac{\vec{u}'_1 \wedge \underline{\vec{E}}'_1}{c} \quad \text{với} \quad \vec{k}'_1 = n_1\frac{\omega}{c}\vec{u}'_1.$$

SPCĐS truyền qua trong môi trường ② truyền theo phương vectơ đơn vị $\vec{u}_2$:

$$\underline{\vec{E}}_2 = \underline{\vec{E}}_{02}e^{j(\omega t - \vec{k}_2.\vec{r})} \quad \text{và} \quad \underline{\vec{B}}_2 = n_2\frac{\vec{u}_2 \wedge \underline{\vec{E}}_2}{c} \quad \text{với} \quad \vec{k}_2 = n_2\frac{\omega}{c}\vec{u}_2.$$

Do "cấu trúc", ba sóng này thỏa mãn các phương trình MAXWELL trong các môi trường tương ứng của chúng. Còn phải kiểm tra rằng các điều kiện biên tại giao diện phân cách hai môi trường được thỏa mãn.

Nếu đúng là như vậy, các sóng này nghiệm đúng tất cả các điều kiện của bài toán đặt ra, và tất yếu tạo thành nghiệm (duy nhất) của nó.

1.4. Các định luật DESCARTES

Các định luật DESCARTES (*h*.2) đã được phát biểu trong giáo trình quang hình học (*xem H–Prépa, Quang học, lớp đệ nhất*). Sự chứng minh chúng không nằm tường minh trong chương trình, nhưng vì đã hội đủ mọi yếu tố để làm việc đó, chúng tôi cho rằng trình bày nó trong sách này như một đoạn "mở đầu" là một việc bổ ích. Vectơ sóng $\vec{k}$ của sóng tới và vectơ đơn vị $\vec{N}$ vuông góc với mặt phẳng phân cách hai môi trường xác định mặt phẳng tới (*h*.3).

Ta hãy thể hiện một trong những điều kiện biên, thí dụ sự liên tục của thành phần tiếp tuyến $\vec{E}_T$ của $\vec{E}$ (hoặc thành phần pháp tuyến D_N của D, hoặc thành phần tiếp tuyến B_T, hoặc pháp tuyến B_N của B) tại mọi điểm $M_0(\vec{r}_0 = \vec{OM}_0)$ của mặt phân cách và vào mọi lúc, ta có :

$$\underline{\vec{E}}_{01T}e^{j(\omega t - \vec{k}_1.\vec{r}_0)} + \underline{\vec{E}}'_{01T}e^{j(\omega t - \vec{k}'_1.\vec{r}_0)} = \underline{\vec{E}}_{02T}e^{j(\omega t - \vec{k}_2.\vec{r}_0)}.$$

Như vậy ta cũng kiểm tra rằng sóng phản xạ và sóng truyền qua có cùng tần số với sóng tới (điều này ta đã giả định một cách tiên nghiệm).

Ta đặt hệ thức trên dưới dạng sau đây :

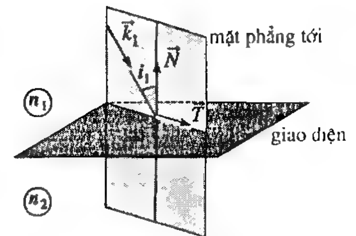
$$\underline{\vec{E}}_{01T} + \underline{\vec{E}}'_{01T}e^{j(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1).\vec{r}_0} = \underline{\vec{E}}_{02T}e^{j(\vec{k}_1 - \vec{k}_2).\vec{r}_0}.$$

Chọn gốc O trên mặt phân cách (khi đó vectơ $\vec{r}_0$ là một vectơ bất kì của mặt phẳng đó), ta có thể khẳng định rằng hệ thức này được nghiệm đúng nếu các hiệu số pha $(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1).\vec{r}_0$ và $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2).\vec{r}_0$ không phụ thuộc $\vec{r}_0$. Điều đó được thực hiện nếu :

$$(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1).\vec{r}_0 = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2).\vec{r}_0 = 0.$$

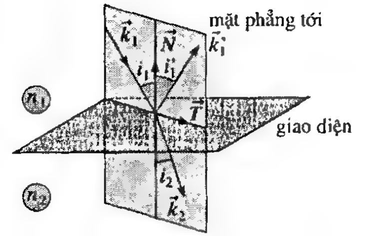
Như vậy các vectơ $(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1)$ và $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$ phải là cộng tuyến với $\vec{N}$, do đó :

$$\vec{k}'_1 = \vec{k}_1 + \alpha\vec{N} \text{ và } \vec{k}_2 = \vec{k}_1 + \beta\vec{N} \text{ với } \alpha \text{ và } \beta \text{ là hằng số thực.}$$



H.3. *Làm rõ mặt phẳng tới* $(\vec{k}_1, \vec{N})$.

Các vectơ sóng $\vec{k}_1'$ và $\vec{k}_2$ của các sóng phản xạ và khúc xạ nằm trong mặt phẳng tới xác định bởi các vectơ $\vec{k}_1$ (vectơ sóng của sóng tới) và $\vec{N}$ (pháp tuyến địa phương của lưỡng chất).



H.4. *Tia phản xạ và tia khúc xạ nằm trong mặt phẳng tới* $(\vec{k}_1, \vec{N})$.

Khi phân tích mỗi vectơ sóng thành một vectơ $\vec{k}_T$ tiếp tuyến với mặt phân cách và một vectơ $\vec{k}_N$ pháp tuyến với mặt phẳng đó, các hệ thức trên dẫn đến (*h*.4 và 5) $\vec{k}_{1T} = \vec{k}_{1T}' = \vec{k}_{2T}$.

Các thành phần tiếp tuyến $\vec{k}_{1T}$, $\vec{k}_{1T}'$ và $\vec{k}_{2T}$ của các vectơ sóng của các sóng tới, phản xạ và khúc xạ là bằng nhau :

$$\vec{k}_{1T} = \vec{k}_{1T}' = \vec{k}_{2T}.$$

Trong quang hình học, tia sáng được đồng nhất với phương của vectơ sóng của sóng tương ứng. Ta có thể phát biểu (*h*.4) định luật DESCARTES thứ nhất :

Tia phản xạ và tia khúc xạ nằm trong mặt phẳng tới.

Đưa vào vectơ đơn vị $\vec{T}$ tiếp tuyến với mặt phân cách và nằm trong mặt phẳng tới, ta cũng có thể viết được các điều kiện đối với các vectơ sóng phản xạ $\vec{k}_1'$ và khúc xạ $\vec{k}_2$ dưới dạng :

$$\vec{k}_1'.\vec{T} = \vec{k}_2.\vec{T} = \vec{k}_1.\vec{T}, \quad \text{tức là} \quad \vec{k}_{1T}'.\vec{T} = \vec{k}_{2T}.\vec{T} = \vec{k}_{1T}.\vec{T}.$$

Bây giờ, sử dụng các hệ thức tán sắc trong các môi trường ① và ②, tức là :

$$k_1 = k_1' = n_1\frac{\omega}{c} \quad \text{và} \quad k_2 = n_2\frac{\omega}{c},$$

ta có thể phát biểu định luật DESCARTES thứ hai.

Góc phản xạ và góc tới bằng nhau : $i_1' = i_1$.

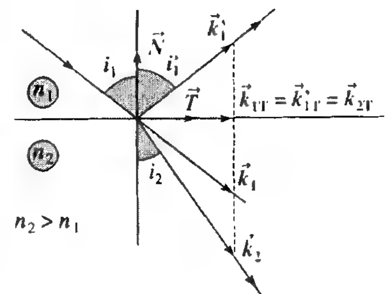
Góc khúc xạ và góc tới nghiệm đúng :

$$n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1.$$

Chú ý rằng tia phản xạ là đối xứng của tia tới đối với pháp tuyến của lưỡng cực.

1.5. Trường hợp phản xạ toàn phần

Khi môi trường ② chiết quang hơn môi trường ①, tức là khi $n_2 > n_1$, hệ thức $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin i_1$ cho phép tính góc i_2, và sóng truyền qua, mà ta đã giả định là phẳng, chạy, luôn luôn tồn tại ở môi trường ②.



H.5. *Có sự liên tục của các thành phần tiếp tuyến $\vec{k}_T$ của ba vectơ sóng $\vec{k}_1$, $\vec{k}_1'$ và $\vec{k}_2$.*

Ngược lại, khi môi trường ② chiết quang kém môi trường ①, tức là nếu $n_2 < n_1$, có một góc tới giới hạn i_{1L} mà vượt qua nó ta không xác định được góc i_2 nữa. Góc i_{1L} nghiệm đúng :

$$\sin i_{1L} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Nếu $i_1 < i_{1L}$, có một sóng phẳng chạy truyền qua ở môi trường ②.

Nếu $i_1 > i_{1L}$, thực nghiệm chứng tỏ rằng có sự phản xạ toàn phần. Tuy nhiên điều đó không có nghĩa là không có sóng trong môi trường ② (*xem áp dụng* 1).

Trong trường hợp $n_2 < n_1$, có sự phản xạ toàn phần nếu $i_1 > i_{1L}$, trong đó i_{1L} được xác định bởi :

$$\sin i_{1L} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Áp dụng 1

Sóng tắt

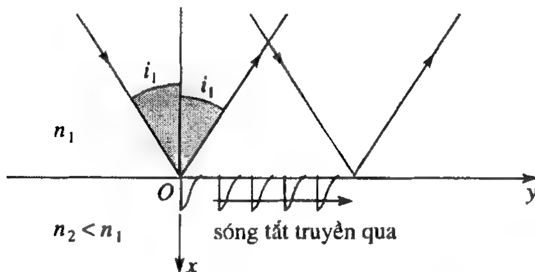
Mặt phân cách giữa các môi trường ① và ② trùng với mặt phẳng $x = 0$ và ta giả định rằng $n_1 > n_2$. Sóng tới lan truyền trong môi trường ① với một góc tới i_1 lớn hơn i_{1L} (h.6).

$$\underline{\vec{E}}_1 = \underline{\vec{E}}_{01} e^{j(\omega t - \vec{k}_1.\vec{r})}$$

$$\text{với} \quad \vec{k}_1 \begin{vmatrix} k_{1x} = n_1 \dfrac{\omega}{c} \cos i_1 \\ k_{1y} = n_1 \dfrac{\omega}{c} \sin i_1 \\ k_{1z} = 0 \end{vmatrix}.$$

Chứng tỏ rằng muốn thỏa mãn các điều kiện biên trên giao diện, sóng truyền qua trong môi trường ② phải có một vectơ sóng phức. Hãy nêu đặc trưng của sóng truyền qua đó.

Ứng dụng bằng số, lấy $n_1 = 1{,}5$ (thủy tinh), $n_2 = 1$ (không khí), $i_1 = 60^\circ$, bước sóng $\lambda = 632$ mm.



◀ **H.6.** *Sóng tắt truyền qua trong trường hợp phản xạ toàn phần.*

Ta viết trường truyền qua dưới dạng :

$$\underline{\vec{E}}_2 = \underline{\vec{E}}_{02} e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}}_2.\vec{r})} \quad \text{với} \quad \underline{\vec{k}}_2 \begin{vmatrix} \underline{k}_{2x} \\ \underline{k}_{2y} \\ \underline{k}_{2z} \end{vmatrix}.$$

Điều kiện $\vec{k}_1.\vec{T} = \vec{k}_2.\vec{T}$ vẫn luôn luôn có giá trị.

Với $\vec{T} = \vec{e}_y$ ở đây, nó khiến ta phải lấy :

$$\underline{k}_{2y} = k_{2y} = k_{1y} = n_1 \frac{\omega}{c} \sin i_1$$

$$\text{và} \quad \underline{k}_{2z} = k_{1z} = 0.$$

Biết rằng :

$$\underline{k}_2^2 = \underline{k}_{2x}^2 + k_{2y}^2 = \left(n_2 \frac{\omega}{2}\right)^2,$$

ta rút ra :

$$\underline{k}_{2x}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1)$$

và, vì rằng $i_1 > i_{1L}$:

$$\underline{k}_{2x} = \pm j\frac{\omega}{c}\sqrt{n_1^2 \sin^2 i_1 - n_2^2} = \pm jk'_{2x}$$

(lấy $k'_{2x} > 0$).

Ta bỏ dấu +, ứng với một điện trường sẽ bị phân kì trong môi trường ②. Cuối cùng điện trường truyền qua được viết thành :

$$\underline{\vec{E}}_2 = \underline{\vec{E}}_{02} e^{-k'_{2x}x} e^{j(\omega t - k_{1y}y)},$$

tức là, trong cách kí hiệu thực :

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{20} e^{-k'_{2x}x} \cos(\omega t - k_{1y}y)$$

với giả định rằng $\underline{\vec{E}}_{02}$ là thực thì $\underline{\vec{E}}_{02} = \vec{E}_{20}$ (trường hợp phân cực thẳng).

Đó là một sóng tắt :

• truyền dọc theo mặt phân cách, theo phương (Oy) với vận tốc pha :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_{1y}} = \frac{c}{n_1 \sin i_1};$$

• có biên độ giảm khi x tăng.

Ta có thể đặc trưng cho độ xuyên sâu trong môi trường ② bằng độ dài :

$$x_0 = \frac{1}{k'_{2x}} = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{n_1^2 \sin^2 i_1 - n_2^2}} = 121 \text{ nm}$$

nó là hết sức nhỏ.

Bài tập 2 bổ sung cho việc khảo sát sự phản xạ toàn phần này bằng cách chỉ ra rằng tất cả công suất tới thực sự bị lưỡng chất phản xạ.

1.6. Khái quát hóa

Sự khảo sát ta vừa thực hiện (phản xạ và khúc xạ của một sóng điện từ ở giao diện phân cách hai điện môi có chỉ số khác nhau) có thể được khái quát hóa cho trường hợp một giao diện phân cách một điện môi ① có chỉ số thực (vùng trong suốt) và một môi trường dẫn điện ②. Quả vậy, ta đã thấy rằng một môi trường dẫn điện có thể được coi như một điện môi (một cách thuần túy hình thức) bằng cách đưa vào một hằng số điện môi tỉ đối hay một chiết suất tương đương, nói chung là phức (xem *áp dụng* 1 hoặc *bài tập* 2, *chương* 8). Ngoài ra, không có điện tích mặt cũng như dòng điện mặt ở bề mặt một vật dẫn có độ dẫn điện hữu hạn. Như vậy, ta có thể khẳng định rằng :

• sóng phản xạ trong môi trường ① bao giờ cũng nghiệm đúng các định luật DESCARTES ;

• sự khảo sát sóng truyền qua là khá tinh tế, vì vectơ sóng $\underline{\vec{k}}_2$ của nó nói chung là phức.

Cách khảo sát này cũng có thể được khái quát hóa cho các loại sóng khác (nói riêng là sóng âm) đi qua hai môi trường khác nhau.

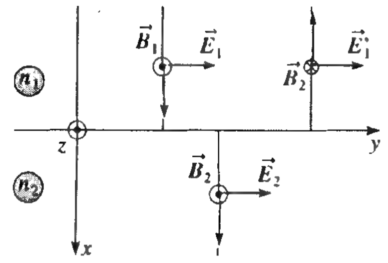
▶ **Để luyện tập : bài tập 5 và 6.**

2 Hệ số phản xạ và hệ số truyền qua khi tia tới vuông góc

Xác định biên độ của trường phản xạ và trường truyền qua, theo biên độ của trường tới, trong trường hợp riêng của sự tới vuông góc :

$i_1 = 0$, vậy theo các định luật DESCARTES thì $i'_1 = i_2 = 0$.

2.1. Hệ số phản xạ và hệ số truyền qua về mặt biên độ



H.7. *Trường hợp sự tới vuông góc : $i_1 = i_1' = i_2 = 0$ (ta đã giả định các sóng được phân cực thẳng).*

Lấy lại trường hợp hai điện môi có chỉ số n_1 và n_2, phân cách bởi mặt phẳng có phương trình $x = 0$ (*h*.7), các trường điện từ được viết thành :

• đối với sóng tới trong môi trường ① :

$$\underline{\vec{E}}_1 = \underline{\vec{E}}_{01} e^{j(\omega t - k_1 x)} \quad \text{và} \quad \underline{\vec{B}}_1 = \frac{n_1}{c} \vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}}_{01} e^{j(\omega t - k_1 x)} \left(k_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \right);$$

• đối với sóng phản xạ trong môi trường ① :

$$\underline{\vec{E}}_1' = \underline{\vec{E}}_{01}' e^{j(\omega t + k_1 x)} \quad \text{và} \quad \underline{\vec{B}}_1' = \frac{n_1}{c} \vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}}_{01}' e^{j(\omega t + k_1 x)};$$

• đối với sóng truyền qua trong môi trường ② :

$$\underline{\vec{E}}_2 = \underline{\vec{E}}_{02} e^{j(\omega t - k_2 x)} \vec{e}_y \quad \text{và} \quad \underline{\vec{B}}_2 = \frac{n_2}{c} \vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}}_{02} e^{j(\omega t - k_2 x)} \left(k_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \right).$$

Đối với mặt phân cách $x = 0$ thì các trường là trường tiếp tuyến ; sự liên tục của $\vec{E}$ và $\vec{B}$ tại $x = 0$ dẫn đến :

• $\underline{\vec{E}}_{01} + \underline{\vec{E}}_{01}' = \underline{\vec{E}}_{02}$;

• $n_1 \vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}}_{01} - n_1 \vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}}_{01}' = n_2 \vec{e}_x - \underline{\vec{E}}_{02}$;

nhân vectơ mỗi vế với $\vec{e}_x$ và giản ước :

$$n_1 \underline{\vec{E}}_{01} - n_1 \underline{\vec{E}}_{01}' = n_2 \underline{\vec{E}}_{02}.$$

Ta rút ra hệ số phản xạ $r_{12(E)}$ và hệ số truyền qua $\tau_{12(E)}$ về biên độ, lần lượt xác định bởi :

• $\underline{\vec{E}}_{01}' = r_{12(E)} \underline{\vec{E}}_{01}$, do đó $r_{12(E)} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$;

• $\underline{\vec{E}}_{02} = \tau_{12(E)} \underline{\vec{E}}_{01}$, do đó $\tau_{12(E)} = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2}$.

Trong trường hợp các môi trường trong suốt, các chỉ số n_1 và n_2 là thực và các hệ số $r_{12(E)}$ và $\tau_{12(E)}$ cũng là thực ; ta nhận thấy rằng :

• $\tau_{12(E)}$ luôn luôn dương : không có đổi pha trong sự truyền qua ;

• $r_{12(E)}$ có thể là dương hoặc âm :

– nếu $n_1 > n_2$, sự phản xạ không làm lệch pha ;

- nếu $n_1 < n_2$, sự phản xạ làm đổi dấu, nghĩa là một sự lệch pha bằng π (vì $e^{i\pi} = -1$).

<u>*Nhận xét :*</u>

• *Sóng phản xạ và sóng truyền qua giữ nguyên sự phân cực của sóng tới. Như vậy, nếu sóng tới phân cực thẳng thì sóng phản xạ và sóng truyền qua cũng phân cực thẳng như thế (trên hình 7, các điện trường bị phân cực thẳng theo phương trục (Oy)).*

• *Các hệ số $r_{12(E)}$ và $\tau_{12(E)}$ đã được xác định cho điện trường. Người ta ít khi sử dụng các hệ số đối với từ trường :*

$$r_{12(B)} = -r_{12(E)} \quad \textit{và} \quad \tau_{12(B)} = \frac{n_2}{n_1} \tau_{12(E)}.$$

• *Các kết quả ta tìm thấy là tương tự một cách hình thức với các hệ số phản xạ và truyền qua về mặt biên độ của một sóng âm khi nó đi qua một giao diện giữa hai chất lưu :*

$$r_{12(v)} = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \quad \text{và} \quad \tau_{12(v)} = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \text{ đối với vận tốc } v;$$

$$r_{12(p)} = -\rho_{12(v)} \text{ và } \tau_{12(p)} = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}\tau_{12(v)} \text{ đối với áp suất âm dư, trong đó}$$

$\rho c = n$ *tựa như tạo thành chiết suất của chất lưu đối với sóng âm.*

Khi tia tới vuông góc, các hệ số phản xạ và truyền qua về mặt biên độ là :

$$r_{12(E)} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \text{ và } \tau_{12(E)} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}.$$

2.2. Hệ số phản xạ và hệ số truyền qua về mặt công suất

Ta biết rằng trong một môi trường có chiết suất n (thực) giá trị trung bình trong thời gian của vectơ POYNTING (thực) gắn với một SPCĐS truyền theo phương của vectơ đơn vị $\vec{u}$ được viết là :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0}\right) = \frac{n}{2\mu_0 c}\left(\vec{E}_0 . \vec{E}_0^*\right)\vec{u}.$$

Nó dẫn đến :

• đối với sóng tới : $\langle \vec{\Pi}_1 \rangle = \dfrac{n_1}{2\mu_0 c}\left(\vec{E}_{01} . \vec{E}_{01}^*\right)\vec{e}_x = \langle \Pi_1 \rangle \vec{e}_x$;

• đối với sóng phản xạ : $\langle \vec{\Pi}'_1 \rangle = -\dfrac{n_1}{2\mu_0 c}\left(\vec{E}'_{01} . \vec{E}'^*_{01}\right)\vec{e}_x = \langle \Pi'_1 \rangle \vec{e}_x$;

• đối với sóng truyền qua : $\langle \vec{\Pi}_2 \rangle = \dfrac{n_2}{2\mu_0 c}\left(\vec{E}_{02} . \vec{E}_{02}^*\right)\vec{e}_x = \langle \Pi_2 \rangle \vec{e}_x$.

Các công suất trung bình mà các sóng đó truyền tải qua một tiết diện S của giao diện có môđun bằng :

$$\langle \Phi_1 \rangle = \langle \Pi_1 \rangle S \; ; \; \langle \Phi'_1 \rangle = \langle \Pi'_1 \rangle S \; ; \; \langle \Phi_2 \rangle = \langle \Pi_2 \rangle S,$$

như vậy ta có thể xác định hệ số phản xạ R và hệ số truyền qua T về công suất (trong sự tới vuông góc và đối với các môi trường trong suốt) :

$$R = \frac{\langle \Phi'_1 \rangle}{\langle \Phi_1 \rangle} = \frac{\langle \Pi'_1 \rangle}{\langle \Pi_1 \rangle} = \frac{\left(\vec{E}'_{01} . \vec{E}'^*_{01}\right)}{\left(\vec{E}_{01} . \vec{E}_{01}^*\right)} = r_{12(E)}^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2;$$

$$T = \frac{\langle \Phi_2 \rangle}{\langle \Phi_1 \rangle} = \frac{\langle \Pi_2 \rangle}{\langle \Pi_1 \rangle} = \frac{n_2}{n_1}\frac{\left(\vec{E}_{02} . \vec{E}_{02}^*\right)}{\left(\vec{E}_{01} . \vec{E}_{01}^*\right)} = \frac{n_2}{n_1}\tau_{12(E)}^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

Ta kiểm tra được ngay : $R + T = 1$, điều đó thể hiện sự bảo toàn năng thông khi sóng đi qua giao diện : tất cả công suất mà sóng tới truyền tải thì hoặc được phản xạ, hoặc được truyền qua.

Khi tia tới vuông góc, hệ số phản xạ và hệ số truyền qua về công suất là :

$$R = r_{12(E)}^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \quad \text{và} \quad T = \frac{n_2}{n_1}\tau_{12(E)}^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

R và T nghiệm đúng $R + T = 1$, điều đó thể hiện sự bảo toàn năng thông khi sóng đi qua giao diện.

Áp dụng 2

Hệ số truyền qua của một tấm kính

Một tấm kính (đặt trong không khí có chỉ số bằng 1) được làm bằng thủy tinh có chiết suất $n = 1,5$ đối với ánh sáng nhìn thấy.

Hãy cho biết bậc độ lớn của phần công suất ánh sáng mà tấm kính truyền qua trong sự tới vuông góc :

a) *nếu không tính đến những phản xạ nhiều lần của sóng ánh sáng giữa hai mặt của tấm kính.*

b) *nếu tính đến những sự phản xạ đó. Rút ra kết luận.*

Mặc dù ánh sáng truyền qua một tấm kính là (nói chung !) ánh sáng trắng, ta sẽ sử dụng các kết quả trên với giả định rằng tấm kính được chiếu sáng bằng một sóng đơn sắc (chúng ta chỉ tìm một bậc độ lớn của phần công suất do tấm kính truyền qua).

Đặt :

$$R = R_{\text{không khí} \to \text{thủy tinh}} = R_{\text{thủy tinh} \to \text{không khí}} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

và $$T = T_{\text{không khí} \to \text{thủy tinh}} = T_{\text{thủy tinh} \to \text{không khí}} = \frac{4n}{(n+1)^2}.$$

a) Ta được :

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = T^2 = \left(\frac{4n}{(n+1)^2}\right)^2 = (0,96)^2 = 0,92.$$

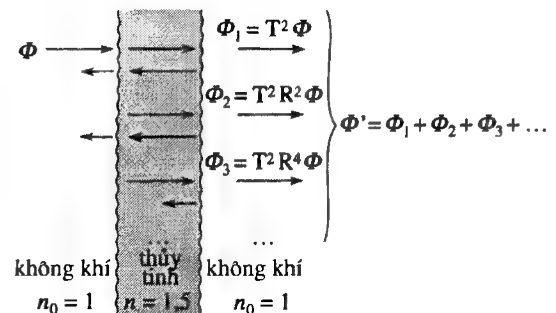
b) Về mặt lí thuyết, ta phải chồng chập các trường khác nhau do tấm kính truyền qua, tìm biểu thức trường tổng hợp, rồi tính vectơ POYNTING, giá trị trung bình của nó,...

Trong thực tế, hai mặt giới hạn tấm kính dĩ nhiên có những lồi lõm, và bề dày tấm kính là lớn so với độ dài các bó sóng - vào cỡ micrômet - của sóng ánh sáng.

Do đó các sóng khác nhau truyền qua có những pha ngẫu nhiên với nhau, chúng không giao thoa với nhau (*xem H−Prépa, Quang học sóng, năm thứ hai*), và ta có thể chồng chập trực tiếp các thông lượng truyền qua (*h*.8) :

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = T^2(1 + R^2 + R^4 + ...) = \frac{T^2}{1 - R^2} \approx T^2$$

vì rằng $R^2 \approx 1,6.10^{-3}$.



H.8. *Hệ số truyền qua của một tấm kính (có phản xạ nhiều lần).*

Chúng ta thấy lại một kết quả tương tự như ở câu **a**).

Ta thấy rằng khi truyền qua một tấm kính (hay một thấu kính), khoảng 8% ánh sáng bị "mất đi". Để nâng cao hệ số truyền qua của một số vật kính máy ảnh, hoặc một số kính mắt, người ta xử lí chúng để chống phản xạ bằng cách phủ lên chúng một hay nhiều lớp điện môi mỏng và trong suốt (*xem bài tập* 1).

▶ **Để luyện tập : bài tập 1 và 4.**

3 Khúc nhạc mở đầu : Trường hợp tia tới bất kì

Chúng ta không có ý định xác định các hệ số phản xạ và truyền qua trong trường hợp tia tới bất kì, chúng ta chỉ đơn giản "làm sáng tỏ đôi điều" trong trường hợp tổng quát này.

Trước hết, chúng ta chỉ ra rằng một trạng thái phân cực bất kì bao giờ cũng có thể được phân tích thành hai trạng thái phân cực thẳng vuông góc với nhau. Do vậy chúng ta có thể chỉ xét những sóng phân cực thẳng.

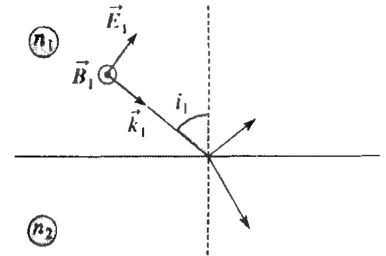
Khi góc tới khác không, phải xét hai trường hợp :

- hoặc điện trường của sóng tới nằm trong mặt phẳng tới (*h*.9a) ;
- hoặc điện trường đó vuông góc với mặt phẳng tới (*h*.9b).

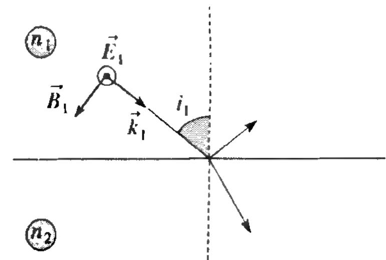
Mỗi trường hợp này rõ ràng là dẫn đến những kết quả khác nhau (đừng quên rằng các điều kiện biên làm xuất hiện các hình chiếu của các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ xuống giao diện và xuống đường pháp tuyến với giao diện) và cho phép xác định các hệ số :

- $r_{12//}$ và $\tau_{12//}$ khi trường $\vec{E}$ nằm trong mặt phẳng tới ;
- $r_{12\perp}$ và $\tau_{12\perp}$ khi trường $\vec{E}$ vuông góc với mặt phẳng tới.

Các hệ số, một bên là $r_{12//}$ và $r_{12\perp}$ và bên kia là $\tau_{12//}$ và $\tau_{12\perp}$, là khác nhau. Nói riêng, hệ số $r_{12//}$ có thể triệt tiêu (mà $r_{12\perp}$ không triệt tiêu) đối với một sự tới đặc biệt gọi là sự tới BREWSTER.



H.9a. *Điện trường tới nằm trong mặt phẳng tới.*



H.9b. *Điện trường tới vuông góc với mặt phẳng tới.*

Áp dụng 3

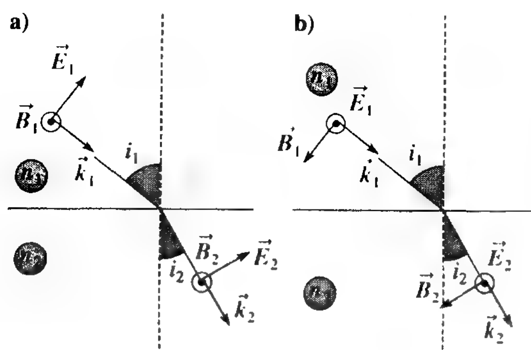
Sự tới BREWSTER

Một sóng điện trường phẳng, đơn sắc, lan truyền trong một điện môi trong suốt có chiết suất n_1 và đi tới một điện môi trong suốt có chiết suất n_2 với góc tới i_1. Sóng được phân cực thẳng, điện trường :

- *hoặc nằm trong mặt phẳng tới (trường hợp a) ;*
- *hoặc vuông góc với mặt phẳng tới (trường hợp b).*

Chứng tỏ rằng đối với một trong các kiểu phân cực (a) hoặc (b) có một giá trị đặc biệt i_{1B} của góc i_1, với nó thì sóng tới được hoàn toàn truyền qua. Tính i_{1B} theo n_1 và n_2.

Hình 10 vẽ phương của các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ của sóng tới và sóng truyền qua trong trường hợp điện trường $\vec{E}_1$ của sóng tới nằm trong mặt phẳng tới (*h*.10a) và trong trường hợp $\vec{E}_1$ vuông góc với mặt phẳng tới (*h*.10b).



H.10. *Sự tới* BREWSTER.

a. $\vec{E}_1$ *nằm trong mặt phẳng tới : có thể được.*

b. $\vec{E}_1$ *vuông góc với mặt phẳng tới : không thể được.*

Điều kiện biên trên mặt phẳng phân cách đối với trường $\vec{B}$, cụ thể là $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$ $(\mu_1 = \mu_2 = \mu_0)$, chỉ ra rõ ràng rằng chỉ có thể có hệ thức đó nếu trường $\vec{B}_1$ của sóng tới vuông góc với mặt phẳng tới (trường hợp **a**)).

Trong trường hợp **a**), điều kiện biên đối với các thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến của trường $\vec{E}$ cho ta :

- đối với thành phần tiếp tuyến :

$$E_1 \cos i_1 = E_2 \cos i_2 \;;$$

- đối với thành phần pháp tuyến :

$$n_1^2 E_1 \sin i_1 = n_2^2 E_2 \sin i_2 \,.$$

Ta rút ra $n_1^2 \operatorname{tg} i_1 = n_2^2 \operatorname{tg} i_2$, do đó, chú ý đến định luật DESCARTES thì :

$$n_1 \cos i_2 = n_2 \cos i_1$$

Nhân hai phương trình sau từng vế một, ta được :

$$\sin 2i_1 = \sin 2i_2 \text{, do đó } i_2 = \frac{\pi}{2} - i_1$$

(vì i_1 và i_2 nằm giữa 0 và $\frac{\pi}{2}$, và i_1 dĩ nhiên là khác i_2).

Cuối cùng ta rút ra :

$$\operatorname{tg} i_1 = \operatorname{tg} i_{1B} = \frac{n_2}{n_1} \;;$$

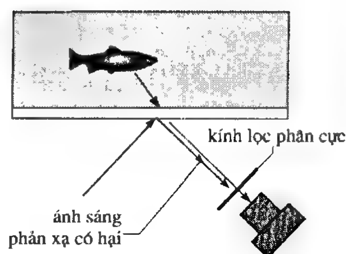
i_{1B} là góc BREWSTER.

Do đó, một sóng ánh sáng (không phân cực) truyền đến theo góc tới BREWSTER làm phát sinh một sóng phản xạ phân cực thẳng, điện trường phản xạ vuông góc với mặt phẳng tới. Với một góc tới khác thì sóng phản xạ bị phân cực một phần (vì $r_{12//}$ và $r_{12\perp}$ là khác nhau).

Tính chất này là rất quen thuộc đối với các nhà nhiếp ảnh, họ sử dụng các kính lọc phân cực (*xem H–Prépa, Quang học sóng, năm thứ hai*) để làm giảm ánh sáng phản xạ (tức là có hại) (*h*.11).

Một số kính râm cũng dùng các mắt kính phân cực, vì các lí do đó.

▶ **Để luyện tập : bài tập 3.**



H.11. *Chụp ảnh một con cá trong bể cá : với góc tới* BREWSTER *việc sử dụng một kính lọc phân cực cho phép loại trừ ánh sáng phản xạ có hại.*

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ Ở mặt phân cách hai môi trường ① và ② tuyến tính, đồng nhất, đẳng hướng và trong suốt, có các chỉ số thực n_1 và n_2, ta có thể viết :

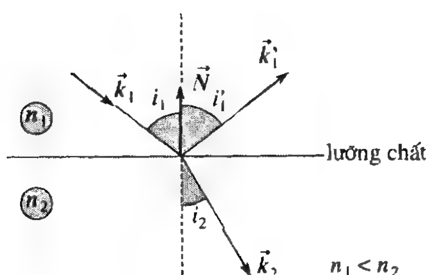
• các vectơ sóng $\vec{k}_1'$ và $\vec{k}_2$ của sóng phản xạ và sóng khúc xạ nằm trong mặt phẳng tới xác định bởi các vectơ $\vec{k}_1$ (vectơ sóng của sóng tới) và $\vec{N}$ (pháp tuyến địa phương của lưỡng chất) ;

• các thành phần tiếp tuyến $\vec{k}_{1T}$, $\vec{k}_{1T}'$ và $\vec{k}_{2T}$ (trên giao diện) của các vectơ sóng của các sóng tới, phản xạ và khúc xạ, là bằng nhau :

$$\vec{k}_{1T} = \vec{k}_{1T}' = \vec{k}_{2T}.$$

• ***Các định luật DESCARTES***

• Tia phản xạ và tia khúc xạ nằm trong mặt phẳng tới xác định bởi tia tới và pháp tuyến của lưỡng chất (*h*.12).



H.12.

• Góc phản xạ và góc tới bằng nhau :

$$i_1' = i_1.$$

• Góc khúc xạ và góc tới nghiệm đúng :

$$n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1.$$

Trong trường hợp $n_2 < n_1$, có sự phản xạ toàn phần nếu $i_1 > i_{1L}$, i_{1L} được xác định bởi :

$$\sin i_{1L} = \frac{n_2}{n_1}.$$

■ Các hệ số phản xạ và hệ số truyền qua khi tia tới vuông góc :

• về biên độ : $r_{12(E)} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ và $\tau_{12(E)} = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2}$;

• về công suất : $R = r_{12(E)}^2 = \left(\dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$ và $T = \dfrac{n_2}{n_1}\tau_{12(E)}^2 = \dfrac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)}$.

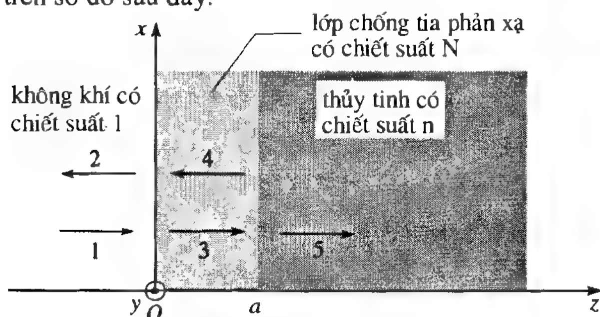
R và T nghiệm đúng $R + T = 1$, điều đó thể hiện sự bảo toàn năng thông khi sóng đi qua giao diện.

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Lớp chống tia phản xạ

Một tấm kính có chỉ số n (thực) được phủ một lớp mỏng trong suốt có độ dày a và chỉ số N (thực), như trên sơ đồ sau đây.



Một SPCĐS (1) có tần số ω, phân cực thẳng (E_0 thực), có điện trường $\underline{\vec{E}}_1 = E_0 e^{j(\omega t - kz)}\vec{e}_x$ (với $k = \frac{\omega}{c}$ trong không khí có chiết suất 1) đi đến lớp trong suốt với tia tới vuông góc. Do phản xạ và truyền qua, sóng đó làm phát sinh các SPCĐS kí hiệu là (2), (3), (4), (5), có cùng tần số ω.

1) Cho biết biểu thức chung của các trường điện từ của các sóng đó (theo cách kí hiệu phức).

2) Viết các điều kiện biên tại $z = 0$ và $z = a$ đối với các trường đó. Rút ra biên độ phức $\underline{E}_{02}$ của điện trường mà lớp đó phản xạ, tùy theo n, N, a, k và E_0.

3) Một bên là N và n, bên kia là a, phải thỏa mãn những điều kiện nào để không có sóng phản xạ trong không khí ? ($\underline{E}_{02} = 0$) ? Ta sẽ viết biểu thức của a theo bước sóng λ (trong chân không) và N.

2 Phản xạ toàn phần

Một môi trường trong suốt có chỉ số n (n thực > 1), chiếm nửa không gian $x < 0$ trong khi không khí (có chỉ số 1) chiếm nửa không gian $x > 0$, như trên sơ đồ sau đây.

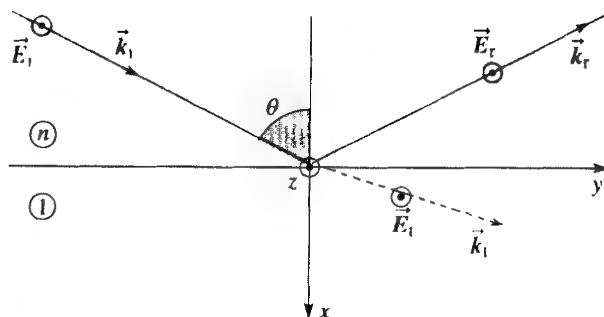
Một sóng tới phẳng, đơn sắc, có tần số ω và vectơ sóng $\vec{k}_i$, truyền trong môi trường có chỉ số n. Sự phân cực của nó là thẳng, vuông góc với mặt phẳng tới :

$$\underline{\vec{E}}_i = \underline{E}_i\vec{e}_z = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_i.\vec{r})}\vec{e}_z$$

(có thể giả định E_0 là thực).

Góc tới θ sao cho $\sin\theta > \frac{1}{n}$.

Cho biết : $k = n\frac{\omega}{c}$, $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \sin\theta$ và $\gamma = \sqrt{\sin^2\theta - \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{n^2}}$.



Sóng tới đó làm phát sinh một sóng phản xạ phẳng và một sóng truyền qua. Chúng là đơn sắc, có tần số ω và phân cực tương tự như sóng tới :

$$\underline{\vec{E}}_r = \underline{E}_r\vec{e}_z = \underline{E}_{0r} e^{j(\omega t - \vec{k}_r.\vec{r})}\vec{e}_z$$

và $$\underline{\vec{E}}_t = \underline{E}_t\vec{e}_z = \underline{E}_{0t} e^{j(\omega t - \vec{k}_t.\vec{r})}\vec{e}_z.$$

1) Xác định các vectơ sóng $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$ và $\vec{k}_t$ của các sóng tới, phản xạ và truyền qua, tùy theo các dữ kiện đã cho.

2) Xác định đầy đủ các sóng phản xạ và truyền qua.

3) So sánh các môđun của $\underline{E}_{0r}$ và E_0. Nêu kết luận về sự truyền tải năng lượng.

4) Nêu kì đặc trưng của sóng truyền qua đối với $n = 1{,}5$; $\theta = 60^\circ$; $\lambda = 589$ nm.

Sóng này có tải năng lượng không ?

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

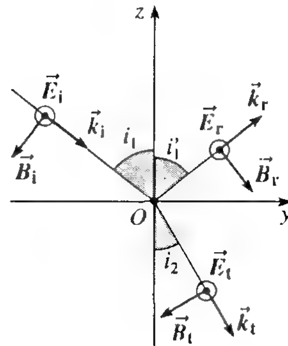
3 Phản xạ và truyền qua của một sóng trong trường hợp sự tới bất kì

Hai điện môi tđđ, có độ từ thẩm bằng μ_0, trong suốt, có các hằng số n_1 và n_2 thực ($n_1 < n_2$), cách nhau bởi một mặt phẳng P trùng với mặt phẳng (Oxy) :

Một SPCĐS tới, có tần số ω, có điện trường $\underline{\vec{E}}_i = \vec{E}_{0i} e^{j(\omega t - \vec{k}_i.\vec{r})}$ (E_{0i} là thực), đi đến P với góc

tới i_1. Nó làm phát sinh một sóng phản xạ (kí hiệu với chiết suất r) và một sóng truyền qua (kí hiệu với chiết suất t). Các phương truyền của chúng tất nhiên thỏa mãn các định luật DESCARTES.

1) Sóng tới bị phân cực thẳng và điện trường $\vec{E}_I$ vuông góc với mặt phẳng tới. Giả định rằng sóng phản xạ và sóng truyền qua phân cực như nhau : $\vec{E}_r$ và $\vec{E}_t$ cũng vuông góc với mặt phẳng tới.

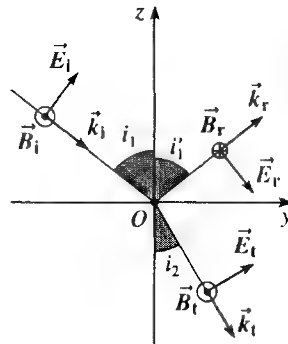


a) Viết những điều kiện đi qua mà các thành phần của các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ ở hai bên mặt P phải thỏa mãn.

b) Rút ra các biểu thức của tỉ số các biên độ $\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp$ và $\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp$ của điện trường, tùy theo các góc i_1, i_2 và các chỉ số n_1, n_2 (kí hiệu $\perp$ nhắc lại rằng $\vec{E}$ vuông góc với mặt phẳng tới).

c) Tính các tỉ số $\left(\frac{\langle \mathcal{P}_r \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle}\right)_\perp$ và $\left(\frac{\langle \mathcal{P}_t \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle}\right)_\perp$ của các công suất điện từ trung bình phản xạ và truyền qua so với công suất trung bình tới. Cho biết dáng vẻ của đường cong biểu diễn các tỉ số đó tùy theo i_1.

2) Thành lập một cách tương tự biểu thức các hệ số phản xạ $\left(\frac{\langle \mathcal{P}_r \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle}\right)_{//}$ và truyền qua $\left(\frac{\langle \mathcal{P}_t \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle}\right)_{//}$ khi sóng tới bị phân cực thẳng và điện trường nằm trong mặt phẳng tới.



Cho biết dáng vẻ của đường cong biểu diễn các hệ số đó tùy theo i_1.

3) Sóng đi đến mặt P là một sóng ánh sáng tự nhiên (không phân cực). Đối với góc tới i_{1B} nào thì ánh sáng phản xạ bởi P bị phân cực hoàn toàn ?

Viết biểu thức của $\text{tg}\, i_{1B}$ theo n_1 và n_2.

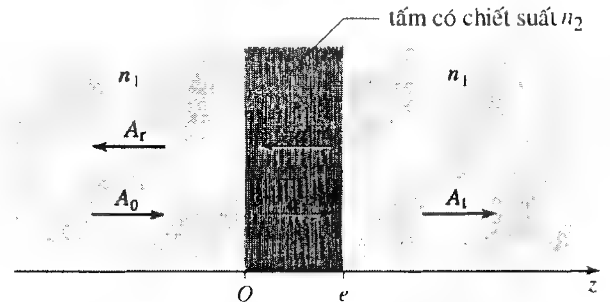
4 ★Phản xạ và truyền qua trên một tấm : hai phép tính

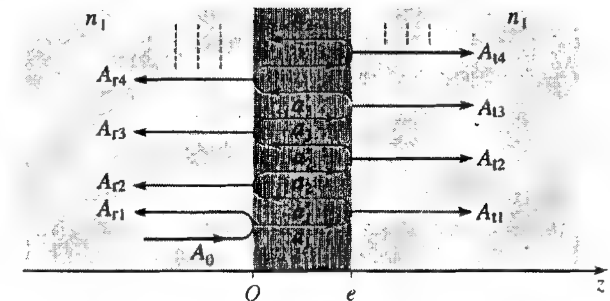
Một tấm trong suốt có bề dày e, chiết suất n_2 (thực), phân cách hai môi trường trong suốt có chiết suất n_1 (thực). Một SPCĐS tới, có mạch số ω, góc tới bằng không, được tấm đó phản xạ và truyền qua. Ta kí hiệu :

$$\varphi = \frac{2n_2 e\omega}{c} \;;\quad r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \;;$$

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \;;\quad t' = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}.$$

Thông lượng năng lượng tới được kí hiệu là ϕ_I, thông lượng năng lượng phản xạ là $\phi_R = R\phi_I$, và thông lượng năng lượng truyền qua là $\phi_T = T\phi_I$.





1) Bằng cách xét các SPCĐS mà các biên độ điện trường được kí hiệu bằng $\underline{A}_0$, $\underline{A}_r$, $\underline{a}$, $\underline{a}'$ và $\underline{A}_t$ trong sơ đồ trên đây, hãy xác định R và T.

2) Lặp lại phép tính này bằng cách xét các kết quả của những sự phản xạ và truyền qua nối tiếp nhau, làm phát sinh các sóng bên trong tấm, có các biên độ $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$, ... (truyền theo chiều tăng của z) và $\underline{a}'_1$, $\underline{a}'_2$, $\underline{a}'_3$, (truyền theo chiều giảm của z), các sóng phản xạ có biên độ $\underline{A}_{1r}$, $\underline{A}_{2r}$, $\underline{A}_{3r}$, ... và các sóng truyền qua có biên độ $\underline{A}_{1t}$, $\underline{A}_{2t}$, $\underline{A}_{3t}$, ...

3) Tổng $R + T$ bằng bao nhiêu ? Hãy bình luận.

4) Tấm này bằng thủy tinh ($n_2 = 1{,}5$) ; nó được đặt trong không khí ($n_1 = 1$). Hãy bình luận tầm quan trọng của các sự phản xạ và biên độ các sóng nối tiếp nhau và giao thoa với nhau (đối với phép tính thứ hai). Vẽ đường biểu diễn các biến thiên của T và R theo độ lệch pha φ. Hãy bình luận.

5) Thiết bị này ứng với dụng cụ nào, trong trường hợp có các sự phản xạ quan trọng trên hai mặt của tấm ? Vẽ đường biểu diễn các biến thiên của R và T theo φ, và lấy $r^2 = 0{,}9$ chẳng hạn. Trong thực tế, người ta làm thế nào để có được các mặt của tấm phản xạ rất tốt ? Khi đó các hệ số phản xạ là phức, các kết quả trên bị thay đổi thế nào ?

5 ★Phản xạ của một sóng siêu cao tần trên một vật dẫn

1) Sự lan truyền trong kim loại

Một sóng điện từ phẳng, ngang, đơn sắc, có tần số ω, phân cực thẳng (điện trường song song với (Ox)), truyền theo (Oz), bên trong một môi trường kim loại đồng nhất và đẳng hướng, có hằng số điện môi và hằng số từ thẩm coi như của chân không.

Độ dẫn điện của kim loại theo chế độ tĩnh được kí hiệu là γ_0.

Để áp dụng bằng số, ta lấy :

$$\gamma_0 = 6.10^7\ \text{S.m}^{-1}.$$

và tần số $f = 1$ GHz cho sóng siêu cao tần.

a) Độ dẫn điện của kim loại được coi như độ dẫn điện theo chế độ tĩnh, kí hiệu là γ_0.

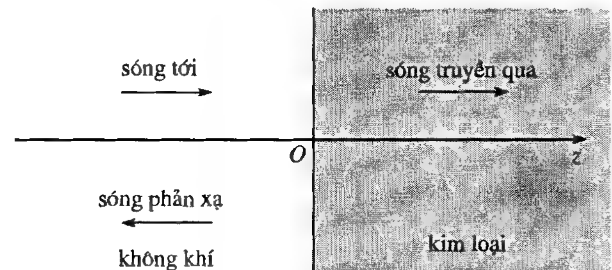
Cái gì có thể biện minh cho điều đó ?

b) Viết các phương trình MAXWELL đơn giản hóa cho phép mô tả sự lan truyền sóng siêu cao tần trong kim loại. Rút ra phương trình lan truyền sóng siêu cao tần trong vật dẫn.

c) Định nghĩa và tính độ dày của da δ đặc trưng cho sự xuyên thấu của sóng vào vật dẫn. Chỉ rõ độ lệch pha giữa điện trường và từ trường của sóng.

d) Định nghĩa và viết biểu thức của chỉ số "tương đương" của môi trường kim loại trong miền tần số được xét.

2) Sự phản xạ trên kim loại



Môi trường dẫn nói trên chiếm nửa không gian $z > 0$, trong khi không khí (coi như chân không) chiếm nửa không gian $z < 0$. Một sóng điện từ phẳng, đơn sắc, có tần số ω, truyền theo phương (Oz) trong không khí. Điện trường của sóng đó được viết thành $\underline{\vec{E}}_1 = \underline{\vec{E}}_{01} e^{j(\omega t - kz)}$ với $k = \dfrac{\omega}{c}$.

Ở giao diện không khí - vật dẫn, nó làm phát sinh một sóng phản xạ và một sóng truyền qua, mà các điện trường được viết thành

$$\underline{\vec{E}}_1' = \underline{\vec{E}}_{01}' e^{j(\omega t + \underline{k}' z)} \text{ và } \underline{\vec{E}}_2 = \underline{\vec{E}}_{02} e^{j(\omega t - \underline{k}'' z)}.$$

a) Cho biết các số sóng k' và $\underline{k}''$.

b) Cho biết các từ trường $\underline{\vec{B}}_1$, $\underline{\vec{B}}_1'$, và $\underline{\vec{B}}_2$ của ba sóng đang xét.

c) Những điều kiện bắt buộc đối với các thành phần tiếp tuyến của $\underline{\vec{E}}$ và $\underline{\vec{B}}$ trong mặt $z = 0$ là gì ? Rút ra các hệ số phản xạ $\underline{r}$ và truyền qua $\underline{\tau}$ về mặt biên độ, tùy theo $\underline{\vec{E}}_{01}$, δ và ω.

3) Khía cạnh năng lượng

a) Tính các trung bình theo thời gian của các vectơ POYNTING của ba sóng đó.

b) Xác định hệ số phản xạ về mặt công suất R theo δ và ω.

c) Kiểm tra rằng có sự bảo toàn năng lượng (công suất của sóng tới đúng bằng tổng các công suất của sóng phản xạ và sóng truyền qua).

d) Tính công suất trung bình thực $\langle \mathscr{P}_J \rangle$ bị phân tán do hiệu ứng JOULE trong một hình trụ có tiết diện S, giữa hai hoành độ $z = 0$ và $z = \infty$. So sánh công suất đó với thông lượng trung bình của vectơ POYNTING của sóng truyền qua diện tích S tại $z = 0$.

4) Áp suất bức xạ

a) Chứng tỏ rằng có một mật độ lực khối trung bình : $\langle \vec{f}_v \rangle = \dfrac{1}{2} \mathscr{R}e(\gamma_0 \underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*)$ tác dụng lên môi trường dẫn điện.

Viết biểu thức của nó theo z, δ và mật độ năng lượng khối trung bình của sóng tới, kí hiệu là $\langle e_i \rangle$.

b) Rút ra rằng có một lực nén tác dụng lên kim loại theo phương sóng tới, và định nghĩa một áp suất trung bình $\langle P \rangle$ gọi là áp suất bức xạ. Viết biểu thức của $\langle P \rangle$ theo $\langle e_i \rangle$ và các hằng số đặc trưng của bài toán, sau đó giản ước biểu thức đó, có tính đến các bậc độ lớn.

5) Giới hạn của vật dẫn lí tưởng

a) Bình luận các giá trị của $(k\delta)$, $\underline{r}$, R và T, có tính đến các bậc độ lớn của các đại lượng được xét.

b) Vật dẫn là "lí tưởng" nếu độ dày của da bằng không : "$\delta = 0$". Hãy bình luận.

c) Giá trị của điện trường và từ trường của sóng truyền qua là bao nhiêu trong trường hợp thực ($\delta > 0$) và trường hợp lí tưởng ($\delta = 0$) ?

d) Biểu thức của vectơ mật độ dòng điện trong lòng kim loại là biểu thức nào ? Hãy bình luận hành vi của nó ở giới hạn khi δ dần tới 0. Cho biết giá trị của dòng điện mặt cho phép mô hình hóa trường hợp giới hạn này.

e) Điều kiện biên nào sử dụng trước đây mà không còn áp dụng được nữa trong trường hợp vật dẫn lí tưởng ? Hãy đề xuất một cách tính lại nhanh chóng các sóng và các hệ số kèm theo trong trường hợp ta đứng ngay từ đầu ở giới hạn $\delta = 0$ (*xem bài tập* 4, *chương* 5).

6 Sự truyền qua giao diện khí quyển - tầng điện li

1) Sự lan truyền trong tầng điện li

Tầng điện li là một lớp khí quyển nằm ở độ cao rất lớn (ngoài 60 km), mà ta coi như một chất khí iôn hóa (plasma), trung hòa điện trong tổng thể, bao gồm N êlectrôn tự do có khối lượng m, điện tích $(-e)$, và N iôn dương có khối lượng M, điện tích $(+e)$ trong mỗi đơn vị thể tích. Chất khí này là một môi trường loãng, có hằng số điện môi và hằng số từ thẩm bằng của chân không, mang các hạt tích điện mà tương tác là không đáng kể.

Cho biết :

$$e = 1{,}6.10^{-19}\ \text{C} ;\ m = 0{,}91.10^{-30}\ \text{kg} ;$$
$$M = 1{,}67.10^{-27}\ \text{kg} ;\ N = 6.10^{11}\ \text{êlectrôn.m}^{-3} ;$$
$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \text{H.m}^{-1} ;\ \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi.9.10^9}\ \text{F.m}^{-1}.$$

Một sóng điện từ phẳng, đơn sắc, có tần số ω, truyền trong môi trường đó theo phương (Oz).

Điện trường của sóng đó được viết thành :

$$\underline{\vec{E}}_2 = \underline{E}_{02} e^{j(\omega t - \vec{k}_2.\vec{z})} \vec{e}_x,$$

trong đó $\vec{k}_2 = k_2.\vec{e}_z$ chỉ vectơ sóng.

a) Khảo sát chuyển động của các êlectrôn và các iôn do sóng điện từ gây ra. Ta sẽ kí hiệu $\underline{\vec{v}}_e$ và $\underline{\vec{v}}_i$ là các vectơ vận tốc phức tương ứng. Chứng tỏ rằng độ dẫn điện của môi trường có thể coi là bằng $\gamma = -\dfrac{jNe^2}{m\omega}$.

b) Chứng tỏ rằng hệ thức tán sắc có thể được viết dưới dạng $k_2^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$ và xác định tần số plasma $f_p = \dfrac{\omega_p}{2\pi}$ theo N, e, m và ε_0. Tính giá trị bằng số của f_p.

c) Chứng tỏ rằng ta có thể khảo sát sự lan truyền một sóng điện từ trong tầng điện li giống như nếu tầng điện li là một điện môi tđđ, và viết biểu thức của bình phương chỉ số phức $\underline{n}$ theo ω và ω_p.

2) Phản xạ và khúc xạ do tầng điện li

Khí quyển (mà các tính chất được giả định là như của chân không) nằm trong miền $z < 0$, và tầng điện li trong miền $z > 0$. Một sóng điện từ phẳng, đơn sắc, có mạch số ω, phân cực thẳng, truyền từ Trái Đất đến tầng điện li. Điện trường của nó là $\underline{\vec{E}}_1 = \underline{E}_{01} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$. Tại giao diện, sóng đó làm phát sinh một sóng truyền qua và một sóng phản xạ mà các điện trường được kí hiệu là $\vec{E}_2$ và $\vec{E}_1'$.

a) Viết các điều kiện biên (tại $z = 0$) mà điện trường và từ trường của ba sóng đó phải nghiệm đúng. Rút ra hai hệ thức liên kết các biên độ $\underline{E}_{01}$, $\underline{E}_{01}'$, $\underline{E}_{02}$ và thông số duy nhất $\underline{n}$.

b) Xác định biểu thức của hệ số phản xạ về biên độ định nghĩa bằng $\underline{r} = \dfrac{\underline{E}_{01}'}{\underline{E}_{01}}$ tùy theo $\underline{n}$.

Rút ra hệ số phản xạ về công suất R, tùy theo ω và ω_p.

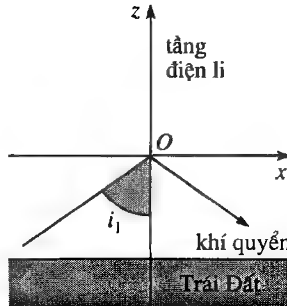
α) Đối với $\omega < \omega_p$, ta có thể coi giao diện khí quyển - tầng điện li là gì ?

β) Đối với $\omega > \omega_p$, hãy tính các giá trị bằng số của R ứng với các tần số $f = 7$ MHz và $f = 8$ MHz.

γ) Vẽ đồ thị của R theo tần số f.

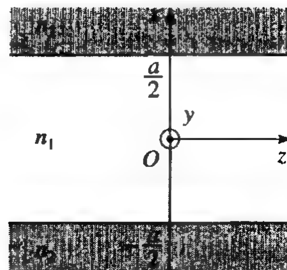
c) Tìm hệ thức giữa hệ số phản xạ về công suất R và hệ số truyền qua về công suất T ? Trên cùng một sơ đồ, cho biết dáng vẻ đồ thị của T theo tần số f.

d) Một máy phát đặt ngang mực nước biển phát ra một sóng coi như sóng phẳng, đơn sắc, có tần số $f > f_p$. Sóng đi đến giao diện khí quyển - tầng điện li với sự tới xiên (góc i_1). Tính côsin của góc giới hạn i_{1L} từ đó sóng tới bị hoàn toàn phản xạ về mặt đất, tùy theo tần số f của máy phát và tần số cắt f_p. Ứng dụng bằng số cho tần số $f = 12$ MHz.



7 ★★Sợi quang học có bước nhảy chiết suất

Xét một sợi quang học có bước nhảy chiết suất, gồm một lõi điện môi hình trụ đường kính a và chiết suất n_1 (thực), bao bọc bởi một vỏ điện môi có chiết suất n_2 (thực), hơi nhỏ hơn n_1 một chút. Thực ra, để đơn giản hóa các phép tính, ta khảo sát ở đây một hình học hai chiều, nó mô tả tốt được những tính chất cơ bản của các sợi đó : một lớp điện môi mỏng (lõi) có bề dày a, chiết suất n_1, nhúng chìm trong một điện môi vô hạn (vỏ) có chiết suất n_2 nhỏ hơn n_1.



Sợi đó được chiếu sáng bởi một sóng đơn sắc có tần số ω. Trong mỗi lớp, người ta tìm một điện trường có dạng $\vec{E} = A(x)e^{i(\omega t - \alpha z)}\vec{e}_y$, gọi là phần ngang điện, kí hiệu là T.E (α chỉ một hằng số thực, dương và $A(x)$ chỉ một hàm thực của x).

1) Đối với kiểu như vậy và trong từng lớp, hãy xác định một hệ thức giữa A, $\frac{d^2A}{dx^2}$, $k_i = n_i\frac{\omega}{c}$ (với i = 1 hoặc 2) và α.

2) a) Chứng tỏ rằng các điều kiện biên đòi hỏi sự liên tục của A và của $\frac{dA}{dx}$ ở các giao diện $x = \pm\frac{a}{2}$.

b) Biện luận bản chất các nghiệm của phương trình thu được ở câu **1)** trong mỗi lớp, tùy theo giá trị của $(k_i^2 - \alpha^2)$. Sự đối xứng của bài toán đối với mặt phẳng (Oyz) cho phép tìm các nghiệm là chẵn hoặc lẻ. Chứng tỏ rằng bài toán không có nghiệm nào đối với $k_1 < \alpha$.

c) Ta quan tâm đến các kiểu dẫn sóng của sợi quang học, được định nghĩa như là các kiểu theo đó một tỉ lệ khác không của năng lượng sáng bị giới hạn trong lõi của sợi. Chứng tỏ rằng khi đó ta hạn chế bài toán trong các giá trị của α sao cho $k_2 < \alpha$.

3) a) Trong tất cả phần sau đây, ta giả định rằng $k_2 < \alpha \le k_1$, và ta tìm cách xác định đầy đủ các kiểu dẫn sóng trong sợi quang học. Ta đặt $\beta^2 = k_1^2 - \alpha^2$ và $\gamma^2 = \alpha^2 - k_2^2$.

Hãy viết dạng tổng quát của một nghiệm chẵn, và chứng tỏ rằng chỉ có thể có được một nghiệm như vậy nếu :

$$\gamma\frac{a}{2} = \beta\frac{a}{2}\operatorname{tg}\beta\frac{a}{2}.$$

Cũng làm như vậy đối với các nghiệm lẻ và chứng tỏ rằng điều kiện tồn tại của chúng là :

$$\gamma\frac{a}{2} = -\beta\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\beta\frac{a}{2}.$$

b) Vẽ trên cùng một sơ đồ các đồ thị cho biết $\gamma\frac{a}{2}$ theo $\beta\frac{a}{2}$ đối với hai loại nghiệm chẵn và lẻ. Bằng cách dùng hệ thức :

$$\left(\frac{\beta a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}(k_1^2 - k_2^2),$$

hãy tìm nguyên tắc của sự xác định bằng đồ thị các kiểu dẫn sóng T.E. của sợi . Kiểm tra rằng luôn luôn có một kiểu T.E. và số lượng các kiểu đó là $N = 1 + \operatorname{int}\left(\frac{\omega a}{\pi c}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)$, trong đó int($u$) chỉ phần nguyên của u.

4) a) Viết điều kiện tồn tại của kiểu dẫn sóng thứ n, và kiểm tra rằng đối với kiểu đó có một mạch số cắt ω_{nc}, và xác định mạch số đó. Kiểm tra rằng đối với $\omega = \omega_{nc}$, và đối với kiểu thứ n ta có $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$.

b) Viết tường minh dạng của điện trường trong lõi, kiểm tra rằng nó có thể được biểu thị như tổng của hai SPCĐS và xác định các vectơ sóng của chúng.

Xác định góc θ giữa các vectơ sóng đó và trục (Oz) của sợi quang học. Hãy lí giải điều kiện cắt bằng sự phản xạ toàn phần.

5) a) Ta tìm cách xác định hệ thức tán sắc $\alpha(\omega)$ của kiểu thứ n, ở lân cận tần số cắt của nó. Đặt $\beta\frac{a}{2}=(n-1)\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ (với giả định $\varepsilon \ll 1$), và sử dụng các hệ thức thu được ở câu **3)**, hãy chứng tỏ rằng đối với kiểu thứ n ở lân cận ω_{nc}, thì :

$$\gamma a=(n-1)\pi\varepsilon \quad \text{và} \quad \frac{a}{2}\sqrt{k_1^2-k_2^2}=(n-1)\frac{\pi}{2}+\varepsilon$$

ở bậc nhất theo ε.

Rút ra hệ thức tán sắc của kiểu thứ n ở lân cận tần số cắt của nó :

$$\alpha^2=\left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2+\frac{(n-1)^2\pi^2}{4c^2}(n_1^2-n_2^2)(\omega-\omega_{nc})^2.$$

b) Sử dụng các kết quả trên và khảo sát hệ thức tán sắc của một kiểu ở xa tần số cắt, hãy vẽ trên một đồ thị $\omega(\alpha)$ dáng vẻ của các hệ thức tán sắc của các kiểu dẫn sóng.

c) Nhờ vào câu **3)**, hãy biểu diễn $A(x)$ đối với kiểu dẫn sóng thứ n ở lân cận tần số cắt và ở xa nó. Hãy lí giải về mặt năng lượng.

6) Ta xét một sợi quang học có độ dài L sao cho số lượng các kiểu có thể truyền ở nó ở tần số ω là lớn. Kiểu nào là nhanh nhất ? Kiểu nào chậm nhất ? Tính hiệu thời gian truyền δt của kiểu chậm nhất và kiểu nhanh nhất.

BÀI CHỮA

1 1) • *Trong không khí : sóng tới (1) :*

$$\underline{\vec{E}}_1=E_0 e^{j(\omega t-kz)}\vec{e}_x \quad \text{và} \quad \underline{\vec{B}}_1=\frac{E_0}{c}e^{j(\omega t-kz)}\vec{e}_y$$

(vì phân cực là thẳng, ta giả định E_0 là thực) ;

sóng phản xạ (2) :

$$\underline{\vec{E}}_2=\underline{E}_{02}e^{j(\omega t+kz)}\vec{e}_x \quad \text{và} \quad \underline{\vec{B}}_2=-\frac{\underline{E}_{02}}{c}e^{j(\omega t+kz)}\vec{e}_y.$$

• *Trong lớp : sóng theo chiều z tăng (3) :*

$$\underline{\vec{E}}_3=\underline{E}_{03}e^{j(\omega t-Nkz)}\vec{e}_x \quad \text{và} \quad \underline{\vec{B}}_3=N\frac{\underline{E}_{03}}{c}e^{j(\omega t-Nkz)}\vec{e}_y \ ;$$

sóng theo chiều z giảm (4) :

$$\underline{\vec{E}}_4=\underline{E}_{04}e^{j(\omega t+Nkz)}\vec{e}_x \quad \text{và} \quad \underline{\vec{B}}_4=-N\frac{\underline{E}_{04}}{c}e^{j(\omega t+Nkz)}\vec{e}_y.$$

• *Trong thủy tinh : sóng truyền qua (5) :*

$$\underline{\vec{E}}_5=\underline{E}_{05}e^{j(\omega t-nkz)}\vec{e}_x \quad \text{và} \quad \underline{\vec{B}}_5=n\frac{\underline{E}_{05}}{c}e^{j(\omega t-nkz)}\vec{e}_y.$$

Chú ý :

• *Không có sóng phản xạ trong thủy tinh, được giả định là có kích thước vô hạn về phía z tăng.*

• *Tất cả các trường này, có độ phân kì bằng không trong các môi trường chúng đi qua, đều là trường ngang.*

• *Ta đã biết (§2.1) rằng phản xạ và khúc xạ bảo toàn tiên nghiệm trạng thái phân cực của các sóng. Do đó ta đã giả định rằng tất cả các sóng đều có sự phân cực thẳng như nhau.*

2) Có sự liên tục của các thành phần tiếp tuyến các trường $\vec{E}$ và $\vec{B}$ ở các giao diện khác nhau (các môi trường cách điện không tích điện). Với góc tới bằng không, tất cả các trường đều là trường tiếp tuyến. Ta rút ra :

• *tại $z=0$:* $E_0+\underline{E}_{02}=\underline{E}_{03}+\underline{E}_{04}$; $E_0-\underline{E}_{02}=N\underline{E}_{03}-N\underline{E}_{04}$;

• *tại $z=a$:* $\underline{E}_{03}e^{-jNka}+\underline{E}_{04}e^{jNka}=\underline{E}_{05}e^{-jnka}$;

$$N\underline{E}_{03}e^{-jNka}-N\underline{E}_{04}e^{jNka}=n\underline{E}_{05}e^{-jnka}.$$

Ta rút ra (sau vài phép tính) :

$$\underline{E}_{02}=\frac{(N-n)(1+N)e^{-2jNka}+(N+n)(1-N)}{(N-n)(1-N)e^{-2jNka}+(N+n)(1+N)}E_0.$$

3) $\underline{E}_{02}=0$ nếu tử số của biểu thức trên bằng không (mẫu số vẫn khác không). Phần ảo bằng không nếu $\sin(2Nka)=0$; khi đó ta có :

• *hoặc $\cos(2nka)=1$ và phần thực không thể triệt tiêu (tất nhiên, nếu ta giả định N khác 1 và n) ;*

• *hoặc $\cos(2Nka)=-1$ và phần thực triệt tiêu nếu $N=\sqrt{n}$.*

Vậy lớp chống tia phản xạ thực hiện được nhiệm vụ của nó nếu $2Nka=(2p+1)\pi$ (với p nguyên), tức là $a=(2p+1)\frac{\lambda}{4N}$. Hoạt động của nó chỉ được bảo đảm tiên nghiệm đối với một bước sóng cho trước. Để tránh việc phải xét lại nó một cách quá nhanh chóng khi λ biến đổi, ta phải chọn một bề dày nhỏ : bề dày quang học của môi trường thường được lấy bằng $Na=\frac{\lambda}{4}$.

Những cách xử lí chống tia phản xạ đòi hỏi phải sử dụng các lớp mỏng. Trong thực tế, người ta sử dụng các lớp phủ nhiều lần bằng các điện môi để làm cho việc xử lí hầu như là tiêu sắc.

Có thể nhận biết một ống kính máy ảnh hoặc một kính mắt chống tia phản xạ ở chỗ chúng có một ánh đỏ sậm (lam pha tím) khi đặt ở ánh sáng trắng. Thật vậy, một sự xử lí chống tia phản xạ được tính toán cho một bước sóng vàng (mắt nhạy cảm với nó hơn) : như vậy nó kém hiệu quả đối với các bước sóng ở hai đầu phổ nhìn thấy (lam và đỏ).

2 *1) Các điều kiện biên được nghiệm đúng, tại lúc t cho trước, cho mọi điểm của mặt phân cách hai môi trường, thành thử các vectơ sóng có cùng một hình chiếu trên mặt phẳng đó :* $\vec{k}_{iT}=\vec{k}_{rT}=\vec{k}_{tT}=k\sin\theta\vec{e}_y+0\vec{e}_z$

với $k = n\frac{\omega}{c}$. Thành phần DESCARTES thứ ba của chúng (thành phần pháp tuyến với giao diện, ở đây là $k_N = k_x$) được xác định bởi hệ thức tán sắc tương ứng với mỗi môi trường :

$$k_{rN}^2 + \left(n\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)^2 = \frac{n^2\omega^2}{c^2} \text{ và } k_{tN}^2 + \left(n\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Đối với sóng phản xạ, $k_{rN} < 0$. Đối với sóng truyền trong không khí trải ra trong khắp vùng $x > 0$, ta sẽ giữ nghiệm nào cho một biên độ sóng không phân kì. Cuối cùng, các vectơ sóng là :

$$\begin{cases} \vec{k}_i = n\frac{\omega}{c}(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) = k(\alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y) \\ \vec{k}_r = n\frac{\omega}{c}(-\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) = k(-\alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y). \\ \vec{k}_t = \frac{\omega}{c}(-J\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}\,\vec{e}_x + n\sin\theta\vec{e}_y) = k(-j\gamma\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y) \end{cases}$$

2) Sử dụng hệ thức cấu trúc của các SPCĐS, ta có thể tính được từ trường của ba sóng. Các trường điện từ có dạng :

$$\underline{\vec{E}}_i = E_0 e^{j\omega t} e^{-jkax - jk\beta y}\vec{e}_z$$

và $$\underline{\vec{B}}_i = \frac{nE_0}{c} e^{j\omega t} e^{-jk\alpha x - jk\beta y}(\beta\vec{e}_x - \alpha\vec{e}_y) \;;$$

$$\underline{\vec{E}}_r = \underline{E}_{0r} e^{j\omega t} e^{+jkax - jk\beta y}\vec{e}_z$$

và $$\underline{\vec{B}}_r = \frac{n\underline{E}_{0r}}{c} e^{j\omega t} e^{+jk\alpha x - jk\beta y}(\beta\vec{e}_x + \alpha\vec{e}_y) \;;$$

$$\underline{\vec{E}}_t = \underline{E}_{0t} e^{j\omega t} e^{-k\gamma x - jk\beta y}\vec{e}_z$$

và $$\underline{\vec{B}}_t = \frac{n\underline{E}_{0t}}{c} e^{j\omega t} e^{-k\gamma x - jk\beta y}(\beta\vec{e}_x + j\gamma\vec{e}_y).$$

Các điều kiện biên tại $x = 0$ dẫn đến :

- sự liên tục của thành phần tiếp tuyến của $\vec{E}$ (hoặc của thành phần pháp tuyến của $\vec{B}$) : $E_0 + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_{0t}$;
- sự liên tục của thành phần tiếp tuyến của $\vec{B}$: $\alpha(-E_0 + \underline{E}_{0r}) = j\gamma\,\underline{E}_{0t}$.

Ta rút ra :

$$\underline{E}_{0r} = \frac{\alpha + j\gamma}{\alpha - j\gamma}E_0 \text{ và } \underline{E}_{0t} = \frac{2\alpha}{\alpha - j\gamma}E_0.$$

điều đó hoàn tất việc xác định các sóng phản xạ và truyền qua.

3) Ta nhận thấy rằng $\underline{E}_{0r}$ có thể được viết thành $e^{j\phi}E_0$, tức là $|\underline{E}_{0r}| = |E_0|$. Các đẳng thức này chứng tỏ rằng có phản xạ toàn phần (tất cả năng lượng của sóng tới được thấy lại trong sóng phản xạ), phản xạ gây ra một sự lệch pha của sóng phản xạ so với sóng tới. Sự lệch pha, nói chung là không tầm thường, bằng π khi tia tới là là mặt.

4) Trường hợp nêu ra đúng là ứng với $\sin\theta > \frac{1}{n}$.

Trường điện từ của sóng truyền qua là :

$$\underline{\vec{E}}_t = \frac{2\alpha}{\alpha - j\gamma}E_0 e^{-k\gamma x} e^{j(\omega t - k\beta\gamma)}\vec{e}_z \;;$$

$$\underline{\vec{B}}_t = \frac{2\alpha}{\alpha - j\gamma}\frac{nE_0}{c} e^{-k\gamma x} e^{j(\omega t - k\beta y)}(\beta\vec{e}_x + j\gamma\vec{e}_y).$$

Sóng này truyền dọc theo mặt phân cách với vận tốc pha $v_\varphi = \frac{\omega}{k\beta} = \frac{c}{n\sin\theta}$, nhỏ hơn c.

Theo phương (Ox) vuông góc với phương truyền biên độ của nó giảm theo hàm mũ : sóng này không phải là sóng phẳng, và được gọi là sóng tắt. Nó đi sâu rất ít vào không khí vì thừa số $e^{-k\gamma x}$ cho phép xác định một độ sâu đặc trưng của sự xuyên thấu :

$$\frac{1}{k\gamma} = \frac{c}{\omega\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}} = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}} \approx 113\,\text{nm}.$$

Độ sâu này nói chung là rất nhỏ. Tới giới hạn phản xạ toàn phần, khi $\sin\theta$ dần tới $\frac{1}{n}$, độ sâu này phân kì (một cách lôgic).

Trung bình theo thời gian của vectơ POYNTING của sóng này là :

$$\langle\vec{\Pi}_t\rangle = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left(\frac{\underline{\vec{E}}_t \wedge \underline{\vec{B}}_t^*}{\mu_0 c}\right) = 2\frac{n}{\mu_0 c}\frac{\beta\alpha^2}{\alpha^2 + \gamma^2}E_0^2 e^{-2k\gamma x}\vec{e}_y.$$

Vectơ này hướng theo (Oy), như vậy không có sự truyền năng lượng nào vào không khí (phương (Ox)), và tất cả năng lượng tới lại được thấy lại ở sóng phản xạ.

3 1) Ta đặt $k = \frac{\omega}{c}$; các vectơ sóng của sóng tới, sóng phản xạ và sóng truyền qua ($\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$ và $\vec{k}_t$) có các thành phần :

$$\vec{k}_i \begin{vmatrix} 0 \\ n_1 k\sin i_1 \;\; (i_1 > 0) \;; \\ -n_1 k\cos i_1 \end{vmatrix} \qquad \vec{k}_r \begin{vmatrix} 0 \\ n_1 k\sin i_1' \;\; (i_1' > 0) \;; \\ n_1 k\cos i_1' \end{vmatrix}$$

$$\vec{k}_t \begin{vmatrix} 0 \\ n_2 k\sin i_2 \;\; (i_2 > 0). \\ -n_2 k\cos i_2 \end{vmatrix}$$

Điện trường và từ trường được viết thành :

- đối với sóng tới :

$$\underline{\vec{E}}_i \begin{vmatrix} \underline{E}_{ix} = E_{0i}e^{j(\omega t - n_1 k\sin i_1 y + n_1 k\cos i_1 z)} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

và $$\underline{\vec{B}}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \underline{\vec{E}}_i}{\omega} \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{B}_{iy} = -\frac{n_1}{c}\cos i_1 \underline{E}_{ix} \;; \\ \underline{B}_{iz} = -\frac{n_1}{c}\sin i_1 \underline{E}_{ix} \end{vmatrix}$$

- đối với sóng phản xạ :

$$\underline{\vec{E}}_r \begin{vmatrix} \underline{E}_{rx} = E_{0r}e^{j(\omega t - n_1 k\sin i_1' y - n_1 k\cos i_1' z)} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\underline{B}}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{\underline{E}}_r}{\omega} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{B}_{ry} = \dfrac{n_1}{c}\cos i_1' \underline{E}_{rx} \ ; \\ \underline{B}_{rz} = -\dfrac{n_1}{c}\sin i_1' \underline{E}_{rx} \end{vmatrix}$$

và

• *đối với sóng truyền qua :*

$$\vec{\underline{E}}_t \begin{vmatrix} \underline{E}_{tx} = E_{0t} e^{j(\omega t - n_2 k \sin i_2 y + n_2 k \cos i_2 z)} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\underline{B}}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{\underline{E}}_t}{\omega} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{B}_{ty} = -\dfrac{n_2}{c}\cos i_2 \underline{E}_{tx} \ . \\ \underline{B}_{tz} = -\dfrac{n_2}{c}\sin i_2 \underline{E}_{tx} \end{vmatrix}$$

và

Đương nhiên, các định luật DESCARTES đòi hỏi : $i_1 = i_1'$ và $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

a) *Trên mặt phẳng P mà phương trình là z = 0, có sự liên tục :*

• *của thành phần tiếp tuyến của* $\vec{E}$, *do đó* $E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$ *(1) ;*

• *của từ trường* $\vec{B}$ *(cả hai môi trường có cùng một độ từ thẩm* μ_0*) do đó :*

- *đối với thành phần tiếp tuyến :*

$$-\frac{n_1}{c}\cos i_1 E_{0i} + \frac{n_1}{c}\cos i_1' E_{0r} = -\frac{n_2}{c}\cos i_2 E_{0t} \qquad (2);$$

- *đối với thành phần pháp tuyến :*

$$-\frac{n_1}{c}\sin i_1 E_{0i} - \frac{n_1}{c}\sin i_1' E_{0r} = -\frac{n_2}{c}\sin i_2 E_{0t} \qquad (3).$$

Ta nhận xét rằng các hệ thức (1) và (3) là tương đương, vì ta có $n_1 \sin i_1 = n_1 \sin i_1' = n_2 \sin i_2$.

b) *Các hệ thức (1) và (2) dẫn đến :*

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{n_1\cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \quad \text{và} \quad \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2}.$$

c) *Đối với một SPCĐS, giá trị trung bình của vectơ POYNTING (thực) là :*

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\vec{\underline{E}} \wedge \vec{\underline{B}}^*}{\mu_0}\right) = \frac{1}{2} n c E_0^2 \vec{u}$$

ở đây $\vec{u}$ *là vectơ đơn vị của phương truyền sóng và* E_0 *được giả định là thực.*

Khi đó công suất trung bình $\langle \mathscr{P} \rangle$ *do sóng đó truyền tải qua một mặt* $\vec{S} = S\vec{N}$ *có vectơ đơn vị theo pháp tuyến là* $\vec{N}$, *được viết là :*

$$\langle \mathscr{P} \rangle = \langle \vec{\Pi} \rangle . \vec{S} = \frac{1}{2} n c E_0^2 S \,|\, \vec{u}.\vec{N} \,| \,.$$

Do đó, đối với một tiết diện S của mặt phân cách P, ta tìm được cho mỗi sóng tới, phản xạ và truyền qua một công suất bằng :

$$\langle \mathscr{P}_{i\perp} \rangle = \langle \Pi_i \rangle S \cos i_1 = \frac{1}{2} n_1 c E_{0i}^2 S \cos i_1 \ ;$$

$$\langle \mathscr{P}_{r\perp} \rangle = \langle \Pi_r \rangle S \cos i_1' = \frac{1}{2} n_1 c E_{0r}^2 S \cos i_1' \ ;$$

$$\langle \mathscr{P}_{t\perp} \rangle = \langle \Pi_t \rangle S \cos i_2 = \frac{1}{2} n_2 c E_{0t}^2 S \cos i_2 \ ;$$

từ đó ta rút ra :

$$R_\perp = \left(\frac{\langle \mathscr{P}_r \rangle}{\langle \mathscr{P}_i \rangle}\right)_\perp = \left(\frac{\langle \Pi_r \rangle}{\langle \Pi_i \rangle}\right)_\perp = \left(\frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2}\right)^2$$

$$T_\perp = \left(\frac{\langle \mathscr{P}_t \rangle}{\langle \mathscr{P}_i \rangle}\right)_\perp = \frac{\cos i_2}{\cos i_1}\left(\frac{\langle \Pi_t \rangle}{\langle \Pi_i \rangle}\right)_\perp = \frac{4 n_1 n_2 \cos i_1 \cos i_2}{(n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2)^2}.$$

Có thể nhận xét rằng khi sử dụng các định luật DESCARTES thì $R_\perp$ *cũng được viết dưới dạng :*

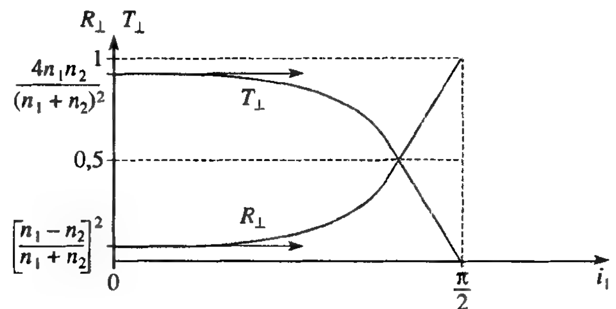
$$R_\perp = \left(\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)}\right)^2.$$

Ta thấy rằng $R_\perp + T_\perp = 1$, *hệ thức này diễn tả sự bảo toàn năng lượng điện từ : năng lượng do sóng tới mang lại được chia ra giữa sóng phản xạ và sóng truyền qua. Dáng vẻ của các đường cong* $R_\perp$ *và* $T_\perp$ *theo* i_1 *được biểu diễn trên sơ đồ dưới đây.*

Đối với $i_1 = 0$, *ta thấy lại các kết quả của giáo trình :*

$$R_\perp = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \quad \text{và} \quad T_\perp = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

Đối với $i_1 = \dfrac{\pi}{2}$, *thì* $R_\perp = 1$ *và* $T_\perp = 0$.



2) *Bây giờ các điện trường được viết thành (xem sơ đồ của câu 2)) :*

• *đối với sóng tới :*

$$\vec{\underline{B}}_i \begin{vmatrix} \underline{B}_{ix} = \dfrac{n_1}{c} E_{0i} e^{j(\omega t - n_1 k \sin i_1 y + n_1 k \cos i_1 z)} = \dfrac{n_1}{c}\underline{E}_i \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\underline{E}}_i \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_{iy} = \underline{E}_i \cos i_1 \ ; \\ \underline{E}_{iz} = \underline{E}_i \sin i_1 \end{vmatrix}$$

và

• *đối với sóng phản xạ :*

$$\vec{B}_r \left| \begin{array}{l} \underline{B}_{rx} = -\frac{n_1}{c} E_{0r} e^{j(\omega t - n_1 k \sin i_1' y - n_1 k \cos i_1' z)} = -\frac{n_1}{c} \underline{E}_r \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

và
$$\vec{\underline{E}}_r \left| \begin{array}{l} 0 \\ \underline{E}_{ry} = \underline{E}_r \cos i_1' \quad ; \\ \underline{E}_{rz} = -\underline{E}_r \sin i_1' \end{array} \right.$$

• *đối với sóng truyền qua :*

$$\vec{B}_t \left| \begin{array}{l} \underline{B}_{tx} = \frac{n_2}{c} E_{0t} e^{j(\omega t - n_2 k \sin i_2 y + n_2 k \cos i_2 z)} = \frac{n_2}{c} \underline{E}_t \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

và
$$\vec{\underline{E}}_t \left| \begin{array}{l} 0 \\ \underline{E}_{ty} = \underline{E}_t \cos i_2 \; . \\ \underline{E}_{tz} = \underline{E}_t \sin i_2 \end{array} \right.$$

Các hệ thức về sự liên tục của $\vec{B}$ và của thành phần tiếp tuyến của $\vec{E}$ trên mặt phẳng P bắt buộc :

$$n_1 E_{0i} - n_1 E_{0r} = n_2 E_{0t} \qquad (4)$$

$$\cos i_1 E_{0i} + \cos i_1 E_{0r} = \cos i_2 E_{0t} \qquad (5),$$

do đó :
$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{//} = \frac{n_1 \cos i_2 - n_2 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1}$$

và
$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{//} = \frac{2 n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} \, .$$

Chú ý :

Có thể kiểm tra rằng sự liên tục của thành phần pháp tuyến của vectơ điện dịch $\vec{D} = \varepsilon_0 n^2 \vec{E}$ dẫn đến :

$$n_1^2 (E_{0i} \sin i_i - E_{0r} \sin i_1') = n_2^2 E_{0t} \sin i_2 ,$$

tương tự như hệ thức (4), khi tính đến các hệ thức DESCARTES.

Các hệ số phản xạ và truyền qua đối với công suất là :

$$R_{//} = \left(\frac{\langle \mathscr{P}_r \rangle}{\langle \mathscr{P}_i \rangle}\right)_{//} = \left(\frac{\langle \Pi_r \rangle}{\langle \Pi_i \rangle}\right)_{//} = \left(\frac{n_1 \cos i_2 - n_2 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1}\right)^2$$

$$T_{//} = \left(\frac{\langle \mathscr{P}_t \rangle}{\langle \mathscr{P}_i \rangle}\right)_{//} = \frac{\cos i_2}{\cos i_1}\left(\frac{\langle \Pi_t \rangle}{\langle \Pi_i \rangle}\right)_{//} = \frac{4 n_1 n_2 \cos i_1 \cos i_2}{(n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1)^2} \, .$$

Ta luôn luôn có $R_{//} + T_{//} = 1$. Mặt khác, khi sử dụng $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, ta có thể viết $R_{//}$ dưới dạng :

$$R_{//} = \left(\frac{\sin i_2 \cos i_2 - \sin i_1 \cos i_1}{\sin i_2 \cos i_2 + \sin i_1 \cos i_1}\right)^2 = \left(\frac{\sin 2i_2 - \sin 2i_1}{\sin 2i_2 + \sin 2i_1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sin(i_1 - i_2)\cos(i_1 + i_2)}{\sin(i_1 + i_2)\cos(i_1 - i_2)}\right)^2 = \frac{\mathrm{tg}^2(i_1 - i_2)}{\mathrm{tg}^2(i_1 + i_2)} \, .$$

Biểu thức thứ hai này chỉ ra rằng $R_{//}$ bằng không nếu $i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2}$ (vì $\mathrm{tg}(i_1 + i_2)$ khi đó là vô hạn).

Góc tới tương ứng $i_1 = i_{1B}$ được gọi là góc BREWSTER (xem áp dụng 3) ; $\mathrm{tg}(i_1 + i_2)$ cũng nghiệm đúng :

$\sin i_{1B} = \frac{n_2}{n_1} \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_{1B}\right)$ *(định luật DESCARTES), do đó* $\mathrm{tg}\, i_{1B} = \frac{n_2}{n_1}$.

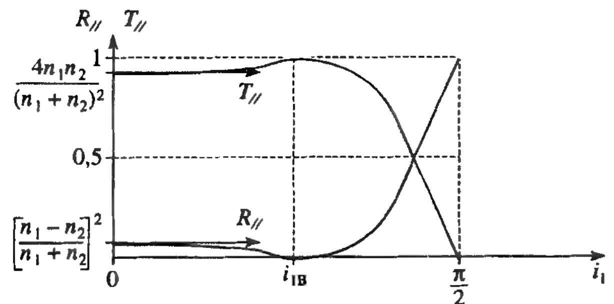
Sơ đồ dưới đây biểu diễn dáng vẻ của $R_{//}$ và $T_{//}$ theo i_1 :

• *đối với* $i_1 = 0$: $R_{//} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 = R_\perp$ và $T_{//} = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = T_\perp$;

• *đối với* $i_1 = i_{1B}$: $R_{//} = 0$ và $T_{//} = 1$;

• *đối với* $i_1 = \frac{\pi}{2}$: $R_{//} = 1$ và $T_{//} = 0$;

(xem các sơ đồ của câu 1)).



3) *Ở chương 6 ta đã nhận xét rằng ánh sáng "tự nhiên" không bị phân cực ; điện trường vẫn là trường ngang, nhưng có thể hướng theo mọi phương khả dĩ trong một mặt phẳng sóng. Tính chất đó là kết quả của sự không kết hợp giữa các nguồn nguyên tử tạo thành nguồn sáng.*

Vì các hệ số $R_\perp$ và $R_{//}$ nói chung là khác nhau, sự phản xạ của một ánh sáng tự nhiên cho ra một ánh sáng phân cực một phần. Đặc biệt, với góc tới BREWSTER $i_1 = i_{1B}$, ánh sáng phản xạ bị phân cực thẳng (điện trường vuông góc với mặt phẳng tới : $E_{r\perp} \neq 0$ và $E_{r//} = 0$).

Ở câu 2) ta đã tìm thấy $\mathrm{tg}\, i_{1B} = \frac{n_2}{n_1}$.

Người ta lợi dụng tính chất đó của sự phân cực sóng ở góc tới BREWSTER khi chụp ảnh một vật đặt sau một tấm cửa kính chẳng hạn : với một cái máy ảnh có kính lọc phân cực, và bằng cách chọn hướng thích hợp, ta có thể loại trừ ánh sáng phản xạ có hại (xem h.12, §3).

4 1) *Trong trường hợp sự tới vuông góc, các định luật phản xạ và khúc xạ không xét đến bản chất sự phân cực của sóng tới, sự phân cực đó được bảo toàn sau khi phản xạ hoặc khúc xạ. Các điện trường của các sóng ta xét đều là trường ngang. Dùng cách kí hiệu phức, ta luôn luôn có thể viết chúng dưới dạng $\underline{\vec{E}}_i = \underline{A}_i \vec{u}$, trong đó $\vec{u}$ là một vectơ đơn vị ngang chung cho tất cả các sóng. Sử dụng hệ thức cấu trúc của*

SPCĐS, các từ trường được viết thành $\vec{B}_i = \frac{n_1}{c}\underline{A}_i\vec{e}_z \wedge \vec{u}$ *hoặc* $\vec{B}_i = \frac{n_2}{c}\underline{A}_i\vec{e}_z \wedge \vec{u}$ *, tùy từng trường hợp.*

Sau đây, ta có thể tính toán với các biên độ vô hướng của các điện trường khác nhau. Chúng được viết thành :

- *đối với sóng tới :* $\underline{A}_i = \underline{A}_0 e^{j(\omega t - kz)}$;
- *đối với sóng phản xạ :* $\underline{A}_r = \underline{A}_{0r} e^{j(\omega t + kz)}$;
- *đối với sóng trong tấm :* $\underline{A} = \underline{a}e^{j(\omega t - k'z)} + \underline{a}'e^{j(\omega t + k'z)}$;
- *đối với sóng truyền qua :* $\underline{A}_t = \underline{A}_{0t} e^{j(\omega t - kz)}$;

với : $k = n_1\frac{\omega}{c}$ *và* $k' = n_2\frac{\omega}{c}$.

Các điều kiện biên cho ta :

- *tại* $z = 0$ *(mặt thứ nhất) :*

$$\underline{A}_0 + \underline{A}_{0r} = \underline{a} + \underline{a}' \quad \text{và} \quad n_1(\underline{A}_0 - \underline{A}_{0r}) = n_2(\underline{a} - \underline{a}') \ ;$$

- *tại* $z = e$ *(mặt thứ hai) :*

$$\underline{a}e^{-jk'e} + \underline{a}'e^{+jk'e} = \underline{A}_{0t}e^{-jke}$$

$$\text{và} \quad n_2(\underline{a}e^{-jk'e} - \underline{a}'e^{+jk'e}) = n_1\underline{A}_{0t}e^{-jke}.$$

Khử $\underline{a}$ *và* $\underline{a}'$, *ta được :*

$$\underline{A}_{0r} = \underline{A}_0 r\frac{1 - e^{-j\varphi}}{1 - r^2e^{-j\varphi}} \quad \text{và} \quad \underline{A}_{0t}e^{-jke} = \underline{A}_0 e^{-jk'e}tt'\frac{1}{1 - r^2e^{-j\varphi}}.$$

Các thông lượng tỉ lệ với môđun của các biên độ, ta rút ra :

$$R = \frac{|\underline{A}_{0r}|^2}{|\underline{A}_0|} = r^2\frac{2(1-\cos\varphi)}{1 + r^4 - 2r^2\cos\varphi}$$

$$\text{và} \quad T = \frac{|\underline{A}_{0t}|^2}{|\underline{A}_0|^2} = t^2t'^2\frac{1}{1 + r^4 - 2r^2\cos\varphi}.$$

2) *Các biên độ lần lượt là :*

- *lần phản xạ / truyền qua thứ nhất :*

$$\underline{a}_1 = t\underline{A}_0 \qquad \text{và} \qquad \underline{A}_{r1} = r\underline{A}_0 \ ;$$

- *lần đi - về thứ nhất trong tấm :*

$$\underline{a}_1'e^{+jk'e} = -r\underline{a}_1e^{-jk'e}, \quad \text{do đó} \quad \underline{a}_1' = -tr\underline{A}_0e^{-j\varphi} \ ;$$

$$\underline{A}_{t1}e^{-jke} = t'\underline{a}_1e^{-jk'e}, \quad \text{do đó} \quad \underline{A}_{t1}e^{-jke} = tt'\underline{A}_0e^{-jk'e} \ ;$$

$$\underline{a}_2 = -r\underline{a}_1', \qquad \text{do đó} \quad \underline{a}_2 = tr^2\underline{A}_0e^{-j\varphi} \ ;$$

$$\underline{A}_{r2} = t'\underline{a}_1', \qquad \text{do đó} \quad \underline{A}_{r2} = -tt'r\underline{A}_0e^{-j\varphi} \ ;$$

- *lần đi - về thứ hai trong tấm :*

$$\underline{A}_{r3} = \underline{A}_{r2}r^2e^{-j\varphi} \quad \text{và} \quad \underline{A}_{t2} = \underline{A}_{t1}r^2e^{-j\varphi},$$

và cứ tiếp tục như thế ... Vậy ta có :

$$\underline{A}_{0r} = \sum_{p=1}^{\infty}\underline{A}_{r,p} = \underline{A}_0\left(r - tt're^{-j\varphi}\sum_{p=0}^{\infty}(r^2e^{-j\varphi})^p\right)$$

$$= \underline{A}_0 r\left(1 - (1 - r^2)e^{-j\varphi}\frac{1}{1 - r^2e^{-j\varphi}}\right) = \underline{A}_0 r\left(\frac{1 - e^{-j\varphi}}{1 - r^2e^{-j\varphi}}\right)$$

$$\underline{A}_{0t}e^{-jke} = \sum_{p=1}^{\infty}\underline{A}_{t,p}e^{-jke} = \underline{A}_0e^{-jk'e}\left(tt'\sum_{p=0}^{\infty}(r^2e^{-j\varphi})^p\right)$$

$$= \underline{A}_0e^{-jk'e}tt'\frac{1}{1 - r^2e^{-j\varphi}}$$

các kết quả này phù hợp với các kết quả trên.

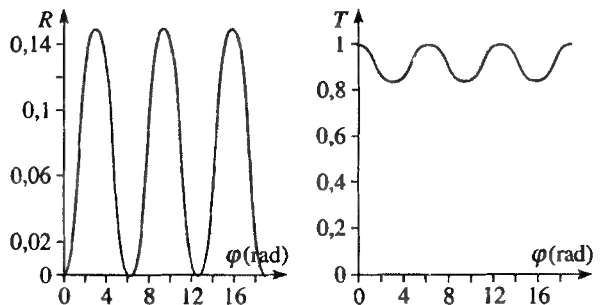
3) *Ta nghiệm được rằng :*

$$R + T = \frac{2r^2(1-\cos\varphi) + t^2t'^2}{1 + r^4 - 2r^2\cos\varphi} = \frac{2r^2(1-\cos\varphi) + (1-r^2)^2}{1 + r^4 - 2r^2\cos\varphi} = 1,$$

đó là kết quả ta chờ đợi, vì sự khảo sát của ta không tính đến một sự hấp thụ nào đó của tấm.

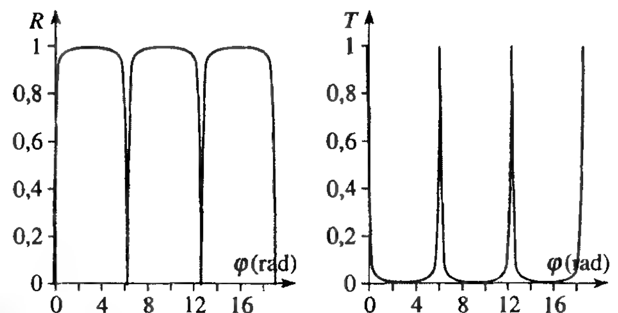
4) *Đối với giao diện không khí - thủy tinh, sự phản xạ là nhỏ, vì* $r = -0{,}2$ *và* $r^2 = 0{,}04$.

Hai sóng phản xạ đầu tiên có biên độ lớn hơn nhiều các sóng tiếp theo, do đó $\underline{A}_{0r} \approx \underline{A}_{r1} + \underline{A}_{r2}$. *Sóng truyền qua thứ nhất có biên độ lớn hơn nhiều các sóng tiếp theo :* $\underline{A}_t \approx \underline{A}_{t1}$. *Theo một quan điểm cơ học, có thể nói rằng trong trường hợp này, trong thực tế có thể quan sát được sự giao thoa của hai sóng do phản xạ (xem H-Prépa, Quang học sóng, lớp đệ nhị).*



Biểu đồ của $R = f(\varphi)$ *và* $T = g(\varphi)$ *chứng tỏ rõ ràng rằng chỉ riêng các giao thoa do phản xạ có một sự tương phản đáng lưu ý, trong khi đó thì sự tương phản là yếu trong trường hợp truyền qua, vì* $T \approx \text{cte} \approx 1$.

5) *Sự quan sát giao thoa do truyền qua là bổ ích khi năng suất phản xạ của các mặt của tấm là lớn. Có thể thực hiện được tình thế này trong một giao thoa kế FABRY-PÉROT (xem H-Prépa, Quang học sóng, lớp đệ nhị).*



Trong trường hợp này, khó nhìn thấy sự giao thoa do phản xạ, vì sóng phản xạ thứ nhất có biên độ lớn hơn nhiều các sóng sau : các vân giao thoa bị chìm trong một cái nền sáng quá. Ngược lại, tất cả các sóng truyền qua đều có biên độ giảm chậm. Ta sẽ quan sát được sự giao thoa với nhiều sóng.

Chỉ có các giá trị $\varphi = 2m\pi$ (m nguyên) ứng với một sự truyền quan trọng : với một độ dày đã cho, điều này ứng với những tần số ưu tiên (cộng hưởng), và có thể được lợi dụng để chế tạo các kính lọc, gọi là kính lọc giao thoa.

Để có được một sự phản xạ quan trọng, phải xử lí các mặt của tấm bằng các lớp phủ kim loại (như trên các kính mắt của người leo núi băng). Trong trường hợp này hệ số r là phức, nhưng điều đó không làm thay đổi bao nhiêu sự khảo sát : chỉ cần đưa pha của r vào biểu thức của φ, điều đó cũng có nghĩa là tịnh tiến biểu đồ của T trên đây.

5 1) a) *Ta biết rằng (xem chương 7) thời gian hồi phục τ của một vật dẫn tốt là vào cỡ 10^{-14}s . Chu kì của các sóng ta xét lớn hơn nhiều thời gian hồi phục đó, và độ dẫn điện (phức) của kim loại có thể coi như bằng giá trị tĩnh γ_0 của nó.*

b) *Trong kim loại thì $\rho = 0$ (sóng ngang) và $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$. Trong miền tần số ta xét, $\varepsilon_0\omega \ll \gamma_0$ và dòng điện dịch là không đáng kể so với dòng điện dẫn. Từ các phương trình MAXWELL đã đơn giản hóa :*

$$\operatorname{div}\vec{E} = \vec{0},\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\ \operatorname{div}\vec{B} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\gamma_0\vec{E},$$

ta rút ra phương trình lan truyền.

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\gamma_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

c) *Hệ thức tán sắc là :*

$$-\underline{k}''^2 = j\mu_0\gamma_0\omega \text{, tức là } \underline{k}'' = \frac{1-j}{\delta},$$

trong đó $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$ *là bề dày của da.*

Hệ thức cấu trúc của một SPCĐS $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\underline{\vec{k}}''\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}$ *chỉ ra rằng trong kim loại thì từ trường chậm pha* $\dfrac{\pi}{4}$ *(agument của [1 − j]) so với điện trường.*

d) *Các phương trình MAXWELL đơn giản hóa giống như các phương trình thu được trong trường hợp một điện môi tđđ sao cho* $\underline{\varepsilon}_r = \underline{n}^2$, *với* $\underline{n} = (1-j)\dfrac{c}{\delta\omega}$. *Đối với sự lan truyền theo chiều tăng của z thì* $\underline{k}'' = \underline{n}\dfrac{\omega}{c}$.

2) a) $k' = k = \dfrac{\omega}{c}$ *đối với sóng phản xạ và* $\underline{k}'' = \underline{n}\dfrac{\omega}{c}$ *đối với sóng truyền qua.*

b) $\underline{\vec{B}}_1 = \underline{\vec{B}}_{01}e^{j(\omega t - kz)}$, $\underline{\vec{B}}_1' = \underline{\vec{B}}_{01}'e^{j(\omega t + kz)}$, $\underline{\vec{B}}_2 = \underline{\vec{B}}_{02}e^{-\frac{z}{\delta}}e^{j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}$

với $\underline{\vec{B}}_{01} = \dfrac{\vec{e}_z\wedge\underline{\vec{E}}_{01}}{c}$, $\underline{\vec{B}}_{01}' = -\dfrac{\vec{e}_z\wedge\underline{\vec{E}}_{01}'}{c}$ *và* $\underline{\vec{B}}_{02} = \dfrac{\underline{n}\vec{e}_z\wedge\underline{\vec{E}}_{02}}{c}$.

c) *Trên mặt phẳng z = 0, có sự liên tục của điện trường tiếp tuyến, ở đây nó trùng với điện trường tổng cộng (sóng ngang, góc tới bằng không). Cũng có sự liên tục của từ trường tiếp tuyến (không có dòng mặt đối với một vật dẫn có độ dẫn điện hữu hạn), nó cũng trùng với trường tổng cộng. Ta có :*

$$\underline{\vec{E}}_{01} + \underline{\vec{E}}_{01}' = \underline{\vec{E}}_{02} \quad \text{và} \quad \frac{\vec{e}_z\wedge\underline{\vec{E}}_{01}}{c} - \frac{\vec{e}_z\wedge\underline{\vec{E}}_{01}'}{c} = \frac{\underline{n}\vec{e}_z\wedge\underline{\vec{E}}_{02}}{c}.$$

Tích vectơ của đẳng thức thứ hai với vectơ $\vec{e}_z$ cho ta :

$$\underline{\vec{E}}_{01} - \underline{\vec{E}}_{01}' = \underline{n}\underline{\vec{E}}_{02}.$$

Ta rút ra : $\underline{\vec{E}}_{01}' = \underline{r}\,\underline{\vec{E}}_{01}$ *và* $\overrightarrow{\underline{E}_{02}} = \underline{\tau}\,\overrightarrow{\underline{E}_{01}}$ *với :*

$$\underline{r} = \frac{1-\underline{n}}{1+\underline{n}} = \frac{1-\dfrac{(1-j)c}{\delta\omega}}{1+\dfrac{(1-j)c}{\delta\omega}} \quad \text{và} \quad \underline{\tau} = \frac{2}{1+\underline{n}} = \frac{2}{1+\dfrac{(1-j)c}{\delta\omega}}.$$

3) a) $\langle\vec{\Pi}_1\rangle = \mathscr{R}e\left(\dfrac{1}{2\mu_0}\langle\underline{\vec{E}}_1\wedge\underline{\vec{B}}_1^*\rangle\right) = \dfrac{|\underline{E}_{01}|^2}{2\mu_0 c}\vec{e}_z$;

$$\langle\vec{\Pi}_1'\rangle = -\frac{|\underline{E}_{01}'|^2}{2\mu_0 c}\vec{e}_z\ ;\ \langle\vec{\Pi}_2\rangle = \frac{\mathscr{R}e(\underline{n}^*)|\underline{E}_{02}|^2}{2\mu_0 c}\vec{e}_z = \frac{|\underline{E}_{02}|}{2\mu_0\delta\omega}\vec{e}_z.$$

b) *Thông lượng của vectơ POYNTING qua một tiết diện đơn vị của giao diện z = 0 bằng môđun của vectơ POYNTING tại z = 0. Ta rút ra các hệ số :*

- *phản xạ (về công suất) :* $R = -\dfrac{\langle\vec{\Pi}_1'.\vec{e}_z\rangle}{\langle\vec{\Pi}_1.\vec{e}_z\rangle} = \dfrac{1+\left(1-\dfrac{\delta\omega}{c}\right)^2}{1+\left(1+\dfrac{\delta\omega}{c}\right)^2}$;
- *truyền qua (về công suất) :* $T = \dfrac{\langle\vec{\Pi}_2.\vec{e}_z\rangle}{\langle\vec{\Pi}_1.\vec{e}_z\rangle} = \dfrac{4\dfrac{\delta\omega}{c}}{1+\left(1+\dfrac{\delta\omega}{c}\right)^2}$.

c) *Dĩ nhiên ta có thể kiểm tra rằng* $R + T = 1$, *điều đó diễn đạt sự bảo toàn công suất điện từ khi đi qua giao diện z = 0.*

d) *Mật độ công suất khối phân tán do hiệu ứng JOULE, theo cách kí hiệu thực, là :*

$$\vec{j}_2.\vec{E}_2 = \gamma_0\vec{E}_2.\vec{E}_2.$$

Giá trị trung bình của nó, theo cách kí hiệu phức, là $\dfrac{\gamma_0}{2}\left|\underline{\vec{E}}_2\right|^2$.

Đối với hình trụ tiết diện S, ta có :

$$\langle\mathscr{P}_J\rangle = S\int_0^\infty \frac{\gamma_0}{2}\left|\underline{\vec{E}}_2\right|^2 dz = S\frac{\gamma_0}{2}\left|\underline{\vec{E}}_{02}\right|^2\int_0^\infty e^{-2\frac{z}{\delta}}dz$$

$$= S\frac{\gamma_0\delta}{4}|\underline{\tau}|^2\left|\underline{\vec{E}}_{01}\right|^2.$$

Sử dụng giá trị của $\underline{\tau}$ và δ, ta kiểm tra được rằng :

$$\langle\mathscr{P}_J\rangle = ST\frac{|\underline{E}_{01}|^2}{2\mu_0 c} = S\left\langle\left|\vec{\Pi}_2\right|\right\rangle_{z=0},$$

hệ thức này diễn đạt rằng tất cả năng lượng điện từ đi vào kim loại đều bị phân tán ở đó theo hiệu ứng JOULE.

4) a) Mật độ lực khối tác dụng lên môi trường là $\vec{f}_v = \rho_2\vec{E}_2 + \vec{j}_2 \wedge \vec{B}_2$ (theo cách kí hiệu thực).

Biết rằng $\rho = 0$ và $\vec{j} = \gamma_0\vec{E}$, có thể viết giá trị trung bình của nó, trong cách kí hiệu phức, dưới dạng $\langle\vec{f}_v\rangle = \frac{\gamma_0}{2}\mathscr{R}e(\underline{\vec{E}}_2 \wedge \underline{\vec{B}}_2^*)$. Sử dụng chỉ số $\underline{n}$ của kim loại, ta có :

$$\langle\vec{f}_v\rangle = \frac{\gamma_0}{2c}\mathscr{R}e(\underline{n}^*)\left|\underline{\vec{E}}_2\right|^2\vec{e}_z = \frac{\gamma_0}{2\delta\omega}\frac{4}{\left|1+\underline{n}\right|^2}\left|\underline{\vec{E}}_{01}\right|^2 e^{-\frac{2z}{\delta}}\vec{e}_z .$$

Sóng tới là một SPCĐS điện từ lan truyền trong chân không, do đó :

$\langle e_i\rangle = \varepsilon_0\frac{\left|\underline{\vec{E}}_{01}\right|^2}{2}$, và ta có $\langle\vec{f}_v\rangle = \frac{4\gamma_0\langle e_i\rangle}{\varepsilon_0\delta\omega\left|1+\underline{n}\right|^2}e^{-\frac{2z}{\delta}}\vec{e}_z$.

b) Lực tổng cộng tác dụng lên một hình trụ có tiết diện S, và các đường sinh song song với (Oz) là

$$\langle\vec{F}\rangle = \int_{z=0}^{\infty}\langle\vec{f}_v\rangle S.\mathrm{d}z = 2\langle e_i\rangle\left(\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0\omega\left|1+\underline{n}\right|^2}\right)S\vec{e}_z.$$

Thế nhưng trong miền tần số ta xét thì $|\underline{n}| \gg 1$, thành thử lực đó có thể viết được là $\langle\vec{F}\rangle = \langle P\rangle S\vec{e}_z$ với $\langle P\rangle \approx 2\langle e_i\rangle$.

<u>Chú ý :</u>

Ta thấy lại được kết quả của bài tập 4, chương 5, ở đó ta đã xét ngay từ đầu mô hình kim loại lí tưởng mà ở đây ta sẽ nói kĩ hơn một chút.

5) a) Đối với các giá trị bằng số đã cho : Bề dày của da $\delta = 5\ \mu$m là rất nhỏ. Tích $k\delta = \frac{\delta\omega}{c} \approx 10^{-4}$ là rất nhỏ. Do đó môđun của chỉ số phức của kim loại là rất lớn. Ta có :

$$\underline{r} \approx (-1)\left(1-\frac{2}{\underline{n}}\right) \approx -1,\ R \approx 1-2k\delta = 1-2.10^{-4} \approx 1,$$

$$\text{và}\quad T = 1-R \approx 0.$$

b) Lấy $\delta = 0$ cũng nghĩa là coi các kết quả trên là trùng với giới hạn của chúng : $r = -1$, $R = 1$ và $T = 0$. Ta thấy rằng khi đó kim loại giống như một cái gương phản xạ lí tưởng (nó không phân tán năng lượng).

Ta thu được giới hạn $\delta = 0$ bằng cách cho độ dẫn điện của kim loại dẫn đến vô hạn : "$\gamma \to \infty$" (các giá trị bằng số thu được là do tần số rất lớn và vật liệu dẫn điện rất tốt). Sự bình luận này biện minh cho tính từ "lí tưởng".

c) Trường điện từ của sóng truyền qua là :

$$\underline{\vec{E}}_2 = \frac{2}{1+\underline{n}}\underline{\vec{E}}_{01}e^{-\frac{z}{\delta}}e^{j\left(\omega t-\frac{z}{\delta}\right)};$$

$$\underline{\vec{B}}_2 = \frac{2\underline{n}}{1+\underline{n}}\frac{\vec{e}_z \wedge \underline{\vec{E}}_{01}}{c}e^{-\frac{z}{\delta}}e^{j\left(\omega t-\frac{z}{\delta}\right)}$$

Ở giới hạn của vật dẫn lí tưởng, ta chỉ có một trường điện từ bằng không cho mọi $z > 0$.

d) Trong lòng kim loại, vectơ mật độ dòng điện là :

$$\underline{\vec{j}}_2 = \frac{2\gamma_0}{1+\underline{n}}\underline{\vec{E}}_{01}e^{-\frac{z}{\delta}}e^{j\left(\omega t-\frac{z}{\delta}\right)}.$$

Giới hạn của nó bằng không đối với mọi $z > 0$, khi γ_0 dần tới ∞ và δ dần tới 0. Ngược lại giá trị của nó tại $z = 0$ là phân kì khi ta lấy giới hạn đó. Mô hình giới hạn dẫn đến một dòng điện vô hạn bị hãm bên trong một bề dày kim loại vô cùng nhỏ, và dĩ nhiên khiến ta nghĩ đến một sự phân bố dòng trên bề mặt. Ta có thể kiểm tra sự đúng đắn của mô hình này bằng cách tính :

$$\int_{z=0}^{\infty}\underline{\vec{j}}_2\mathrm{d}z = \gamma_0\frac{2}{1+\underline{n}}\underline{\vec{E}}_{01}e^{j\omega t}\int_{z=0}^{\infty}e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}}\mathrm{d}z$$

$$= \gamma_0\frac{2}{1+\underline{n}}\frac{\delta}{1+j}\underline{\vec{E}}_{01}e^{j\omega t}.$$

Ở giới hạn, δ dần tới 0 thì γ_0 dần tới ∞ của vật dẫn lí tưởng. Kết quả này có một giới hạn hữu hạn : $\frac{2}{\mu_0 c}\underline{\vec{E}}_{01}e^{j\omega t}$, và ứng với mật độ dòng điện mặt tương đương $\underline{\vec{j}}_s$.

e) Ở giới hạn của vật dẫn lí tưởng, ta phải sử dụng một mô hình mặt của sự dẫn điện, và sự liên tục của từ trường tiếp tuyến không còn áp dụng được nữa.

Ta vẫn còn viết được sự liên tục của điện trường tiếp tuyến, khi biết rằng trường bằng không trong lòng vật dẫn lí tưởng, cụ thể là $\underline{\vec{E}}_{01} + \underline{\vec{E}}'_{01} = \vec{0}$. Ta có được ngay : $\underline{r} = -1$.

6 **1) a)** Các phương trình chuyển động (xem chương 7) cho ta :

$$\underline{\dot{\vec{v}}}_e = j\frac{e}{m\omega}\underline{\vec{E}}_2 \quad \text{và} \quad \underline{\vec{v}}_i = -j\frac{e}{M\omega}\underline{\vec{E}}_2,$$

vậy mật độ dòng điện khối là :

$$\underline{\vec{j}}_v = -Ne\underline{\vec{v}}_e + Ne\underline{\vec{v}}_i = -j\frac{Ne^2}{\omega}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right)\underline{\vec{E}}_2.$$

Vì $\left|\frac{\underline{v}_i}{\underline{v}_e}\right| = \frac{m}{M} = 5,45.10^{-4}$, sự đóng góp của các iôn là không đáng kể, và $\underline{\vec{j}}_v \approx -j\frac{Ne^2}{m\omega}\underline{\vec{E}}_2$.

b) Phương trình lan truyền điện trường của sóng ngang là :

$$\Delta\underline{\vec{E}}_2 = \mu_0\gamma\frac{\partial\underline{\vec{E}}_2}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}_2}{\partial t^2}.$$

Ta rút ra hệ thức tán sắc $\underline{k}_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$ với :

$$\omega_p^2 = \mu_0 c^2\frac{Ne^2}{m} = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0},\quad \text{tức là } f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 6,95\ \text{MHz}.$$

c) Trong một điện môi có chiết suất $\underline{n}$, hệ thức tán sắc là $\underline{k}_2^2 = \underline{n}^2\frac{\omega^2}{c}$, vậy ta phải lấy $\underline{n}^2 = 1-\frac{\omega_p^2}{\omega}$. Chỉ số $\underline{n}$ là thực nếu $\omega > \omega_p$ và là thuần túy ảo nếu $\omega < \omega_p$.

2) a) Các trường điện từ tới, phản xạ và truyền qua được viết thành :

$\underline{\vec{E}}_1 = \underline{E}_{01}e^{j(\omega t-kz)}\vec{e}_x$; $\underline{\vec{E}}'_1 = \underline{E}'_{01}e^{j(\omega t+kz)}\vec{e}_x$; $\underline{\vec{E}}_2 = \underline{E}_{02}e^{j(\omega t-k_2 z)}\vec{e}_x$;

$$\underline{\vec{B}}_1 = \frac{\underline{E}_{01}}{c} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y \; ; \quad \underline{\vec{B}}_1' = -\frac{\underline{E}_{01}'}{c} e^{j(\omega t + kz)} \vec{e}_y \; ;$$

$$\underline{\vec{B}}_2 = \underline{n} \frac{\underline{E}_{02}}{c} e^{j(\omega t - \underline{k}_2 z)} \vec{e}_y \quad \text{với} \quad k = \frac{\omega}{c} \quad \text{và} \quad \underline{k}_2 = \underline{n} \frac{\omega}{c}.$$

Các điều kiện biên trên giao diện $z = 0$ dẫn đến :

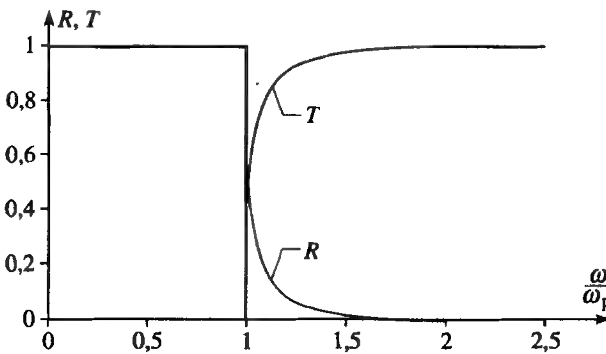
- $\underline{E}_{01} + \underline{E}_{01}' = \underline{E}_{02}$ *(sự liên tục của $\vec{E}$ tiếp tuyến và cũng là của $\vec{E}$ đối với các sóng ngang này) ;*
- $\underline{E}_{01} - \underline{E}_{01}' = \underline{n}\,\underline{E}_{02}$ *(sự liên tục của $\vec{B}$ tiếp tuyến, không có dòng mặt trên plasma với độ dẫn điện hữu hạn).*

b) *Ta rút ra* $\underline{r} = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}}$, $R = \frac{\langle \Pi_1' \rangle}{\langle \Pi_1 \rangle} = \frac{|\underline{E}_{01}'|^2}{|\underline{E}_{01}|^2} = |\underline{r}|^2$.

α) *Đối với* $\omega < \omega_p$: $\underline{n} = j\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$ và $R = 1$; *có thể coi giao diện như một cái gương phản xạ lí tưởng.*

β) *Đối với* $\omega > \omega_p$: $\underline{n} = n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ và $R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \right)^2$.

γ) *Đồ thị dưới đây chỉ rõ sự giảm nhanh của hệ số phản xạ về năng lượng, ngay khi tần số sóng trở nên lớn hơn tần số plasma của môi trường.*



Áp dụng bằng số : $f = 7$ MHz, do đó $R = 0{,}62$; $f = 8$ MHz, do đó $R = 0{,}11$.

d) *Ở* **§2.2**, *ta dễ thấy rằng $R + T = 1$, điều đó diễn tả sự bảo toàn năng lượng (trong sự khảo sát này không khí và plasma được coi như những môi trường không phân tán).*

Đối với $f > f_p$, chỉ số $\underline{n}$ là thực : $\underline{n} = n$. Hệ thức DESCARTES : $\sin i_1 = n \sin i_1'$ *chỉ ra rằng sẽ có phản xạ toàn phần nếu góc tới nghiệm đúng :*

$$\sin i_1 > \sin i_{1L} = n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \quad \text{do đó} \quad \cos i_{1L} = \frac{\omega_p}{\omega} = \frac{f_p}{f}.$$

Áp dụng bằng số : $i_{1L} \approx 55^\circ$.

7 **1)** *Từ phương trình lan truyền* $\Delta \vec{E} - \frac{n_i^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ *có giá trị trong từng môi trường, ta rút ra* $\frac{d^2 A}{dx^2} + (k_i^2 - \alpha^2) A = 0$.

2) a) *Tại* $x = \pm\frac{a}{2}$ *(và tại mọi lúc, đối với mọi z), có sự liên tục :*

- *của thành phần tiếp tuyến của trường $\vec{E}$, và ở đây là của $\vec{E}$, do đó của A ;*
- *của từ trường $\vec{B}$ (vì $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$).*

Trong mỗi lớp, ta có thể tính trường $\vec{B}$ bằng phương trình MAXWELL-FARADAY $\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, *ta được :*

$$\underline{\vec{B}} = \left(-\frac{\alpha}{\omega} A \vec{e}_x + j \frac{1}{\omega} \frac{dA}{dx} \vec{e}_z \right) e^{j(\omega t - \alpha z)}.$$

Sự liên tục của thành phần pháp tuyến của $\vec{B}$ lại đòi hỏi sự liên tục của A.

Sự liên tục của thành phần tiếp tuyến của $\vec{B}$ kéo theo sự liên tục của $\frac{dA}{dx}$.

b) *Ta đặt* $\beta_i^2 = k_i^2 - \alpha^2$ *nếu* $\alpha < k_i$ *và* $\gamma_i^2 = \alpha^2 - k_i^2$ *nếu* $\alpha > k_i$ *(đối với $i = 1$ hoặc 2).*

Ta giả định β_i và γ_i là dương (giả thiết này không làm thay đổi tính tổng quát của nghiệm). Bảng sau đây tóm tắt những giá trị khả dĩ khác nhau đối với hàm A(x), có tính đến những điều kiện biên ở vô cực (trường không thể phân kì khi $|x|$ trở nên rất lớn), nhưng không tính đến những điều kiện biên trên các giao diện $x = \pm\frac{a}{2}$ *(các điều kiện này áp đặt những hệ thức giữa các hằng số E_1 và E_2).*

	$-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$	$\frac{a}{2} \le x$	$x \le -\frac{a}{2}$
$k_2 < k_1 < \alpha$ **nghiệm chẵn** **nghiệm lẻ**	$A = E_1 \operatorname{ch}\gamma_1 x$ $A = E_1 \operatorname{sh}\gamma_1 x$	$A = E_2 e^{-\gamma_2 x}$ $A = E_2 e^{-\gamma_2 x}$	$A = E_2 e^{+\gamma_2 x}$ $A = -E_2 e^{+\gamma_2 x}$
$k_2 < \alpha \le k_1$ **nghiệm chẵn** **nghiệm lẻ**	$A = E_1 \cos\beta_1 x$ $A = E_1 \sin\beta_1 x$	$A = E_2 e^{-\gamma_2 x}$ $A = E_2 e^{-\gamma_2 x}$	$A = E_2 e^{+\gamma_2 x}$ $A = -E_2 e^{+\gamma_2 x}$
$\alpha \le k_2 < k_1$ **nghiệm chẵn** **nghiệm lẻ**	$A = E_1 \cos\beta_1 x$ $A = E_1 \sin\beta_1 x$	$A = E_2 \cos\beta_2 x$ $A = E_2 \sin\beta_2 x$	$A = E_2 \cos\beta_2 x$ $A = -E_2 \sin\beta_2 x$

Khi $k_1 < a$, rất dễ kiểm tra được rằng các nghiệm không thể đảm bảo đồng thời sự liên tục của A và của $\frac{dA}{dx}$ tại $x = \pm\frac{a}{2}$ (vì $\gamma_1 \ne \gamma_2$), và ta phải bỏ các nghiệm này.

c) *Khi $k_2 \ge \alpha$, điện trường có cùng một dạng trong vỏ và trong lõi :*

$$\underline{\vec{E}} = A \cos\beta_i x\, e^{j(\omega t - \alpha z)} \vec{e}_y \quad \text{hay} \quad \underline{\vec{E}} = A \sin\beta_i x\, e^{j(\omega t - \alpha z)} \vec{e}_y$$

($i = 1$ hoặc 2). Trong điều kiện đó, phần lớn năng lượng điện từ lan truyền trong vỏ (nó là vô hạn) và một phần rất nhỏ của năng lượng lan truyền trong lõi. Ta cũng bỏ nghiệm này.

3) *Như đề bài đã chỉ rõ,* $\beta_1 = \beta$ *và* $\gamma_2 = \gamma$.

a) *Sử dụng các nghiệm cho trong bảng trên đây đối với* $k_2 < \alpha \le k_1$, *các điều kiện biên tại* $x = \pm\frac{a}{2}$ *đòi hỏi :*

• *đối với các nghiệm chẵn :*

$$A = E_1\cos\beta\frac{a}{2} = E_2 e^{-\gamma\frac{a}{2}} \text{ và } \frac{dA}{dx} = -E_1\beta\sin\beta\frac{a}{2} = -E_2\gamma e^{-\gamma\frac{a}{2}},$$

từ đó, khi tính tỉ số của hai biểu thức này, ta rút ra $\gamma = \beta\,\mathrm{tg}\,\beta\frac{a}{2}$, *tức là hệ thức mà đề bài đã đề xuất (bằng cách nhân với* $\frac{a}{2}$ *);*

• *đối với các nghiệm lẻ :*

$$A = E_1\sin\beta\frac{a}{2} = E_2 e^{-\gamma\frac{a}{2}} \text{ và } \frac{dA}{dx} = E_1\beta\cos\beta\frac{a}{2} = -E_2\gamma e^{-\gamma\frac{a}{2}},$$

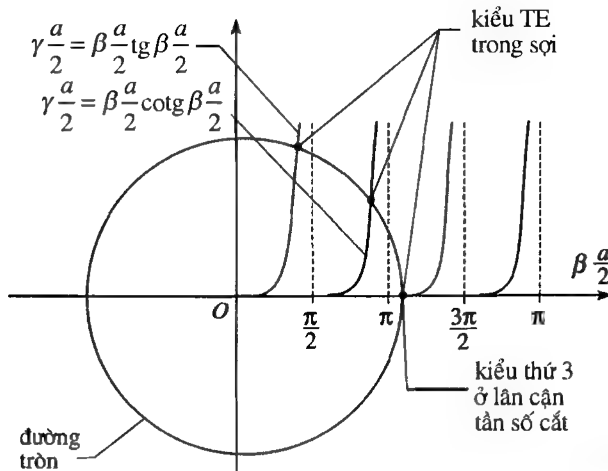
do đó $\gamma = -\beta\mathrm{cotg}\beta\frac{a}{2}$.

b) *Sơ đồ dưới đây biểu diễn các đồ thị của* $\gamma\frac{a}{2}$ *theo* $\beta\frac{a}{2}$ *đối với các nghiệm chẵn và lẻ (đừng quên rằng* β *và* γ *là dương) và đường tròn có phương trình :*

$$\left(\frac{\beta a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}((k_1^2 - \alpha^2) + (\alpha^2 - k_2^2)) = \frac{a^2}{4}(k_1^2 - k_2^2).$$

Các giao điểm của đường tròn này với hai đường cong $\gamma\frac{a}{2} = \beta\frac{a}{2}\mathrm{tg}\,\beta\frac{a}{2}$, *hoặc* $\gamma\frac{a}{2} = -\beta\frac{a}{2}\mathrm{cotg}\beta\frac{a}{2}$ *cho ta các giá trị của* $\beta\frac{a}{2}$, *và do đó giá trị của a, chúng xác định các kiểu dẫn sóng T.E. của sợi. Số lượng N các giao điểm được cho bởi* $N = p + 1$, *số nguyên p được xác định bởi* $p\frac{\pi}{2} = \mathrm{int}\left(\frac{a}{2}\sqrt{k_1^2 - k_2^2}\right)$ *(trên sơ đồ sau đây, có ba giao điểm). Thay* k_1 *và* k_2 *bằng giá trị của chúng, ta rút ra :*

$$N = 1 + \mathrm{int}\left(\frac{\omega a}{\pi c}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right).$$



4) a) *Kiểu T.E thứ n tồn tại nếu* $n \ge 1 + \left(\frac{\omega\alpha}{\pi c}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)$, *tức là nếu mạch số* ω *nghiệm đúng* $\omega \ge \omega_{nc} = (n-1)\frac{\pi c}{a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$.

Đối với mạch số ω_{nc} *thì* γ *bằng không (xem sơ đồ) và* $\beta^2 = k_1^2 = -k_2^2$. *Ta rút ra :*

$$\alpha^2 = k_1^2 - \beta^2 = k_2^2, \text{ rồi } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 - k_2^2}} = \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}.$$

b) *Trong lõi của sợi, điện trường được viết thành :*

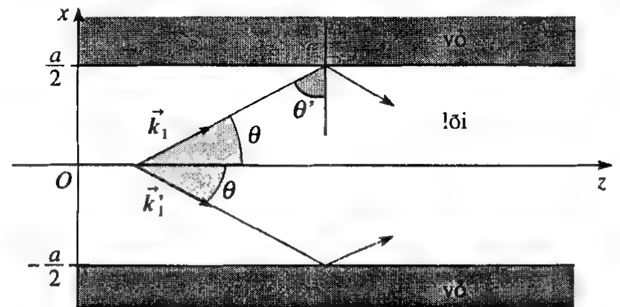
• *đối với các kiểu chẵn :*

$$\underline{\vec{E}} = E_1\cos\beta x\, e^{j(\omega t - \alpha z)}\vec{e}_y$$
$$= \frac{1}{2}(E_1 e^{j(\omega t - \beta x - \alpha z)}\vec{e}_y + E_1 e^{j(\omega t + \beta x - \alpha z)}\vec{e}_y);$$

• *đối với các kiểu lẻ :*

$$\underline{\vec{E}} = E_1\sin\beta x\, e^{j(\omega t - \alpha z)}\vec{e}_y$$
$$= j\frac{1}{2}(E_1 e^{j(\omega t + \beta x - \alpha z)}\vec{e}_y - E_1 e^{j(\omega t + \beta x - \alpha z)}\vec{e}_y).$$

Trong cả hai trường hợp, sóng có thể được viết dưới dạng tổng của hai sóng phẳng lan truyền theo các phương xác định bởi các vectơ sóng $\vec{k}_1 = \beta\vec{e}_x + \alpha\vec{e}_z$ *và* $\vec{k}_1 = -\beta\vec{e}_x + \alpha\vec{e}_z$, *chúng tạo với trục (Oz) các góc* $\pm\theta$, *góc* θ *được xác định bởi* $\mathrm{tg}\theta = \frac{\beta}{\alpha}$ *(xem sơ đồ dưới đây).*



Trong trường hợp giới hạn là sự phản xạ toàn phần ở giao diện lõi - vỏ, góc θ' *nghiệm đúng* $n_1\sin\theta' = n_2$, *do đó* $n_1\cos\theta = n_2$, *và vì* $1 + \mathrm{tg}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$, *ta thấy lại được điều kiện giới hạn* $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\mathrm{tg}\theta} = \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$.

5) a) *Đặt* $\beta\frac{a}{2} = (n-1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ *(với* $\varepsilon \ll 1$*). Các hệ thức thu được ở câu 3) a) cho ta :*

• *đối với các nghiệm chẵn (n lẻ, thí dụ n = 3 ở sơ đồ trên đây) :*

$$\gamma = \beta\,\mathrm{tg}\,\beta\frac{a}{2} = \beta\,\mathrm{tg}\left((n-1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \approx \beta\varepsilon,$$

do đó $\gamma a \approx \beta a\varepsilon = (n-1)\pi\varepsilon$;

• đối với các nghiệm lẻ (n chẵn) :

$$\gamma = -\beta \operatorname{cotg} \beta \frac{a}{2} = -\beta \operatorname{cotg}\left((n-1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) \approx \beta\varepsilon ,$$

và ta thấy lại $\gamma a \approx \beta a\varepsilon = (n-1)\pi\varepsilon$.

Ngoài ra, khi thay $\beta \frac{a}{2}$ và $\gamma \frac{a}{2}$ bằng giá trị của chúng trong phương trình của đường tròn ở câu 3) b), và bỏ qua tất cả các số hạng có bậc cao hơn 1 đối với ε, ta được : $\frac{a}{2}\sqrt{k_1^2 - k_2^2} = (n-1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon$.

Từ các phương trình trên và từ $\omega_{nc} = (n-1)\frac{\pi c}{a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$ ta rút ra :

$$\varepsilon^2 \approx \frac{a^2}{4c^2}(n_1^2 - n_2^2)(\omega - \omega_{nc})^2 = \frac{a^2}{(n-1)^2\pi^2}\gamma^2 ,$$

sau đó, khi sử dụng $\gamma^2 = \alpha^2 - k_2^2$, ta rút ra hệ thức cần tìm :

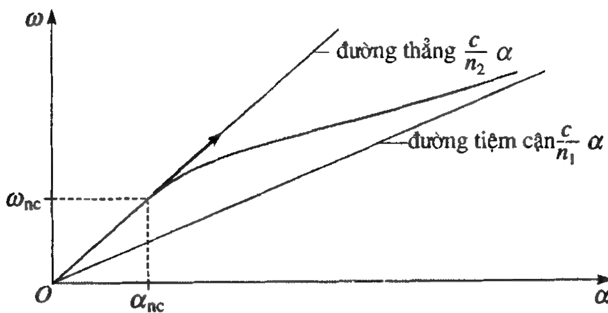
$$\alpha^2 = \left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2 + \frac{(n-1)^2\pi^2}{4c^2}(n_1^2 - n_2^2)(\omega - \omega_{nc})^2 .$$

b) Đối với một mạch số ω gần với mạch số cắt ω_{nc} , hệ thức trên chỉ ra rằng $\alpha \approx n_2 \frac{\omega}{c}$.

Đối với một tần số $\omega \gg \omega_{nc}$, thì :

$$\beta \frac{a}{2} \approx n\frac{\pi}{2} \; ; \alpha^2 = k_1^2 - \beta^2 \approx \left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2 \text{ thì } \alpha = n_1\frac{\omega}{c} .$$

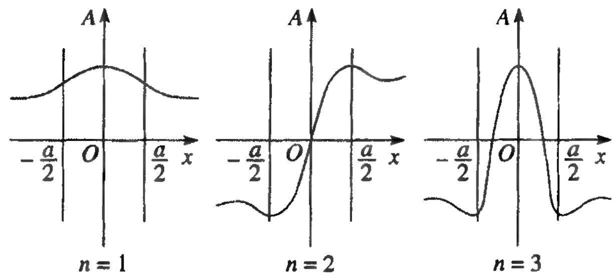
Đồ thị cho biết dáng vẻ của $\omega = \omega(\alpha)$ được vẽ dưới đây.



c) Biên độ A(x) của điện trường được cho ở bảng của câu 2) b). Đối với $k_2 \le \alpha < k_1$, ta thu được :

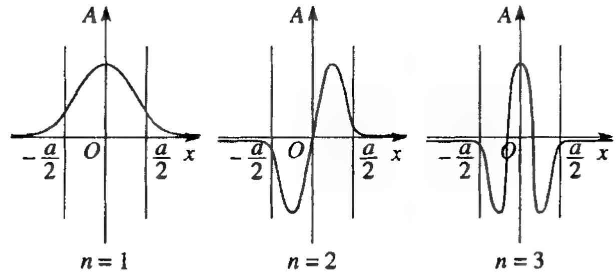
	$-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$	$\frac{a}{2} \le x$	$x \le -\frac{a}{2}$
nghiệm chẵn (n lẻ)	$A = E_1 \cos\beta x$	$A = E_2 e^{-\gamma x}$	$A = E_2 e^{+\gamma x}$
nghiệm lẻ (n chẵn)	$A = E_1 \sin\beta x$	$A = E_2 e^{-\gamma x}$	$A = -E_2 e^{+\gamma x}$

Ở lân cận mạch số cắt thì $\beta \frac{a}{2} = (n-1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ và $\gamma = \frac{(n-1)\pi}{a}\varepsilon$ là rất nhỏ, từ đó ta rút ra vài dáng vẻ khả dĩ của A(x).



Biên độ của trường trong vỏ là lớn. Do đó một tỉ lệ lớn năng lượng điện từ lan truyền trong vỏ, bên ngoài lõi của sợi quang học.

Đối với $\omega \gg \omega_{nc}$ thì $\beta \frac{a}{2} \approx n\frac{\pi}{2}$ và γ rất lớn, do đó có vài dáng vẻ khả dĩ của A(x) được vẽ dưới đây.



Trái với trường hợp trên, biên độ trường trong vỏ là rất nhỏ. Trong thực tế, tất cả năng lượng điện trường lan truyền trong lõi.

6) Vận tốc pha của sóng điện từ bằng $v_\varphi = \frac{\omega}{\alpha}$. Khi n là lớn (lân cận với N), mạch số ω có một giá trị gần với ω_{nc} . Hệ thức tán sắc $\alpha = \alpha(\omega)$ thu được ở câu 5) a) cho phép nói rằng trong miền mạch số này vận tốc pha $v_\varphi = \frac{\omega}{\alpha}$ và vận tốc nhóm $v_g = \frac{d\omega}{d\alpha}$ (ở đây nó cũng là vận tốc truyền năng lượng) hầu như là bằng nhau và bằng $v_2 = \frac{c}{n_2}$.

Kiểu n = 1 là sao cho $\omega \ll \omega_{1c}$. Trong miền tần số này, câu 5) b) chỉ ra rằng $\alpha \approx n_1\frac{\omega}{c}$, vận tốc pha và vận tốc nhóm cũng vẫn bằng nhau, và có giá trị chung $v_1 = \frac{c}{n_1}$.

Ta thấy được rằng kiểu có giá trị n lớn nhất là kiểu nhanh nhất, và kiểu n = 1 là chậm nhất. Khoảng cách thời gian lan truyền giữa kiểu nhanh nhất và kiểu chậm nhất bằng $\delta t = \frac{L}{v_1} - \frac{L}{v_2} = \frac{L}{c}(n_1 - n_2)$.

Phụ lục

Bảng công thức

Tất cả các hệ thức trình bày ở đây đều được trình bày chi tiết trong cuốn *H–Prépa, Cơ học chất lưu, lớp đệ nhị.*

Ta kí hiệu U và V là các trường vô hướng :

$$U = U(M,t) \text{ và } V = V(M,t).$$

Ta kí hiệu $\vec{A}$ và $\vec{B}$ là các trường vectơ :

$$\vec{A} = \vec{A}(M,t) \text{ và } \vec{B} = \vec{B}(M,t).$$

1 VÀI HỆ THỨC CÓ ÍCH

$\overrightarrow{\text{grad}}(UV) = U\overrightarrow{\text{grad}}V + V\overrightarrow{\text{grad}}U$.

$\overrightarrow{\text{rot}}(U\vec{A}) = U\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}U \wedge \vec{A}$.

$\text{div}(U\vec{A}) = U\,\text{div}\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}U \,.\, \vec{A}$.

$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B}.\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} - \vec{A}.\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$.

$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}U) = \vec{0}$.

$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \vec{0}$.

$\Delta U = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}U)$.

$\Delta\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A})$

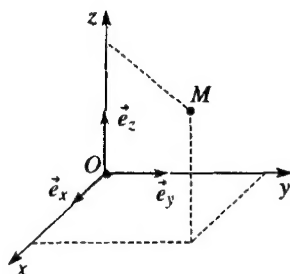
hoặc $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = -\Delta\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A})$.

2 CÁCH SỬ DỤNG CÁC TỌA ĐỘ DESCARTES

$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

$U(M,t) = U(x,y,z,t)$.

$\vec{A}(M,t) = A_x(x,y,z,t)\vec{e}_x$
$+A_y(x,y,z,t)\vec{e}_y$
$+A_z(x,y,z,t)\vec{e}_z$.



• **Gradiên**

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z.$$

• **Dive**

$$\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

• **Rôta**

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z.$$

• **Laplaxiên của một trường vô hướng**

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

• **Laplaxiên của một trường vectơ**

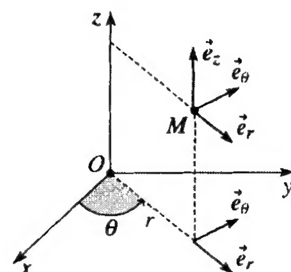
$$\Delta\vec{A} \left| \begin{aligned} \Delta A_x &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}. \\ \Delta A_z &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{aligned} \right.$$

3 CÁCH SỬ DỤNG CÁC TỌA ĐỘ TRỤ

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$.

$U(M,t) = U(r, \theta, z, t)$.

$\vec{A}(M,t) = A_r(r,\theta,z,t)\vec{e}_r$
$+A_\theta(r,\theta,z,t)\vec{e}_\theta$
$+A_z(r,\theta,z,t)\vec{e}_z$.



• **Gradiên**

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z.$$

• **Dive**

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

• **Rôta**

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\vec{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\vec{e}_\theta + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\vec{e}_z.$$

• **Laplaxiên của một trường vô hướng**

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

• **Vài kết quả bổ ích trong hệ tọa độ trụ**

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U(r)) = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r.$$

$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r}\right) = 0$, trừ tại $r = 0$, tại đó dive là vô hạn.

$\text{rot}\left(\frac{\vec{e}_\theta}{r}\right) = 0$, trừ tại $r = 0$, tại đó rôta là vô hạn.

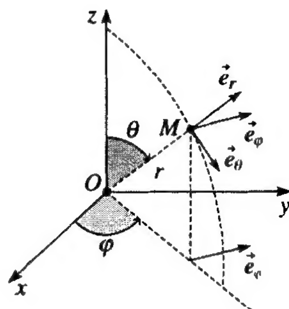
$$\Delta(U(r)) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right).$$

4 CÁCH SỬ DỤNG CÁC TỌA ĐỘ CẦU

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$.

$U(M,t) = U(r, \theta, \varphi, t)$.

$\vec{A}(M,t) = A_r(r,\theta,\varphi,t)\vec{e}_r$
$+A_\theta(r,\theta,\varphi,t)\vec{e}_\theta$
$+A_\varphi(r,\theta,\varphi,t)\vec{e}_z$.



• **Gradiên**

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi.$$

• **Dive**

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

• **Rôta**

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\vec{e}_\varphi.$$

• **Laplaxiên của một trường vô hướng**

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta.\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}.$$

• **Vài kết quả bổ ích trong hệ tọa độ cầu**

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ (U(r)) = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r.$$

$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) = 0$, trừ tại $r = 0$, tại đó dive là vô hạn.

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{e}_\varphi}{r\sin\theta}\right) = \vec{0}.$$

$$\Delta(U(r)) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2(rU)}{\mathrm{d}r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}.$$

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu:
VŨ THANH MAI
PHẠM THỊ NGỌC THẮNG

Biên tập tái bản:
ĐẶNG THANH HẢI

Trình bày bìa:
LÊ HOÀNG HẢI

Sửa bản in:
VŨ THANH MAI
PHẠM THỊ NGỌC THẮNG

Sắp chữ:
ĐOÀN VIỆT QUÂN

SÓNG

7K 480T6 - DAI

In 1000 bản, khổ 19 x 27 cm tại Công ty cổ phần In Phúc Yên
Số XB: 194 - 2006/CXB/14 - 323/GD
In xong và nộp lưu chiểu quý 2 năm 2006



Sóng



CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
Địa chỉ : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội





Giá: 34.000đ